



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>



UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT





Math. 206

Math. 206

ESSAI
SUR L'APPLICATION
DE L'ANALYSE
À LA
PROBABILITÉ
DES DÉCISIONS

Rendues à la pluralité des voix.

*Par M. LE MARQUIS DE CONDORCET, Secrétaire perpétuel
de l'Académie des Sciences, de l'Académie Française, de
l'Institut de Bologne, des Académies de Pétersbourg, de
Turin, de Philadelphie & de Padoue.*

Quòd si deficiant vires audacia certè
Laus erit, in magnis & voluisse sat est.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXV.



1 2 3 4 5

INSTITUTIONAL

RECORDS

AS A

MEMBER OF THE

CONFEDERATE STATES

OF AMERICA

THE CONFEDERATE STATES OF AMERICA
WAS A SHORT-LIVED POLITICAL ENTITY
WHICH EXISTED FROM FEBRUARY 22, 1862
TO MAY 9, 1865. IT WAS A
SECESSIONIST GOVERNMENT
WHICH SECEDED FROM THE UNITED STATES
OF AMERICA.

CONFEDERATE STATES OF AMERICA
MAY 9, 1865

CONFEDERATE STATES

OF AMERICA



DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

UN grand homme *, dont je regretterai toujours les leçons, les exemples, & sur-tout l'amitié, étoit persuadé que les vérités des Sciences morales & politiques, sont susceptibles de la même certitude que celles qui forment le système des Sciences physiques, & même que les branches de ces Sciences qui, comme l'Astronomie, paroissent approcher de la certitude mathématique.

Objet
de l'Ouvrage.

Cette opinion lui étoit chère, parce qu'elle conduit à l'espérance consolante que l'espèce humaine fera nécessairement des progrès vers le bonheur & la perfection, comme elle en a fait dans la connoissance de la vérité.

C'étoit pour lui que j'avois entrepris cet ouvrage, où en soumettant au Calcul des questions intéressantes pour l'utilité commune, j'essayois de prouver, du moins par un exemple, cette opinion qu'il eût voulu faire partager à tous ceux qui aiment la vérité: il en voyoit avec peine plusieurs qui, persuadés qu'on ne pouvoit espérer d'y atteindre, dans les questions de ce genre, dédaignoient, par cette seule raison, de s'occuper des objets les plus importants.

Si l'humanité n'eût pas eu le malheur, long-temps irréparable, de le perdre trop tôt, cet ouvrage eût été moins imparfait: éclairé par ses conseils, j'aurois vu mieux ou plus loin, & j'aurois avancé avec plus de confiance des principes

* M. Turgot.

qui auroient été les siens. Privé d'un tel guide, il ne me reste qu'à faire à sa mémoire l'hommage de mon travail, en faisant tous mes efforts pour le rendre moins indigne de l'amitié dont il m'honorait.

Cet Essai ne seroit que d'une utilité très-bornée s'il ne pouvoit servir qu'à des Géomètres, qui d'ailleurs ne trouveroient peut-être dans les méthodes de calcul rien qui pût mériter leur attention. Ainsi j'ai cru devoir y joindre un Discours, où, après avoir exposé les principes fondamentaux du Calcul des probabilités, je me propose de développer les principales questions que j'ai essayé de résoudre & les résultats auxquels le calcul m'a conduit. Les Lecteurs qui ne sont pas Géomètres, n'auront besoin, pour juger de l'ouvrage, que d'admettre comme vrai ce qui est donné pour prouvé par le calcul.

Presque par-tout on trouvera des résultats conformes à ce que la raison la plus simple auroit dicté; mais il est si facile d'obscurcir la raison par des sophismes & par de vaines subtilités, que je me croirois heureux quand je n'aurois fait qu'appuyer de l'autorité d'une démonstration mathématique une seule vérité utile.

Parmi le grand nombre d'objets importants auxquels le Calcul peut s'appliquer, j'ai choisi l'examen de la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix : ce sujet n'a été traité par personne, du moins avec l'étendue & avec les détails qu'il mérite, & il m'a semblé qu'il n'exigeoit point des forces supérieures aux miennes, même pour être traité avec une forte d'utilité.

Origine & motif de l'usage de décider les questions à la pluralité des voix.

Lorsque l'usage de soumettre tous les individus à la volonté du plus grand nombre, s'introduisit dans les sociétés, & que les hommes convinrent de regarder la décision de la pluralité

comme la volonté commune de tous , ils n'adoptèrent pas cette méthode comme un moyen d'éviter l'erreur & de se conduire d'après des décisions fondées sur la vérité : mais ils trouvèrent que , pour le bien de la paix & l'utilité générale , il falloit placer l'autorité où étoit la force , & que , puisqu'il étoit nécessaire de se laisser guider par une volonté unique , c'étoit la volonté du petit nombre qui naturellement devoit se sacrifier à celle du plus grand.

En réfléchissant sur ce que nous connoissons des constitutions des anciens Peuples , on voit qu'ils cherchèrent beaucoup plus à contre-balancer les intérêts & les passions des différens Corps qui entroient dans la constitution d'un État , qu'à obtenir de leurs décisions des résultats conformes à la vérité.

Les mots de liberté & d'utilité les occupoient plus que ceux de vérité & de justice ; & la liaison de ces objets entre eux , aperçue peut-être par quelques-uns de leurs Philosophes , n'étoit pas assez distinctement connue pour servir de base à la politique.

Dans les Nations modernes , où la Scolastique introduisit un esprit de raisonnement & de subtilité , qui peu-à-peu s'étendit sur tous les objets , on aperçoit , même au milieu des siècles d'ignorance , quelques traces de l'idée de donner aux Tribunaux une forme qui rende probable la vérité de leurs décisions.

L'unanimité exigée en Angleterre dans les jugemens par Jurés , l'usage d'exiger en France une pluralité de deux ou de trois voix pour condamner , sur-tout celui de ne regarder comme irrévocable une décision de la Rote , que lorsqu'elle a été donnée par trois jugemens uniformes , & quelques

a ij

coutumes semblables, établies dans plusieurs États d'Italie; toutes ces institutions remontent à des temps fort antérieurs au retour des lumières, & toutes semblent annoncer des efforts pour obtenir des décisions conformes à la raison.

Les circonstances semblent l'exiger de nous. Chez les Anciens, c'est-à-dire, chez les Romains & les Grecs, seuls peuples dont l'Histoire nous soit bien connue, les grandes affaires se décidoient, ou par l'assemblée générale des Citoyens, ou par des Corps qui s'étoient emparés de la puissance souveraine: leur volonté juste ou injuste, fondée sur la vérité ou sur l'erreur, devoit avoir l'appui de la force; & proposer des moyens d'affujettir leurs volontés à la raison, c'eût été leur proposer des chaînes & mettre des bornes à leur autorité ou à leur indépendance.

Parmi nous au contraire, les affaires sont le plus souvent décidées par le vœu d'un corps de Représentans ou d'Officiers, soit de la Nation, soit du Prince. Il est donc de l'intérêt de ceux qui disposent de la force publique, de n'employer cette force que pour soutenir des décisions conformes à la vérité, & de donner aux Représentans, qu'ils ont chargés de prononcer pour eux, des règles qui répondent de la bonté de leurs décisions.

Utilité d'appliquer le calcul à l'examen de la probabilité de ces décisions.

En cherchant, d'après la raison seule, quelle confiance plus ou moins grande mérite le jugement d'assemblées plus ou moins nombreuses, affujetties à une pluralité plus ou moins forte, partagées en plusieurs Corps différens ou réunies en un seul, formées d'hommes plus ou moins éclairés; on sent qu'on ne parviendroit qu'à des résultats vagues, & souvent assez vagues pour devenir incertains, & pour nous induire en erreur si nous les admettions sans les avoir soumis au calcul.

P R É L I M I N A I R E.

4

Ainsi, par exemple, on sentiroit aisément qu'en exigeant d'un Tribunal une pluralité plus grande pour condamner un accusé, on acquiert une sûreté aussi plus grande qu'un innocent ne sera pas envoyé au supplice: mais la raison sans calcul ne vous apprendra ni jusqu'à quelles bornes il peut être utile de porter cette sûreté, ni comment on peut la concilier avec la condition de ne pas laisser échapper trop de coupables.

La raison, avec un peu de réflexion, fera sentir la nécessité de constituer un Tribunal de manière qu'il soit presque impossible qu'un seul innocent soit condamné, même dans un long espace de temps; mais elle n'apprendra ni dans quelles limites on peut renfermer cette probabilité, ni comment y parvenir, sans multiplier le nombre des Juges au-delà des bornes qu'il n'est guère possible de passer.

Ces exemples suffisent pour faire apercevoir l'utilité &, j'oserois presque dire, la nécessité d'appliquer le calcul à ces questions.

Avant de rendre compte de mes recherches, il m'a paru nécessaire d'entrer dans quelques détails sur les principes du calcul des probabilités.

Principe général du calcul des probabilités

Tout ce calcul, du moins toute la partie qui nous intéresse ici, est appuyée sur un seul principe général.

Si sur un nombre donné de combinaisons également possibles, il y en a un certain nombre qui donnent un évènement, & un autre nombre qui donnent l'évènement contraire, la probabilité de chacun des deux évènements sera égale au nombre des combinaisons qui l'amènent, divisé par le nombre total.

Ainsi, par exemple, si on prend un dez de six faces, dont on suppose que chaque face puisse arriver également, comme une seule donne six points, & que les cinq autres donnent

d'autres points, $\frac{1}{6}$ exprimera la probabilité d'amener cette face, & $\frac{5}{6}$ la probabilité de ne pas l'amener.

On voit que le nombre des combinaisons qui amènent un évènement & celui des combinaisons qui ne l'amènent pas, sont égaux ensemble au nombre total des combinaisons, & que par conséquent la somme des probabilités de deux évènements contradictoires est égale à l'unité.

Or, supposons que l'une de ces probabilités soit nulle, l'autre toute seule sera donc égale à l'unité; mais une probabilité n'est nulle que parce qu'aucune combinaison ne peut amener l'évènement qui y répond: l'évènement contradictoire, ou celui dont la probabilité est 1, arrive donc nécessairement; donc cet évènement est certain.

Il faut nécessairement qu'un évènement arrive ou qu'il n'arrive pas: il est donc sûr qu'il arrivera un des deux évènements contradictoires, & la somme de leurs probabilités est exprimée par 1.

Voilà tout ce qu'on entend, en disant que la probabilité est exprimée par une fraction, & la certitude par l'unité.

Ce principe suffit pour tous les cas. En effet, si l'on considère trois évènements qui peuvent résulter d'un certain nombre de combinaisons possibles, la probabilité du premier sera égale au nombre des combinaisons qui l'amènent, divisé par le nombre total des combinaisons; & celle de l'un ou l'autre des deux autres évènements, au nombre des combinaisons qui n'amènent pas le premier divisé par le nombre total,

Par la même raison, la probabilité du second évènement sera égale au nombre des évènements qui l'amènent divisé par le nombre total.

Il en sera de même de la probabilité du troisième, & les

ſommes des probabilités des trois évènements ſeuls poſſibles ſeront encore égales à l'unité.

Si les combinaifons ne ſont pas également poſſibles, le même principe ſ'y applique encore. En effet, une combinaison deux fois plus poſſible qu'une autre, n'eſt autre choſe que deux combinaifons égales & ſemblables, comparées à une combinaison unique.

Examinons maintenant ce premier principe. On voit d'abord que ſi on ſe borne à entendre par probabilité d'un évènement le nombre des combinaifons où il a lieu, diviſé par le nombre total des combinaifons poſſibles, le principe n'eſt qu'une vérité de définition, & qu'ainſi le calcul, dont il eſt la baſe, devient d'une vérité rigoureuſe.

De la nature de la probabilité & du motif de croire qui en réſulte.

Sens abſtrait du mot probabilité.

Mais on ne ſe borne point à ce ſeul ſens.

On entend de plus, 1.^o que ſi on connoît le nombre des combinaifons qui amènent un évènement, & le nombre des combinaifons qui ne l'amènent pas, & que le premier ſurpaſſe le ſecond, il y a lieu de croire que l'évènement arrivera plutôt que de croire qu'il n'arrivera pas.

Sens plus étendu de ce mot, & propoſitions, dont en le prenant dans ce ſens, on ſuppoſe la vérité.

2.^o Que ce motif de croire augmente en même temps que le rapport du nombre des combinaifons favorables avec le nombre total.

3.^o Qu'il croît proportionnellement à ce même rapport.

La vérité de cette dernière propoſition dépend de celle de la ſeconde & de la première. En effet, ſi le motif de croire devient plus fort lorsque le nombre des combinaifons augmente, on peut démonſtrer que ſi on répète un certain nombre de fois le jugement conforme à cette opinion, c'eſt-à-dire, que l'évènement qui a plus de combinaifons en ſa faveur arrivera plutôt que l'autre, la combinaison la plus probable

Preuve de ces propoſitions : la troiſième eſt une conféquence des deux premières.

est celle où le nombre des jugemens vrais seroit au nombre total des jugemens, comme le nombre des combinaisons favorables à l'évènement à leur nombre total, c'est-à-dire, que la combinaison la plus probable est celle où le rapport du nombre des jugemens vrais au nombre total des jugemens, sera égal à ce que nous appelons la probabilité de l'évènement.

On peut démontrer également que plus on multipliera les jugemens, plus il deviendra probable que ces deux rapports s'écarteront très-peu l'un de l'autre *. Ainsi admettre qu'une probabilité plus grande (ce mot étant pris dans le sens abstrait de la définition) est un motif plus grand de croire, c'est admettre en même temps que ces motifs sont proportionnels aux probabilités.

Que la seconde est aussi une conséquence de la première.

Cela posé, du moment qu'on admet que, dès que le nombre des combinaisons qui amènent un évènement, est plus grand que le nombre des combinaisons qui ne l'amènent pas, on a un motif de croire que l'évènement arrivera; on doit admettre que si la probabilité d'un autre évènement est plus grande, le motif de croire sera plus grand aussi.

En effet, si les probabilités sont égales, les motifs de croire sont égaux. Supposant donc une probabilité donnée, & qu'on trouve par le calcul, que si on juge conformément au motif de crédibilité qui en résulte, on aura une certaine probabilité de ne se tromper dans ses jugemens qu'une fois sur dix; en appliquant le même calcul à une probabilité plus grande, on trouvera qu'en jugeant conformément au motif

* Voyez pour ces deux démonstrations, la troisième partie de l'*Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, Ouvrage plein de génie & l'un de ceux qui font le plus regretter que ce grand homme ait commencé si tard sa carrière mathématique, & que la mort l'ait si-tôt interrompue.

de crédibilité qui en résulte, on aura la même probabilité de ne se tromper qu'une fois sur un nombre plus grand de jugemens *. On aura donc dans les deux cas une égale probabilité, un égal motif de croire qu'on se trompera moins en jugeant d'après la seconde probabilité qu'en jugeant d'après la première, & par conséquent un motif plus fort pour se déterminer à juger d'après la seconde. Ainsi la vérité de la seconde des propositions précédentes dépend encore de la vérité de la première proposition.

Il nous reste donc à examiner seulement si, lorsque la probabilité d'un évènement (ce mot étant toujours pris dans le sens abstrait) est plus grande que celle de l'évènement contraire, on a un motif de croire que le premier évènement arrivera. Preuve de la première proposition.

Il suffira d'examiner cette proposition, dans le cas où la différence de ces probabilités est fort grande; car ce motif ne peut subsister dans ce cas sans subsister, quoiqu'avec moins de force, lorsque la différence est très-petite.

En effet, quelque petit que soit l'excès d'une probabilité sur l'autre, on trouve, par le calcul, que si on considère une suite d'évènements semblables, on pourra obtenir une très-grande probabilité que l'évènement qui avoit en sa faveur la plus grande des deux probabilités, arrivera plus souvent que l'autre **. On aura donc, par l'hypothèse, un motif de croire qu'il arrivera plus souvent que l'autre, & par conséquent un motif de croire plutôt qu'il arrivera que de croire qu'il n'arrivera pas.

Examinons maintenant cette première proposition, à

* Ceci ne demande qu'un calcul très-simple, & qu'il suffit d'indiquer.

** Cette proposition est démontrée dans cet Ouvrage, pages 14 & 25.

laquelle nous venons de réduire les deux autres, & que nous avons elle-même réduite à ses termes les plus simples.

Nature du motif de croire qui résulte de la probabilité.

Un évènement futur n'est pour nous qu'un évènement inconnu. Supposons un sac dans lequel je sache qu'il existe quatre-vingt-dix boules blanches & dix noires, & qu'on me demande quelle est la probabilité d'en tirer une boule blanche; ou que la boule étant déjà tirée, mais couverte d'un voile, on me demande quelle est la probabilité que l'on a tiré une boule blanche: il est clair que dans les deux cas ma réponse sera la même, & que la probabilité est égale. Je répondrai donc qu'il est plus probable de tirer une boule blanche; cependant c'est une boule blanche ou une boule noire qui est nécessairement sous le voile.

Ainsi le motif qui me porte à croire que la boule est blanche, ou la probabilité qu'elle est blanche, reste la même, quoiqu'il soit sûr que la boule est blanche, ou qu'il soit sûr qu'elle est noire, quoique l'un ou l'autre de ces faits puisse être certain pour un autre individu, & j'ai dans ce cas une égale probabilité pour la couleur blanche de la boule, un égal motif de la croire blanche, & lorsque ce fait est certain, & lorsqu'il est certainement faux.

Il n'y a donc aucune liaison immédiate entre ce motif de croire & la vérité du fait qui en est l'objet; il n'y en a aucune entre la probabilité & la réalité des évènements.

Ce motif est le même que celui qui nous fait croire à la constance des phénomènes de la Nature.

Pour connoître la nature de ce motif, il nous suffira d'observer que toutes nos connoissances sur les évènements naturels qui n'ont pas frappé nos sens, sur les évènements futurs, c'est-à-dire, toutes celles qui dirigent notre conduite & nos jugemens dans le cours de notre vie, sont fondées sur ces deux principes: *que la Nature suit des loix invariables, & que*

les phénomènes observés nous ont fait connaître ces loix. L'expérience constante que les faits sont conformes à ces principes, est pour nous le seul motif de les croire. Or, si on pouvoit rassembler tous les faits, dont l'observation nous a conduits à croire ces deux propositions, le calcul nous apprendroit à déterminer avec précision quelle est la probabilité qu'elles sont vraies*.

Nous ne pouvons à la vérité rassembler ces données, & nous voyons seulement que le calcul nous conduiroit à une probabilité très-grande : mais cette différence ne change point la nature du motif de croire, qui est le même dans les deux cas.

Ainsi le motif de croire que sur dix millions de boules blanches mêlées avec une noire, ce ne sera point la noire que je tirerai du premier coup, est de la même nature que le motif de croire que le Soleil ne manquera pas de se lever demain, & ces deux opinions ne diffèrent entr'elles que par le plus ou le moins de probabilité.

Si je regarde deux hommes de six pieds, l'un à douze pieds de distance & l'autre à vingt-quatre, je les vois d'une grandeur égale; & cependant si je ne pouvois former aucun jugement d'après leur distance, leur forme, le degré de clarté, ou de lumière de leurs images, l'un me paroîtroit une fois plus grand que l'autre. Quel est donc mon motif de les juger égaux? c'est qu'une expérience constante m'a instruit que, malgré l'inégalité de leurs images, des corps vus de cette manière dans les mêmes circonstances, étoient sensiblement égaux. Ce jugement est donc fondé sur une simple probabilité: le motif de croyance qui naît de la probabilité, a donc

Il est le même que celui des jugemens qui se confondent avec les sensations.

* Voyez la troisième Partie de cet Ouvrage.

assez de force pour devenir involontaire, irrésistible; de manière que le jugement, porté d'après ce motif, se confonde absolument avec la sensation même. Dans cet exemple, nous voyons ce que ce motif nous porte à croire, & nous ne pouvons voir autrement.

Si je fais rouler une petite boule entre deux doigts croisés, je sens deux boules, quoiqu'il n'y en ait qu'une, & cela, parce que j'ai constamment éprouvé qu'il existoit deux corps ronds toutes les fois que j'éprouvois cette sensation en même temps aux deux côtés opposés de deux doigts. Voici donc encore un jugement fondé sur la probabilité produite par l'expérience, qui est devenu une sensation involontaire: cependant malgré cette sensation, je juge qu'il n'y a qu'un corps en vertu d'une probabilité plus grande, & ce jugement l'emporte sur le premier, quoique l'habitude n'ait pas eu le pouvoir de le changer en sensation.

Il est le même que celui qui nous fait croire l'existence des corps.

La croyance de l'existence même des corps, n'est fondée que sur un motif semblable, que sur une probabilité. En effet, l'idée de cette existence est uniquement pour nous la persuasion que le système des sensations qui sont excitées en nous dans un instant, se représenteront constamment de même dans des circonstances semblables, ou avec de certaines différences liées constamment au changement des circonstances*. Cette persuasion de l'existence des corps n'est donc fondée que sur la constance dans l'ordre des phénomènes, que des expériences répétées nous ont fait connoître: le motif de croire à cette existence est donc absolument de la même nature que celui qui naît de la probabilité.

* Voyez l'article *existence* dans l'Encyclopédie, où cette matière est traitée avec beaucoup de profondeur & de clarté.

Si on demande maintenant quelle est la certitude d'une démonstration mathématique, je répondrai qu'elle est encore de la même nature.

Ce même motif se mêle encore à la certitude des démonstrations.

En effet, je suppose, par exemple, que j'emploie dans cette démonstration la formule du binôme, il est clair qu'en supposant même une certitude entière de la vérité de ma démonstration, je ne suis sûr de l'exactitude de la formule du binôme que par le souvenir d'en avoir entendu & suivi la démonstration. Or, si ce souvenir de la bonté de cette démonstration est actuellement pour moi un motif de croire, c'est seulement parce que l'expérience m'a montré que si je m'étois une fois démontré une vérité, je retrouverois constamment cette même vérité toutes les fois que j'en voudrois suivre la démonstration. C'est donc encore un motif de croire, fondé sur l'expérience du passé, & par conséquent sur la probabilité.

Nous n'avons donc à la rigueur une véritable certitude que celle qui naît de l'évidence intuitive, c'est-à-dire, celle de la proposition de la vérité de laquelle nous avons la conscience; ou bien, dans un raisonnement suivi, de la légitimité de chaque conséquence, le principe étant supposé vrai, mais non celle de la conséquence elle-même, puisque la vérité de cette conséquence dépend de propositions, de la vérité desquelles nous avons cessé d'avoir la conscience. Ainsi le motif de croire cette conséquence, est fondé uniquement sur la probabilité.

Il est cependant entre les vérités, regardées comme ayant une certitude entière & les autres, une différence qu'il est essentiel de remarquer.

Pour les premières, nous ne sommes obligés d'admettre qu'une seule supposition fondée sur la probabilité, celle que le souvenir

d'avoir eu la conscience de la vérité d'une proposition ne nous ayant jamais trompé, ce même souvenir ne nous trompera point dans une nouvelle occasion : mais pour les autres, le motif de croire est fondé d'abord sur ce principe, & ensuite sur l'espèce de probabilité propre à chaque objet. La possibilité de l'erreur dépend de plusieurs causes combinées. Si on la suppose la même pour chacune, le calcul montrera qu'elle sera plus que double s'il y a deux causes, plus que triple s'il y en a trois, &c. Ainsi nous donnons le nom de certitude mathématique à la probabilité, lorsqu'elle se fonde sur la constance des loix observées dans les opérations de notre entendement. Nous appelons certitude physique la probabilité qui suppose de plus la même constance dans un ordre de phénomènes indépendans de nous, & nous conservons le nom de probabilité pour les jugemens exposés de plus à d'autres sources d'incertitude.

Si nous comparons maintenant le motif de croire les vérités que nous venons d'examiner, avec le motif de croire d'après une probabilité calculée, nous n'y trouverons que trois différences; la première, que dans les espèces de vérités que nous avons examinées, la probabilité est inassignable, & presque toujours tellement grande qu'il seroit superflu de la calculer; la seconde, qu'accoutumés dans le cours de la vie à fonder nos jugemens sur cette probabilité, nous formons ces jugemens sans songer à la nature du motif qui les détermine, au lieu que dans les questions soumises au calcul des probabilités, nous y arrêtons notre attention: dans le premier cas, nous cédonç sans le savoir à un penchant involontaire; dans le second, nous nous rendons compte du motif qui détermine ce penchant: la troisième, que dans le premier cas nous pouvons savoir seulement que nous avons des motifs de croire plus ou

moins forts; au lieu que dans la seconde, nous pouvons exprimer en nombres les rapports de ces différens motifs.

Ce simple exposé nous suffit pour sentir la nature du motif de croire qui résulte de la probabilité calculée, & toute l'étendue de l'utilité de ce calcul, puisqu'il nous sert à mesurer avec précision les motifs de nos opinions dans tous les cas où cette mesure précise peut être utile.

Plan de l'Ouvrage.

DANS l'examen de la probabilité des décisions à la pluralité des voix, il faut distinguer deux espèces de décisions: dans les premières, la décision est adoptée, quelle que soit la pluralité qui la forme.

Division générale des décisions en deux genres. Questions auxquelles il convient de les appliquer.

Alors si le nombre des Votans est impair, il y a nécessairement une décision.

S'il est pair, le cas de partage est le seul où il n'y ait pas de décision.

Cette méthode de décider paroît ne devoir s'appliquer qu'aux questions sur lesquelles il est nécessaire de prendre un parti, à celles où les inconvéniens de l'erreur sont égaux, quel que soit le parti qu'on ait adopté, & sont en même temps inférieurs à l'inconvénient de remettre la décision.

Dans la seconde espèce de décisions, on ne les regarde comme prononcées que lorsqu'elles ont en leur faveur une pluralité qui est fixée. Si cette pluralité n'a pas lieu; ou l'on remet la décision, parce que l'on juge qu'il vaut mieux attendre que de risquer de prendre un mauvais parti; ou bien l'on choisit un des deux partis, soit parce qu'on juge qu'il vaut mieux risquer de se tromper en le suivant que de remettre la décision, soit parce que le parti contraire ne peut être adopté

avec justice, si l'on n'a pas une grande probabilité que ce parti est conforme à la vérité.

Loix. Je suppose, par exemple que l'on propose à une assemblée de décider s'il est à propos de faire une loi nouvelle, on peut croire qu'une loi n'étant utile que lorsqu'elle est conforme à la raison, il faut exiger une pluralité telle qu'elle donne une très-grande probabilité de la justesse de la décision, & qu'il vaut mieux ne faire aucune loi qu'en faire une mauvaise.

On pourroit même alors, & la justice semble l'exiger, distinguer entre les loix qui rétablissent les hommes dans la jouissance de leurs droits naturels, celles qui mettent des entraves à ces droits, & celles enfin, du moins s'il en peut exister de telles, qui paroissent n'augmenter ni ne diminuer l'exercice de la liberté naturelle. Dans le premier cas, la simple pluralité doit suffire; une grande pluralité paroît devoir être exigée pour celles qui mettent des bornes à l'exercice des droits naturels de l'homme, parce qu'il ne peut jamais être ni juste ni légitime d'attenter à ces droits, à moins d'avoir une forte assurance * que l'exercice qu'en feroient ceux à qui on les enlève, leur seroit nuisible à eux-mêmes. Enfin dans le troisième cas, on peut balancer entre la crainte de retarder des changemens utiles si on exige une trop forte pluralité, & celle de prendre un mauvais parti si on se contente d'une pluralité trop foible. Nous avons supposé ici qu'il pouvoit être regardé comme utile, dans certains cas, de restreindre

* Nous nous servons du mot *assurance* dans la suite de ce Discours, pour désigner cette espèce de probabilité, qu'on appelle, dans les écoles, *certitude morale*, afin d'éviter le mot de *certitude* qui pourroit être équivoque.

l'exercice des droits naturels, ou d'en continuer la suspension déjà prononcée; mais c'est seulement comme une hypothèse propre à donner un exemple, & non que nous admettions cette opinion, sur-tout pour une législation permanente.

En général, puisqu'il s'agit, dans une loi qui n'a pas été votée unanimement, de soumettre des hommes à une opinion qui n'est pas la leur, ou à une décision qu'ils croient contraire à leur intérêt; une très-grande probabilité de cette décision, est le seul motif raisonnable & juste d'après lequel on puisse exiger d'eux une pareille soumission.

Si l'on considère un Tribunal chargé de rendre des jugemens en matière criminelle; on sent au premier coup-d'œil, qu'il ne peut être permis d'accorder l'appui de la force publique à ces jugemens, lorsqu'ils condamnent un accusé, s'il ne résulte pas de la forme du Tribunal une extrême assurance que l'accusé est coupable, si cette assurance n'existe pas même pour ceux qui ne connoissent du jugement que la constitution du Tribunal seulement, ou que cette constitution avec la pluralité à laquelle le jugement a été rendu: l'obligation imposée à tout homme de défendre le malheureux opprimé, cette obligation de laquelle résulte un véritable droit de la remplir, ne peut céder qu'à l'assurance que cette oppression apparente est une justice réelle.

Jugement
d'un accusé.

Cette pluralité, plus grande que celle d'une voix, pourroit même être exigée pour les jugemens en matière civile, dans les cas, par exemple, où l'on admet la prescription. En effet, le motif de rendre les possesseurs plus tranquilles, quelque utile que cette sécurité soit au bien public, ne suffiroit pas pour rendre légitime une atteinte au droit de propriété.

Prescription.

Ainsi la prescription n'est rigoureusement juste que dans

la supposition qu'au bout d'un certain nombre d'années la probabilité que le possesseur actuel n'est plus en état de produire les titres originaux de la propriété, l'emporte sur la probabilité que le vrai propriétaire ait négligé si long-temps de faire valoir ses droits. La longue possession forme, en faveur de celui qui en a joui, une forte présomption que la possession est légitime; elle forme un droit tant qu'il n'existe pas un droit contraire bien prouvé; mais par-tout où il existe une propriété légale, il seroit injuste d'attribuer plus de force à la possession.

Cependant la longue possession ne doit être attaquée que lorsqu'il existe une très-grande probabilité qu'elle est illégitime. On pourroit donc, au lieu d'établir une prescription absolue de trente ans, par exemple, fixer à cette prescription absolue un terme bien plus éloigné; mais statuer que le jugement qui condamneroit celui qui a une prescription moindre, celle de trente ans par exemple, ne seroit exécuté que dans le cas où il auroit la pluralité d'un certain nombre de voix: autrement le bien resteroit au possesseur, quand même il auroit une pluralité moindre contre lui.

Cette législation auroit un grand avantage, celui de pouvoir exiger une pluralité plus ou moins grande, suivant différentes durées de possession, & c'est peut-être le seul moyen de concilier la sécurité des possesseurs avec la sûreté des propriétés.

De ce qu'il faut considérer dans l'examen de la probabilité des décisions.

Il y a quatre points essentiels à considérer relativement à la probabilité des décisions.

1.° La probabilité qu'une assemblée ne rendra pas une décision fautive.

2.° La probabilité qu'elle rendra une décision vraie.

3.° La probabilité qu'elle rendra une décision vraie ou fautive.

4.^o La probabilité de la décision, lorsqu'on la suppose rendue, ou lorsque l'on suppose de plus que l'on connoît la pluralité à laquelle elle a été formée.

En effet, il est aisé de voir, 1.^o qu'une forme de décision est dangereuse, s'il n'est pas très-probable pour chaque votation qu'il n'en résultera pas une décision fausse,

2.^o Que l'on doit chercher une forme qui puisse donner une grande probabilité d'avoir une décision vraie, autrement l'avantage de ne pas craindre une décision fausse, naîtroit uniquement de ce qu'il seroit très-probable de n'en avoir aucune; inconvénient très-grand, puisque, suivant le genre d'objets sur lesquels on décide, il empêche en grande partie l'assemblée qui prononce, de remplir les vues pour lesquelles elle a été instituée.

Le troisième point dépend des deux premiers. En effet, si l'on a une grande probabilité d'avoir une décision vraie, & en même temps une très-grande probabilité de n'avoir pas une décision fausse, il est clair que celle d'avoir une décision fausse ou vraie, approche de la première, & la surpasse.

La quatrième condition exige plus de discussion. Il est nécessaire d'abord d'avoir une grande probabilité que la décision est conforme à la vérité lorsqu'on fait qu'il existe une décision. Cette condition dépend encore des deux premières; car si la probabilité d'avoir une décision vraie est grande, & le risque d'en avoir une fausse fort petit, il est clair que dès que l'on fait qu'il existe une décision, il devient très-probable que cette décision est conforme à la vérité. Il ne faut pas confondre la probabilité d'avoir une décision vraie avec la probabilité qu'une décision qu'on suppose rendue, est conforme à la vérité: la première est contraire, non-seulement à la

Nécessité d'avoir une assurance suffisante de la vérité de la décision, même lorsqu'on la fait rendre à la moindre pluralité possible.

probabilité d'avoir une décision fautive, mais à celle de n'avoir aucune décision: la seconde n'est contraire qu'à celle d'avoir une décision fautive. Pour la première, il faut comparer le nombre des cas où la décision est vraie au nombre de tous les cas possibles: pour la seconde, il faut comparer ce premier nombre, seulement au nombre total des cas où il y a une décision. La première est, par exemple, la probabilité qu'un accusé coupable sera condamné; la seconde est la probabilité qu'un accusé condamné est coupable. Mais on doit exiger de plus une autre condition, & il faut que si l'on fait qu'il y a une décision, & qu'on connoisse à quelle pluralité elle a été rendue, on ait une probabilité suffisante de la vérité de cette décision. Nous en avons dit ci-dessus la raison. Cette assurance est nécessaire, par exemple, toutes les fois qu'il est question de punir un accusé; autrement il arriveroit qu'un homme condamné par une pluralité qui ne donneroit pas cette assurance, seroit puni lorsqu'il est très-peu probable que cet homme est coupable. Ainsi dans tous les cas où nous avons vu qu'il seroit convenable de fixer une pluralité au-dessous de laquelle on doit suivre le vœu de la minorité, ou regarder l'affaire comme indécise, il faut que cette moindre pluralité soit telle qu'il en résulte la probabilité qu'on a cru devoir exiger dans la décision.

Il ne suffiroit pas qu'il fût très-probable que le cas où la pluralité est trop petite pour donner l'assurance demandée, ne se présentera pas, & cela par deux raisons; la première, parce que si cet événement, très-improbable, arrivoit, ce qui est toujours possible, on seroit obligé de se conduire d'après une décision peu probable, & que l'on connoitroit comme telle. On est sans doute exposé dans tous les systèmes

de pluralité à adopter une décision fautive, mais c'est lorsqu'il y a une grande probabilité qu'elle est vraie; au lieu qu'il ne peut y avoir aucun motif raisonnable de se soumettre à une décision, lorsque pour s'y soumettre il faudroit avoir une véritable assurance de la vérité de cette décision, & qu'on en a au contraire une très-petite probabilité. La seconde raison, est que cet inconvénient ne naît point de la nature des choses, mais de la forme que l'on a choisie. Ainsi, par exemple, il n'est pas injuste de punir un homme, quoiqu'il soit possible que ses Juges se soient trompés en le déclarant coupable, & il le seroit de le punir lorsqu'il n'a contre lui qu'une pluralité qui ne donne pas une assurance suffisante de son crime.

Dans le premier cas, on n'est pas injuste en jugeant d'après une probabilité qui expose encore à l'erreur, parce qu'il est de notre nature de ne pouvoir juger que sur de semblables probabilités: dans le second on le seroit, parce qu'on se seroit exposé volontairement à punir un homme sans avoir l'assurance de son crime. Dans le premier cas on a, en punissant, une très-grande probabilité de la justice de chaque acte en particulier: dans le second, on fait que dans cet acte particulier on commet une injustice.

Ces principes une fois établis, il s'agit d'appliquer le calcul aux différentes formes de décisions, aux différentes hypo-

Plan
de l'Ouvrage

thèses de pluralité. Pour cela, nous supposerons d'abord les assemblées composées de Votans ayant une égale justesse d'esprit & des lumières égales: nous supposerons qu'aucun des Votans n'a d'influence sur les voix des autres, & que tous opinent de bonne foi. Supposant ensuite que l'on connoît la probabilité

que la voix de chaque Votant sera conforme à la vérité, la forme de la décision, l'hypothèse de pluralité & le nombre des Votans, on cherche, 1.^o la probabilité de ne pas avoir une décision contraire à la vérité; 2.^o la probabilité d'avoir une décision vraie; 3.^o la probabilité d'avoir une décision vraie ou fausse; 4.^o celle qu'une décision qu'on fait avoir été rendue sera plutôt vraie que fausse; & enfin la probabilité de la décision rendue à une pluralité connue. Tel est l'objet de la première Partie.

Dans la seconde au contraire, on suppose l'un de ces élémens connus, & l'on cherche l'une de ces trois choses, ou l'hypothèse de pluralité, ou le nombre des Votans, ou la probabilité de la voix de chaque Votant, en regardant les deux autres comme données.

On a supposé connue jusqu'ici, tantôt la probabilité de la voix de chaque Votant, tantôt celle de la décision prise sous différentes faces. Nous avons dit de plus que l'on devoit chercher l'assurance, 1.^o de ne pas avoir une décision contraire à la vérité, 2.^o d'avoir, lorsque l'on fait que la décision est portée, une décision plutôt vraie que fausse, & qu'il falloit également avoir une grande probabilité d'avoir une décision vraie; enfin que dans un grand nombre de circonstances il falloit avoir une assurance suffisante de la vérité de la décision, lors même que, connoissant à quelle pluralité la décision a été rendue, on fait que cette pluralité est la moindre qu'il est possible.

Or, comment connoître la probabilité de la voix de chaque Votant, ou celle de la décision d'un Tribunal, comment déterminer la probabilité qu'on peut regarder comme une véritable assurance, ou celle qu'on peut, dans d'autres cas,

regarder comme suffisante. Tel est l'objet de la troisième Partie.

J'examine dans la quatrième les changemens que peuvent apporter dans les résultats trouvés dans la première Partie, l'inégalité de lumières ou de justesse d'esprit des Votans, la supposition que la probabilité de leurs voix n'est pas constante, l'influence qu'un d'eux peut avoir sur les autres, la mauvaise foi de quelques-uns, l'usage de réduire à une seule les voix de plusieurs Juges lorsqu'ils sont d'accord, enfin la diminution de probabilité que doit éprouver la voix des Votans, lorsqu'un Tribunal, dont la première décision n'a pas été rendue à la pluralité exigée, vote de nouveau sur la même question, & finit par la décider avec cette pluralité.

Ces dernières recherches étoient nécessaires pour pouvoir appliquer la théorie à la pratique.

La cinquième Partie enfin contiendra l'application des principes exposés dans les premières à quelques exemples, tels que l'établissement d'une loi, une élection, le jugement d'un accusé, une décision qui prononce sur la propriété.

Analyse de la première Partie.

JE considère d'abord le cas le plus simple, celui où le nombre des Votans étant impair, on prononce simplement à la pluralité.

Première hypothèse.

On suppose la décision rendue à la simple pluralité.

Dans ce cas, la probabilité de ne pas avoir une décision fautive, celle d'avoir une décision vraie, celle que la décision rendue est conforme à la vérité, sont les mêmes, puisqu'il ne peut y avoir de cas où il n'y ait pas de décision.

On trouve de plus, que si la probabilité de la voix de chaque Votant est plus grande que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, s'il est

Conséquences du calcul.

plus probable qu'il jugera conformément à la vérité, plus le nombre des Votans augmentera, plus la probabilité de la vérité de la décision sera grande: la limite de cette probabilité sera la certitude; en sorte qu'en multipliant le nombre des Votans, on aura une probabilité aussi grande qu'on voudra d'avoir une décision vraie; & c'est-là ce que nous entendrons toutes les fois que nous dirons que la limite de la probabilité est 1, ou la certitude.

Si au contraire la probabilité du jugement de chaque Votant est au-dessous de $\frac{1}{2}$, c'est à-dire, s'il est plus probable qu'il se trompera, alors plus le nombre des Votans augmentera, plus la probabilité de la vérité de la décision diminuera; la limite de cette probabilité sera zéro, c'est-à-dire, qu'on pourra, en multipliant le nombre des Votans, avoir une probabilité aussi petite qu'on voudra de la vérité de la décision, ou une probabilité aussi grande qu'on voudra que cette décision sera erronée.

Si la probabilité de la vérité de chaque voix est $\frac{1}{2}$, alors, quel que soit le nombre des Votans, celle de la vérité de la décision sera aussi $\frac{1}{2}$.

Application
de ces consé-
quences aux
assemblées po-
pulaires.

Cette conclusion conduit d'abord à une remarque assez importante. Une assemblée très-nombreuse ne peut pas être composée d'hommes très-éclairés; il est même vraisemblable que ceux qui la forment joindront sur bien des objets beaucoup d'ignorance à beaucoup de préjugés. Il y aura donc un grand nombre de questions sur lesquelles la probabilité de la vérité de la voix de chaque Votant sera au-dessous de $\frac{1}{2}$; alors plus l'assemblée sera nombreuse, plus elle sera exposée à rendre des décisions fausses.

Or, comme ces préjugés, cette ignorance, peuvent exister
sur

sur des objets très-importans, on voit qu'il peut être dangereux de donner une constitution démocratique à un peuple sans lumières : une démocratie pure ne pourroit même convenir qu'à un peuple beaucoup plus éclairé, beaucoup plus exempt de préjugés qu'aucun de ceux que nous connoissons par l'Histoire.

Pour toute autre Nation cette forme d'assemblées devient nuisible, à moins qu'elles ne bornent l'exercice de leur pouvoir à la décision de ce qui intéresse immédiatement le maintien de la sûreté, de la liberté, de la propriété; objets sur lesquels un intérêt personnel direct peut suffisamment éclairer tous les esprits.

On sent par la même raison combien, plus les assemblées sont nombreuses, plus les réformes utiles dans les principes d'administration, de législation, deviennent peu probables, & combien la longue durée des préjugés & des abus est à redouter.

Les assemblées très-nombreuses ne peuvent exercer le pouvoir avec avantage que dans le premier état des sociétés, où une ignorance égale rend tous les hommes à peu - près également éclairés. On ne peut pas espérer d'avoir une grande probabilité d'obtenir des décisions conformes à la vérité, & par conséquent on n'a aucun motif légitime pour restreindre le nombre des Votans, & soumettre par-là le plus grand nombre à la volonté du plus petit; au lieu que dans le cas où l'on peut former une assemblée, telle qu'il y ait une très-grande probabilité que les décisions seront vraies, il y a un motif juste pour les hommes moins éclairés que les Membres, de soumettre leurs volontés aux décisions de cette assemblée.

Des assemblées nombreuses conviendroient encore à un pays où, par le progrès des lumières, il y auroit une grande

égalité entre les esprits, quant à la justesse de leurs jugemens & à la vérité des principes d'après lesquels ils régleroient leur conduite, & c'est le seul cas où l'on puisse attendre d'assemblées très-nombreuses, ou de sages loix, ou la réforme des mauvaises loix.

Deuxième & troisième hypothèses. Le nombre des Votans étant supposé impair ou pair, en exige une pluralité constante.

Dans la seconde & dans la troisième hypothèse, on suppose que la décision n'est regardée comme juste qu'autant que la pluralité est égale, ou supérieure à un nombre qui a été fixé: si le nombre des Votans est impair, la pluralité, qui est la différence du nombre des Votans pour chaque avis, est nécessairement un nombre impair; elle est au contraire toujours un nombre pair si le nombre des Votans est pair.

Quatrième, cinquième & sixième hypothèses. On suppose la pluralité proportionnelle

Dans la quatrième, dans la cinquième & dans la sixième hypothèse, on suppose la pluralité proportionnelle au nombre des Votans simplement, ou au nombre des Votans, plus un nombre fixe.

Par exemple, on peut exiger la pluralité d'un tiers, c'est-à-dire, de 4 pour 12 ou 14 Votans; de 5 pour 13, 15 ou 17, & ainsi de suite; ou bien la pluralité d'un tiers plus trois, c'est-à-dire, pour 13 voix une pluralité de 7; pour 16 une pluralité de 8; pour 19 une pluralité de 9; ou enfin d'un tiers plus deux, c'est-à-dire, de 6 voix pour 12 & 14; de 7 pour 15 & 17; de 8 pour 18 & 20, & ainsi de suite.

Conséquences du calcul.

Pour la probabilité de ne pas avoir une décision fautive.

Si dans toutes ces hypothèses, on cherche la probabilité de ne point avoir une décision fautive, on trouve, 1.^o que si la probabilité de la voix de chaque Votant est plus grande que $\frac{1}{2}$ lorsque la pluralité est un nombre constant, plus grande que $\frac{1}{3}$ lorsque la pluralité est d'un tiers plus un nombre constant; plus grande que $\frac{2}{5}$ lorsque la pluralité est d'un quart

plus un nombre constant; plus grande que $\frac{2}{3}$ lorsque la pluralité est d'un cinquième, & ainsi de suite; on aura une probabilité de n'avoir pas une décision fautive, qui augmentera avec le nombre des Votans, & dont la limite fera 1 : en sorte qu'on peut, en multipliant le nombre des Votans, avoir cette probabilité aussi grande qu'on voudra.

Mais cette augmentation de probabilité n'a lieu souvent qu'après un certain nombre de termes. Après le premier terme, qui répond au plus petit nombre de Votans qu'on peut supposer dans l'hypothèse pour que la pluralité exigée soit possible, la probabilité de la décision peut diminuer pendant quelque temps lorsque le nombre des Votans augmente; mais il arrive un point où elle croît avec ce nombre, & depuis lequel elle continue constamment de croître en s'approchant de la limite 1. Il faut observer encore que cette diminution dans la probabilité de la décision, n'a pas lieu pour toutes les valeurs de la probabilité de chaque voix; mais seulement lorsque cette probabilité est au-dessous de certaines limites. Par exemple, si la pluralité est constante, & de cinq voix, il n'y aura point de diminution dans la probabilité de la décision, à moins que la probabilité de chaque voix ne soit au-dessous de $\frac{1}{5}$. Enfin il faut remarquer que cette diminution n'empêche point que pour chaque valeur du nombre des Votans, la probabilité de la décision ne soit toujours plus grande que pour un nombre égal & une moindre pluralité.

Si la probabilité de chaque voix est exactement égale aux limites que nous avons assignées ci-dessus; par exemple, si elle est $\frac{1}{2}$ dans le cas de la pluralité constante, $\frac{1}{3}$ lorsque la pluralité est d'un tiers, &c. alors la probabilité de ne pas

d ij

avoir une décision fautive, approchera d'autant plus de $\frac{1}{2}$ que le nombre des Votans sera plus grand, & restera toujours au-dessus de cette limite.

Si la probabilité de chaque voix est au-dessous des limites que nous avons assignées, celle de la décision diminuera continuellement, & la limite sera zéro.

Pour la probabilité d'avoir une décision vraie.

Si l'on considère ensuite la probabilité d'avoir une décision vraie, alors on trouvera, 1.^o que, pourvu que la probabilité de chaque voix soit plus grande que $\frac{1}{2}$ si la pluralité est constante, plus grande que $\frac{2}{3}$ si la pluralité est d'un tiers plus un nombre constant, plus grande que $\frac{3}{4}$ si la pluralité est d'un quart plus un nombre constant, & ainsi de suite, plus on augmentera le nombre des Votans, plus la probabilité de la décision augmentera; elle aura l'unité pour limite, & l'on pourra par conséquent avoir, en multipliant le nombre des Votans, une probabilité aussi grande qu'on voudra d'obtenir une décision vraie.

Mais il est possible, dans le cas où la pluralité est purement proportionnelle, que la probabilité de la décision diminue dans les premiers termes pour augmenter ensuite, & cette diminution a lieu seulement lorsque la probabilité de chaque voix est au-dessous d'une certaine limite.

Si la valeur de la probabilité de chaque voix est égale à $\frac{1}{2}$ pour une pluralité constante, à $\frac{2}{3}$ pour une pluralité d'un tiers plus une pluralité constante, & ainsi de suite, plus on augmentera le nombre des Votans, plus la probabilité de la décision approchera de $\frac{1}{2}$, qui en est alors la limite.

Cette probabilité approchera continuellement de sa limite en augmentant, excepté dans le cas de la pluralité proportionnelle, où il peut arriver qu'elle diminue pendant les

premiers termes, quoique le nombre des Votans augmente, pour croître ensuite avec ce nombre.

Si la valeur de la probabilité de chaque voix est au-dessous de $\frac{1}{2}$ lorsque la pluralité est constante, au-dessous de $\frac{2}{3}$ lorsqu'elle est d'un tiers plus un nombre constant, de $\frac{5}{8}$ lorsqu'elle est d'un quart plus un nombre constant, &c. la probabilité d'avoir une décision vraie diminue lorsque le nombre des Votans augmente; mais cette diminution peut ne commencer qu'après un certain nombre de termes, pendant lesquels la probabilité d'avoir une décision vraie croît avec le nombre des Votans, pour diminuer ensuite avec ce nombre. La limite de cette probabilité est ici zéro.

Si on cherche la probabilité d'avoir une décision vraie ou fautive, il suit de ce qui précède que la limite de cette probabilité sera toujours l'unité dans le cas de la pluralité constante; que si la pluralité est d'un tiers plus un nombre constant, la limite de la probabilité d'avoir une décision sera 1, si la probabilité de chaque voix est plus grande que $\frac{2}{3}$, ou plus petite qu'un tiers; que la limite sera $\frac{1}{2}$ si la probabilité de chaque voix est $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{3}$, & zéro si cette probabilité est entre ces deux nombres. De même si la pluralité est d'un quart, la limite de la probabilité d'avoir une décision sera zéro, $\frac{1}{2}$ ou 1, suivant que la probabilité de chaque voix sera ou entre $\frac{5}{8}$ & $\frac{3}{8}$, ou égale à un de ces nombres, ou hors de ces limites; & ainsi de suite.

La probabilité que la décision qu'on fait être rendue est en faveur de la vérité, pourra approcher continuellement de 1, si la probabilité de chaque voix est plus grande qu'un $\frac{1}{2}$ dans le cas de la pluralité constante, plus grande ou égale à $\frac{2}{3}$ dans le cas de la pluralité d'un tiers, plus grande ou égale à $\frac{5}{8}$ dans le cas de la pluralité d'un quart.

Pour la probabilité d'avoir une décision en général.

Pour la probabilité d'une décision qu'on fait être rendue,

Mais si la probabilité de chaque voix est $\frac{1}{2}$ dans le cas de la pluralité constante, celle d'avoir une décision plutôt vraie que fausse, fera toujours $\frac{1}{2}$; & dans le cas de la pluralité d'un tiers ou d'un quart si la probabilité de chaque voix est entre $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$, entre $\frac{5}{8}$ & $\frac{3}{8}$, celle d'avoir une décision vraie plutôt que fausse, approchera de plus en plus de $\frac{1}{2}$ à mesure que le nombre des Votans augmentera. Enfin l'on voit qu'elle approchera continuellement de zéro, dans les cas contraires à ceux où elle approche continuellement de 1, c'est-à-dire, lorsqu'elle est au-dessous de $\frac{1}{2}$, au-dessous ou égale à $\frac{1}{3}$, au-dessous ou égale à $\frac{3}{8}$ dans les hypothèses de la pluralité constante ou d'un tiers ou d'un quart, &c.

Quant à la probabilité de la vérité de la décision, lorsqu'on connoît à quelle pluralité elle a été rendue, on trouvera qu'elle est plus grande que $\frac{1}{2}$, tant que la probabilité de chaque voix est aussi au-dessus de $\frac{1}{2}$, & au-dessous dans le cas contraire; si la probabilité de chaque voix est au-dessus d'un demi, la probabilité la plus petite qu'on puisse avoir en faveur de la décision rendue, est celle qui a lieu lorsque la pluralité est précisément celle que la loi exige comme nécessaire pour former une décision.

Nous avons vu ci-dessus que lorsque la décision prononce ou la punition d'un accusé, ou la spoliation du possesseur d'un bien, qu'il en résulte un nouveau joug imposé aux citoyens, une atteinte à l'exercice légitime de la liberté, il est essentiel que dans le cas même, où la décision est rendue à la moindre pluralité possible, on ait une très-grande probabilité, une véritable assurance de la vérité de la décision.

Si la pluralité est constante, cette valeur de la moindre probabilité reste la même, quel que soit le nombre des Votans,

Si la pluralité n'est pas constante, mais proportionnelle, cette valeur de la moindre probabilité augmente avec le nombre des Votans.

Enfin on voit que la nécessité que cette moindre valeur donne une assurance de la vérité de la décision, oblige à ne pas se contenter de la pluralité proportionnelle, ou à fixer pour le plus petit nombre de Votans qui puisse former une assemblée légitime, un nombre assez grand pour que la décision à la plus petite pluralité ait le degré de probabilité qu'on exige.

Cette théorie peut déjà conduire à des observations utiles. Applications
de ces consé-
quences.
En effet, on voit d'abord que, pourvu que l'on ait une probabilité de chaque voix plus grande que $\frac{1}{2}$, on peut, dans le cas d'une pluralité constante, obtenir à la fois les cinq conditions principales que doit avoir une décision. Mais on peut observer, 1.^o que dans ce même cas, si la probabilité de chaque voix ne surpasse point beaucoup $\frac{1}{2}$, il faudra exiger une grande pluralité pour que la probabilité de la décision, rendue à la moindre pluralité, soit suffisante.

2.^o Que dès-lors il faudra un grand nombre de Votans pour se procurer l'assurance de ne pas avoir une décision fautive, & un nombre beaucoup plus grand pour avoir la probabilité d'obtenir une décision vraie; autrement l'avantage de ne pas craindre une décision fautive ne seroit dû qu'à la très-grande probabilité de ne pas avoir de décision; en sorte qu'on ne pourroit remplir les conditions exigées, à moins de multiplier le nombre des Votans, souvent fort au-dessus des limites dans lesquelles on est obligé de se renfermer.

Si l'on exige une pluralité proportionnelle, alors il suffira, pour n'avoir pas à craindre une décision fautive, que dans les

exemples choisis ci-dessus, la pluralité de chaque voix ne soit pas fort au-dessous d'un tiers, de $\frac{3}{8}$, de $\frac{2}{5}$.

Mais on n'obtiendra la probabilité d'en avoir une vraie que si cette même probabilité de chaque voix est au-dessus de $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{5}$, &c. & si elle n'est que très-peu au-dessus de ces limites, on ne pourra encore réunir ces deux conditions qu'en fixant à un très-grand nombre la quantité de Votans nécessaires pour rendre légitimement une décision.

On ne peut donc se flatter de réunir toutes les conditions exigées que lorsque la probabilité de chaque voix sera sensiblement au-dessus de ces limites; & plus elle sera grande, plus ces conditions seront faciles à remplir avec un moindre nombre de Votans.

Il peut être avantageux, dans quelques circonstances, d'établir une pluralité proportionnelle: par exemple, si on l'établit telle que sur un nombre donné de voix il faille la pluralité de $\frac{2}{5}$ du total, c'est-à-dire, de soixante voix pour une assemblée de cent Votans, ou de quatre-vingts contre vingt; alors si le nombre des Votans est considérable, on peut avoir une très-grande probabilité qu'il n'y aura pas de décision fautive, pourvu que la probabilité de chaque voix soit au-dessus d'un cinquième. Ainsi, par exemple, cette espèce de pluralité peut être exigée dans une assemblée populaire très-nombreuse, formée d'hommes peu éclairés, ayant quelquefois à décider des questions importantes sur lesquelles il peut être vraisemblable qu'ils se tromperont.

Par ce moyen on n'auroit pas à craindre d'erreurs funestes, & l'on seroit seulement exposé à se priver de changemens utiles.

On peut observer que dans le cas de la pluralité proportionnelle,

tionnelle , celle qui est exigée pour former une décision , augmente avec le nombre des Votans ; d'où il paroît résulter qu'on sacrifie l'espérance d'obtenir une décision à l'avantage inutile d'avoir une plus grande probabilité dans le cas de la moindre pluralité. Cet avantage peut en effet être regardé comme inutile dans la théorie abstraite , puisque la pluralité qui a lieu pour le moindre nombre de Votans , doit être suffisante & donner une véritable assurance que la décision est conforme à la vérité. Mais ce même avantage n'est pas illusoire dans la pratique : en effet , on n'y peut point regarder la probabilité de chaque voix comme rigoureusement constante. Or , si on suppose cette probabilité variable , il y aura lieu de croire que si dans un grand nombre de Votans on a une certaine pluralité , la probabilité de chaque voix sera plus petite que si dans un moindre nombre on avoit eu la même pluralité : d'ailleurs plus il y a de Votans , moins on doit les supposer éclairés (*voyez la quatrième & la cinquième Partie*) , & par conséquent on peut avoir des motifs bien fondés de faire croître la pluralité exigée en même temps que le nombre des voix.

La septième hypothèse est celle où l'on renvoie la décision à un autre temps , si la pluralité exigée n'a pas lieu.

Septième hypothèse.

On a ici trois cas à considérer , celui de la pluralité en faveur de la vérité , celui de la pluralité en faveur de l'erreur , & celui de la non-décision ; & nous avons vu ci-dessus comment dans les différentes hypothèses de pluralité on détermine les limites de ces trois valeurs.

La décision est remise lorsque la pluralité exigée n'a pas lieu.

Dans la huitième hypothèse , on suppose que si l'assemblée n'a pas rendu sa première décision à la pluralité exigée , on prend une seconde fois les avis , & ainsi de suite , jusqu'à ce que l'on obtienne cette pluralité. On trouve dans cette hypothèse

Huitième hypothèse. On convient de prendre les voix de la même assemblée jusqu'à ce qu'on ait obtenu la pluralité exigée.

e

Conséquences
qui résultent
du calcul.

Elles ne sont
pas applicables
à la pratique.

que, quel que soit le nombre des Votans & la pluralité exigée, la probabilité d'avoir une décision augmente continuellement, & que sa limite est l'unité; de manière que si l'on est convenu de reprendre continuellement les avis, on a une probabilité aussi grande qu'on voudra d'obtenir enfin une décision. La probabilité que cette décision sera vraie, ou si on la suppose déjà rendue, & qu'on connoisse la pluralité, la probabilité qu'elle est conforme à la vérité, sont absolument les mêmes que si on avoit obtenu la même décision la première fois que l'on a demandé les avis. Cette conclusion paroît absurde; aussi ne seroit-elle pas légitime dans la pratique. Mais si on considère les objets dans un sens abstrait, on voit que, supposant que la probabilité de la voix de chaque Votant soit restée la même, on doit considérer la probabilité de la décision comme si l'on n'avoit demandé les avis qu'une seule fois. Le cas où l'on sauroit que l'on a eu sur 25 Votans une pluralité de 15, & où l'on demanderoit la probabilité de la vérité de la décision, est absolument le même que celui où sachant qu'il y a dans un sac un certain nombre de boules noires & un certain nombre de boules blanches, la proportion de ces nombres étant connue, & sachant de plus qu'on a tiré vingt boules d'une couleur & cinq boules d'une autre, on demanderoit quelle est la probabilité que celles qui ont été tirées au nombre de vingt sont blanches ou noires. Si l'on suppose que l'on a eu en tirant d'autres fois des boules du même sac une proportion différente entre le nombre des boules de chaque couleur, on auroit à chaque tirage des probabilités différentes que celles qui sont venues en tels nombres, sont blanches ou noires, mais cela n'altère en rien la probabilité qui naît du dernier tirage, tant que la proportion du nombre

des boules de chaque couleur, déposées dans le sac, demeurera la même.

La seule différence qu'il y ait entre la conclusion du calcul abstrait & celle qu'on doit trouver dans la réalité, ne peut venir que de la différence de la probabilité de chaque voix qui n'est pas constante pour les mêmes hommes, & qui doit être plus grande lorsqu'ils se réunissent à former une décision à une pluralité donnée la première fois qu'ils donnent leur avis, que lorsqu'ils ne peuvent se réunir avec cette pluralité qu'après plusieurs décisions successives, & par conséquent, après qu'un certain nombre d'entr'eux a été obligé de changer d'avis.

L'examen de cette question doit donc être renvoyé à la quatrième Partie.

La neuvième hypothèse a pour objet les décisions formées par différens systèmes de Tribunaux combinés.

Neuvième hypothèse.
Décisions formées par un système de Tribunaux combinés.
Conséquences du calcul.

On peut d'abord regarder comme fini & déterminé le nombre de ces Tribunaux, & demander, pour que la décision soit censée rendue, ou l'unanimité entre ces Tribunaux, ou une certaine pluralité.

Dans le premier cas, on peut remplir les mêmes conditions qu'avec un seul Tribunal, mais cependant avec quelque désavantage, puisque si l'on obtient, en employant un nombre égal de Votans, l'avantage d'avoir moins à craindre une décision fautive, & plus de probabilité qu'une décision rendue sera vraie, ce n'est qu'en diminuant la probabilité d'avoir une décision; ce qu'on auroit obtenu également d'une manière plus simple avec un seul Tribunal.

On peut dans ce cas, ne regarder l'unanimité comme rompue, que par une décision contraire à la première, &

rendue avec la pluralité exigée, mais non par les décisions où cette pluralité ne se trouve pas. Il se présente alors une difficulté qui n'a pas lieu dans un seul Tribunal ; c'est qu'en supposant que l'on connoisse le nombre des décisions & la pluralité de chacune, on peut avoir la somme des pluralités obtenues contre l'opinion qui l'emporte, plus grande que celle des pluralités conformes à cet avis. Par exemple, supposons sept Tribunaux, qu'il faille l'unanimité de ceux qui décident réellement pour condamner un accusé, & qu'on exige une pluralité de cinq voix dans chaque Tribunal ; si quatre Tribunaux déclarent l'accusé innocent à la pluralité de quatre voix, pluralité qui ne donne aucune décision, & que trois le déclarent coupable à la pluralité de cinq voix, qui suffit pour former une décision, il est évident qu'il sera condamné, ayant d'un côté une pluralité de seize voix en faveur de son innocence, de l'autre une pluralité seulement de quinze voix contre lui.

Une telle forme seroit nécessairement injuste ; ainsi il faudroit y mettre une nouvelle condition, comme, par exemple, que l'unanimité des décisions particulières ne formeroit une décision définitive que lorsque le nombre de ces décisions sera plus grand de tant d'unités que la moitié du nombre total des Tribunaux. Ainsi dans l'exemple proposé, si on exige qu'au moins quatre Tribunaux soient d'avis de condamner ; le cas le plus défavorable seroit celui où l'accusé seroit condamné, ayant d'un côté contre lui une pluralité de vingt voix, & pour lui une pluralité de douze, ce qui est équivalent à une pluralité de huit voix.

Si on se borne à exiger une certaine pluralité entre les décisions des Tribunaux, soit qu'on rejette les décisions

rendues à la pluralité inférieure , soit qu'on les admette comme rendues pour l'avis le plus favorable , on se trouve également exposé à adopter définitivement un avis qui auroit réellement la minorité : à la vérité on peut toujours prendre la pluralité exigée dans chaque Tribunal , le nombre des Tribunaux , la pluralité exigée entre leurs décisions , de manière que l'on ne soit pas exposé à cet inconvénient ; mais on sent qu'on ne peut y remédier qu'en diminuant beaucoup la probabilité d'avoir une décision.

On peut supposer le nombre des décisions indéfini , c'est-à-dire , prendre continuellement l'avis de différentes assemblées , 1.^o jusqu'à ce que l'on ait ou un nombre donné de décisions uniformes , en regardant comme nulles celles qui n'ont pas la pluralité exigée , & il est aisé de sentir que dans ce cas la décision finale peut être rendue avec une minorité indéfinie , en sorte que la limite de la probabilité de cette décision est zéro. Par exemple , soit 5 la pluralité exigée , & 8 le nombre des décisions conformes qu'on exige , la décision totale peut être produite par une pluralité de 8 fois 5 voix , ou 40 voix seulement ; mais on peut avoir un nombre indéfini de décisions contraires , regardées comme nulles à la pluralité de 4 voix , ce qui donne une pluralité indéfinie contre la décision finale. Il n'y a d'autre remède ici que de rejeter seulement comme nulles les décisions rendues pour l'opinion regardée comme défavorable avec une pluralité au-dessous de la pluralité exigée , & compter pour contradictoires aux premières les décisions rendues avec la plus petite pluralité en faveur de l'opinion favorable. Mais ce moyen auroit un autre inconvénient , celui de faire rejeter l'opinion défavorable , quoiqu'elle l'emportât sur l'autre d'une pluralité indéfinie ; ainsi l'on n'obtiendrait réellement la

probabilité de ne pas faire une injustice, une chose nuisible, qu'en s'exposant à ne pas rendre justice, à ne pas faire de bien, même lorsqu'on a l'assurance la plus grande de ne pas être trompé.

2.° On peut continuer de prendre les voix jusqu'à ce que l'on ait obtenu une certaine pluralité de décisions : si cette pluralité est fixe, comme on peut avoir un nombre indéfini de jugemens contradictoires, & que ceux qui finissent par avoir la pluralité, peuvent être rendus à une moindre majorité que les autres, on sera encore ici exposé à regarder comme légitime une décision rendue à une minorité indéfinie.

Si on demande une pluralité proportionnelle au nombre total de la suite des décisions, alors on pourra s'assurer de ne jamais avoir une décision réellement contraire à l'avis de la pluralité ; mais pour cela, si la pluralité est d'un tiers, il faudra que la majorité exigée dans chaque décision, soit au moins de moitié du nombre des Votans ; si la pluralité est d'un quart, il faut que la majorité soit au moins des trois cinquièmes.

Si enfin on suppose que l'on exige un nombre fixe de décisions consécutives, on pourra non-seulement avoir pour décision finale un jugement rendu à une minorité de voix indéfinie, mais aussi à une minorité également indéfinie de jugemens. Par exemple, si on demande trois décisions conformes, on peut avoir deux décisions *A*, une décision *N*, deux décisions *A*, une décision *N*, deux décisions *A* & trois *N*, & par conséquent la décision *N* l'emporterait, quoiqu'il y ait eu six décisions *A*, & seulement cinq décisions *N*. Supposons que chaque décision ait été rendue par sept Juges, & qu'on exige une pluralité de trois voix, que *N* ait eu cinq fois cette pluralité, & *A* six fois l'unanimité, la décision sera rendue à la minorité de 15 voix contre 42.

Il faut observer que dans toutes ces hypothèses, on peut du moins, en multipliant le nombre des Votans, & lorsque la probabilité de la voix de chacun est au-dessus de certaines limites, parvenir à une très-grande probabilité de n'avoir pas une décision fautive, & même d'en avoir une vraie; en sorte qu'à cet égard ces formes n'ont d'autres inconvéniens que d'être plus compliquées & de rendre les décisions plus lentes à obtenir, inconvéniens auxquels on peut opposer l'avantage de former des assemblées plus petites, & si on peut les prendre dans les lieux séparés, de pouvoir les composer d'un plus grand nombre d'hommes éclairés.

Mais l'inconvénient qu'ont ces formes compliquées, d'exposer à suivre des décisions rendues avec la minorité, suffit pour les faire absolument rejeter, fût-on très-assuré que cet inconvénient ne doit presque jamais arriver: nous en avons dit les motifs ci-dessus, & ils sont ici d'autant plus forts que ceux qui ordonneroient l'exécution de pareilles décisions, agiroient, ou forceroient les autres d'agir contre le sentiment de la conscience, & feroient une injustice en connoissance de cause. Or, il est permis d'agir d'après une opinion, quoiqu'il devienne probable que sur un grand nombre d'actions, déterminées par le même principe, on en fera une injuste, pourvu que l'on ait pour chaque action en particulier une assurance suffisante qu'elle est conforme à la justice; mais cette conduite cesse d'être légitime, si dans la suite de ces actions il y en a telle en particulier dont on puisse connoître l'injustice.

Dans plusieurs pays, on décide les affaires par deux Tribunaux, l'un inférieur, l'autre supérieur, & on suit le vœu du dernier sans avoir égard à l'autorité du premier jugement. Si on considère cette forme de décision dans un sens abstrait,

Des Tribunaux d'appel.

puisque le jugement du dernier Tribunal est seul exécuté, on doit avoir les mêmes conclusions que si ce Tribunal avoit prononcé seul quant à la probabilité de n'avoir pas une décision fautive, d'en avoir une vraie, enfin d'en avoir une, vraie ou fautive : mais quant aux deux autres objets, savoir la probabilité de la décision, quand on fait qu'elle est rendue, & quel a été l'avis du premier Tribunal, ou bien quand on connoît la pluralité des deux Tribunaux & leur décision, il n'en est pas de même. Si les deux décisions sont conformes, la probabilité de la vérité de la décision est à la probabilité de l'erreur comme le produit des probabilités de la vérité de chaque décision au produit des probabilités de l'erreur de chacune. Ainsi, par exemple, si la probabilité de la vérité de la première décision est $\frac{9}{10}$, & celle de l'erreur $\frac{1}{10}$, la probabilité de la vérité de la seconde décision $\frac{99}{100}$, & $\frac{1}{100}$ celle de l'erreur, la probabilité de la vérité du jugement sera à celle de l'erreur comme 99 fois 9, ou 891 à 1, & par conséquent la probabilité de l'erreur sera $\frac{1}{892}$, & celle de la vérité $\frac{891}{892}$.

Si au contraire les deux décisions sont opposées, la probabilité de la vérité du jugement sera à celle de l'erreur, comme le produit de la probabilité de la vérité de la dernière décision par celle de l'erreur de la première, au produit de la probabilité de l'erreur de la seconde par celle de la vérité de la première, c'est-à-dire, dans le même exemple comme 99 à 9, ou comme 11 à 1 ; en sorte que la probabilité de la vérité sera seulement $\frac{11}{12}$, & celle de l'erreur $\frac{1}{12}$.

Supposons que la pluralité soit connue, alors si les deux décisions sont conformes, la probabilité sera dans le cas d'une égale probabilité de chaque voix, comme si l'on avoit eu
une

une pluralité égale à la somme des deux pluralités, & si les décisions sont contraires, comme si l'on avoit eu une pluralité égale à la différence de ces pluralités.

Dans le cas où les probabilités de chaque voix ne sont pas les mêmes dans les deux Tribunaux, on a, si les deux décisions sont conformes entr'elles, la probabilité de la vérité du jugement, comme pour la pluralité de tant de voix d'une telle probabilité chacune, plus tant d'autres d'une autre probabilité; & si les deux décisions sont contraires, comme pour la pluralité de tant de voix de la première probabilité, moins tant de voix d'une autre probabilité.

Par exemple, supposons les probabilités égales, & $\frac{4}{7}$ pour chaque voix dans les deux Tribunaux, que le premier ait une pluralité de 7 voix & le second une de 5, si les décisions sont conformes, la probabilité de la vérité sera $\frac{16,777,216}{16,777,217}$, ce qui donne une assurance très-grande: mais si elles sont opposées, la probabilité de la vérité de la décision devient dans le même exemple $\frac{1}{17}$, & celle de l'erreur $\frac{16}{17}$.

Si ces probabilités sont différentes, & qu'on suppose celle de chaque voix du premier Tribunal $\frac{2}{3}$, & celle de chaque voix du second $\frac{4}{5}$, la probabilité de la vérité du jugement, si les décisions sont conformes, sera $\frac{131072}{131073}$; & si elles sont différentes, la probabilité de la vérité ne sera que $\frac{8}{9}$.

On voit donc qu'il est absolument nécessaire dans ce cas, ou d'exiger du Tribunal supérieur une pluralité qui donne une assurance suffisante, même lorsqu'elle prononce contre l'unanimité du Tribunal inférieur, ce qui peut n'être pas compatible avec la nécessité d'avoir une grande probabilité d'obtenir une décision, ou bien il faudra que la pluralité exigée du

f

Tribunal supérieur soit suffisante seulement par elle-même quand son jugement est conforme à celui du premier Tribunal, & plus grande dans le cas contraire, de manière qu'il y ait toujours une assurance de la vérité du jugement supérieur, même quand il est rendu contre l'unanimité du premier.

Résultat
général.

On voit donc ici que la forme la plus propre à remplir toutes les conditions exigées, est en même temps la plus simple, celle où une assemblée unique, composée d'hommes éclairés, prononce seule un jugement à une pluralité telle, qu'on ait une assurance suffisante de la vérité du jugement, même lorsque la pluralité est la moindre, & il faut de plus que le nombre des Votans soit assez grand pour avoir une grande probabilité d'obtenir une décision.

Des Votans éclairés & une forme simple, sont les moyens de réunir le plus d'avantages. Les formes compliquées ne remédient point au défaut de lumières dans les Votans, ou n'y remédient qu'imparfaitement, ou même entraînent des inconvéniens plus grands que ceux qu'on a voulu éviter.

Des décisions où le nombre des avis pour lesquels chaque Membre peut voter, est plus grand que deux.

Jusqu'ici on a supposé qu'il ne pouvoit y avoir que deux avis, c'est-à-dire, qu'on délibéroit sur la vérité d'une proposition simple ou de sa contradictoire: il reste à examiner les circonstances où le vœu ne se réduit pas à deux avis opposés.

On suppose d'abord que le troisième avis est nul & ne renferme aucune décision.

La première question qui se présente, est celle où l'on suppose que les Votans peuvent non-seulement voter pour ou contre une proposition, mais aussi déclarer qu'ils ne se croient pas assez instruits pour prononcer.

Alors le calcul conduit à trouver que si l'on ne tient aucun compte des voix qui prennent ce dernier parti, on pourra toujours obtenir, en prenant une pluralité convenable, une

probabilité aussi grande qu'on voudra de ne pas avoir une décision contraire à la vérité, & il en sera de même de la probabilité d'avoir une décision.

Mais on ne pourra avoir une probabilité au-dessus de $\frac{1}{2}$, ni d'avoir une décision vraie, ni que la décision rendue sera conforme à la vérité.

On ne pourra non plus avoir une probabilité suffisante de la vérité de la décision, en supposant la pluralité connue, quelque hypothèse de pluralité qu'on choisisse, parce qu'il y aura toujours des cas où cette probabilité pourra être au-dessous de $\frac{1}{2}$.

Cette conclusion est fondée sur un principe qui paroît incontestable; c'est que si ceux qui ont pris un parti se sont trompés en regardant la question comme assez éclaircie, on ne doit point regarder leur voix comme ayant la même probabilité que s'ils ne s'étoient pas trompés sur la première question, & même au contraire on doit supposer que la probabilité de la vérité de la décision qu'ils forment est moindre que celle de l'erreur.

Ainsi dans le cas où l'on admet ces trois avis, il faut non-seulement que celui qui obtient la préférence, ait sur l'avis contraire une pluralité suffisante: il faut de plus que la somme des voix qui prononcent sur le fond de la question ait aussi une pluralité suffisante sur le nombre des voix qui décident que la question n'est pas assez instruite. Mais il se présente de nouvelles difficultés dans cette manière de décider.

Supposons, par exemple, qu'il soit question de juger un accusé, & qu'on puisse porter les trois avis; l'accusé est coupable, l'accusé n'est pas coupable, l'instruction ne donne de preuves suffisantes ni du crime ni de l'innocence. On voit

d'abord que les voix qui opinent pour le second ou pour le troisième avis, doivent être également comptées pour faire renvoyer l'accusé, parce que l'on ne doit punir un accusé que lorsqu'on a une probabilité suffisante que son crime est prouvé. Si le renvoi de l'accusé doit entraîner des dédommagemens ou des peines pour les accusateurs, alors on doit compter ensemble les voix qui sont pour le premier & le troisième avis, parce que l'accusation ne peut être jugée injuste, & regardée comme une véritable oppression que lorsque l'innocence de l'accusé se trouve avoir un certain degré de probabilité.

Si le Tribunal qui juge a droit d'ordonner une nouvelle instruction, & que le troisième avis s'entende dans ce sens; alors si les deux premiers ont ensemble une pluralité de voix suffisante, il faudra décider, d'après la pluralité, entre ces deux avis, parce que la voix de ceux qui regardent une nouvelle instruction comme nécessaire, ne doit être comptée ni pour ni contre.

L'humanité ou la justice ne peuvent exiger que ces voix soient comptées en faveur de l'accusé; parce qu'il est toujours possible d'exiger entre les voix de ceux qui ont jugé l'instruction complète, une pluralité qui donne une assurance suffisante pour la sûreté, & que ce moyen a l'avantage de donner la sûreté qu'exige la justice, & de moins diminuer la probabilité d'avoir une décision vraie.

Ce dernier cas est le seul où, pour cet exemple, la manière de voter que nous considérons ici, puisse être suivie.

On suppose
trois avis réel-
lement dif-
tincts.

Si on suppose ensuite que l'on ait trois avis distincts, & qu'on cherche, la probabilité de chaque avis étant connue, ou la probabilité d'avoir la pluralité d'un avis sur les deux,

& celle de la décision dans ce cas, ou la probabilité que, soit les deux autres, soit un seul des deux, n'auront pas la pluralité; on trouvera dans tous les cas qu'on peut donner aux décisions une forme telle, qu'en multipliant le nombre des Votans, la probabilité ait pour limite 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou zéro.

Résultats
du calcul.

Car la limite $\frac{1}{3}$ se trouve ici lorsque les trois avis ont une égale probabilité & qu'il ne s'agit que d'une pluralité constante, & dans différens autres cas; comme la limite $\frac{1}{4}$ a lieu si l'on suppose quatre avis possibles.

Mais il ne suffit pas d'avoir des formules algébriques qui représentent la probabilité dans toutes ces hypothèses, il faut examiner ce que l'on doit entendre par la probabilité des avis.

Examen de la manière dont trois avis peuvent être formés, & la probabilité de chacun d'eux.

Lorsqu'il n'y a que deux avis, & qu'il s'agit de prononcer entre deux propositions contradictoires, dont l'une est vraie & l'autre fausse, si l'on connoît la probabilité que chaque Votant décidera plutôt en faveur de la vérité que de l'erreur, on connoît la probabilité que la décision à une pluralité donnée fera en faveur de la vérité, ou qu'il n'y aura pas de décision erronée, ou qu'il y aura une décision, ou qu'une décision rendue sera vraie plutôt que fausse.

Pour appliquer maintenant la même théorie à des propositions plus compliquées, il faut observer d'abord que toute proposition composée se réduit à un système de propositions simples, & que tous les avis que l'on peut former en délibérant sur cette proposition, sont égaux en nombre aux combinaisons qu'on peut faire de ces propositions & de leurs contradictoires.

Dans ce cas, chaque avis est une combinaison de propositions simples & de leurs contradictoires.

Ainsi, par exemple, si la proposition composée qu'on examine est formée de deux propositions simples, il y a quatre

avis possibles; si elle l'est de trois propositions simples, il y a huit avis possibles, seize pour quatre propositions simples, & ainsi de suite.

La probabilité de la voix de chaque Votant pour une proposition particulière étant supposée connue, la probabilité que son avis, composé de deux, de trois, de quatre propositions, sera vrai, est égale à la probabilité qu'il ne se trompera point dans deux, trois, quatre jugemens consécutifs: on aura ensuite pour le nombre des avis, où toutes les propositions seront vraies hors une, la probabilité de ces avis égale à celle qu'il ne se trompera qu'une fois sur deux, trois, quatre. On cherchera de même la probabilité qu'il n'y aura dans l'avis que deux propositions fausses, ce qui a lieu pour autant d'avis qu'il y a de combinaisons deux à deux dans les propositions, & elle sera égale à la probabilité que chaque Votant se trompera deux fois sur deux, sur trois, sur quatre jugemens, & ainsi de suite.

Ainsi on aura les différentes probabilités qu'on doit supposer à un avis entièrement conforme à la vérité, à un avis qui ne renferme qu'une, deux, trois erreurs; enfin à un avis entièrement erroné, & par conséquent on pourra trouver, par les formules précédentes, la probabilité d'avoir une décision vraie, ou celle de ne pas en avoir une fautive dans les différentes hypothèses de pluralité.

Considération qui rend déficiente, dans ce cas, la manière ordinaire de prendre la pluralité des voix.

Mais il faut ici faire une observation importante. Il est très-possible que l'avis qui a la pluralité des voix, ne soit pas formé de propositions qui chacune aient réellement la pluralité, & cette réflexion rend absolument déficiente la manière de former la décision à la pluralité des voix pour chaque avis, & d'en déterminer la probabilité d'après la méthode précédente.

En effet, on a seulement ici la pluralité relativement à chaque avis, considéré dans sa totalité, & la probabilité qui en résulte; & on fait abstraction de la pluralité pour chaque proposition en particulier, & de la probabilité que peuvent ajouter ou ôter à chaque proposition qui forme un avis, les voix qui, en portant d'autres avis, sont d'accord avec le premier avis, ou le contredisent sur chacune de ces propositions.

Or, on ne peut faire abstraction de cette considération sans erreur: un système de propositions n'est vrai que parce que chacune des propositions qui le forment est une vérité; & la probabilité du système ne peut être rigoureusement déduite que de la probabilité de chaque proposition en particulier.

Supposons, par exemple, que deux propositions A & a forment un avis, & que les deux propositions N & n en soient les deux contradictoires, il y aura quatre avis possibles; premier, A & a ; second, A & n ; troisième, N & a ; quatrième, N & n . Supposons maintenant qu'il y ait trente-trois Votans; que le nombre des voix pour le premier avis soit 11, 10 pour le second, 3 pour le troisième, 9 pour le dernier, & qu'en conséquence on se décide pour le premier.

Il est aisé de voir que ce premier avis est composé des deux propositions A & a ; que la proposition A est adoptée aussi par tous ceux qui ont été du second avis, & qu'ainsi elle a réellement en sa faveur 21 voix, & 12 contre elle. La proposition a est adoptée par tous ceux qui ont été du troisième avis; elle a donc 14 voix pour elle & 19 contre: par la même raison, la proposition N a 12 voix pour elle, & la proposition n en a 19. Ce sont donc les deux propositions

A & *n* qui doivent l'emporter, & le second avis, & non le premier, qui a réellement la pluralité.

Moyens de
remédier à cet
inconvenient.

Il suit de cette observation, 1.^o que pour avoir à la pluralité des voix une décision qui mérite de la confiance, il est absolument nécessaire de réduire tous les avis de manière qu'ils représentent d'une manière distincte les différentes combinaisons qui peuvent naître d'un système de propositions simples & de leurs contradictoires.

2.^o Que comptant ensuite séparément toutes les voix données en faveur de chacune de ces propositions ou de sa contradictoire, il faut prendre celle des deux qui a la pluralité, & former de toutes ces propositions l'avis qui doit prévaloir.

3.^o Qu'il est indifférent dans ce cas, de prendre les voix sur tout le système, ou de les prendre successivement sur chaque proposition.

Il est inutile d'entrer dans aucun détail sur la manière de régler la pluralité. En effet, il est évident qu'il faut s'assurer à la fois pour chaque proposition, & ensuite pour le système entier, de remplir les conditions nécessaires à toutes les espèces de décision.

Plus la question sera compliquée, plus elle renfermera de propositions simples; plus aussi il sera difficile de remplir ces conditions & d'avoir une probabilité suffisante d'obtenir une décision vraie, & que la décision rendue est conforme à la vérité; & le besoin de ne confier la décision qu'à des hommes assez éclairés pour que la probabilité de la voix de chaque Votant soit très-grande, est encore plus indispensable ici que dans le cas où il s'agit de prononcer sur une simple proposition.

Si

Si ces propositions, dont les combinaisons forment les différens avis, étoient toujours telles qu'aucune de ces combinaisons mathématiquement possibles ne renfermât une contradiction, nous n'aurions rien à ajouter ici, mais cela n'a lieu en général que lorsque les propositions sont indépendantes l'une de l'autre.

Examen du cas où parmi les combinaisons des systèmes de propositions simples, il s'en trouve qui renferment une contradiction.

Si elles sont liées entr'elles, il peut y avoir des combinaisons renfermant des contradictions dans les termes.

Par exemple, 1.° si ces combinaisons renferment deux propositions qui ne peuvent subsister ensemble; ce qui a lieu lorsqu'une proposition d'un des systèmes de propositions contradictoires deux à deux, est une proposition contraire à une des propositions d'un autre système.

2.° Si deux des propositions qui entrent dans une combinaison, conduisent à une conclusion qui ne peut être vraie en même temps qu'une troisième proposition, qui fait aussi partie de la même combinaison.

Outre ces contradictions, qui sont rigoureusement dans les termes, il peut exister entre deux propositions de la même combinaison, ou bien entre une proposition & la conclusion de deux autres, une opposition suffisante pour rejeter la combinaison; comme, par exemple, si ces propositions ne peuvent subsister ensemble sans qu'il en résulte une conséquence contraire à une vérité reconnue.

Il peut arriver encore que plusieurs des combinaisons possibles conduisent aux mêmes résultats, & qu'ainsi elles puissent être censées former un seul avis.

Par ces deux raisons, quoique les combinaisons qui naissent des systèmes de propositions contradictoires deux à deux, soient toujours une puissance de 2, dont l'exposant est

égal au nombre des systèmes de propositions contradictoires, ou des propositions qui entrent dans chaque avis, c'est-à-dire 2 s'il est formé d'une seule proposition, 4 s'il l'est de deux, 8 s'il l'est de trois, & ainsi de suite, les avis pourront se réduire absolument, ou seulement, quant aux résultats, à un moindre nombre qui ne soit pas une puissance de 2, ou compris dans la suite des nombres 2, 4, 8, 16, &c. Mais il n'en est pas moins nécessaire d'analyser chaque avis, afin de connoître quelles propositions l'ont formé, & de pouvoir juger quelles combinaisons des propositions a réellement la pluralité, & quelle probabilité en résulte.

1.^{er} exemple, d'un jugement criminel, où l'on peut voter, comme à Rome, par le *non liquet*.

Quelques exemples serviront à mieux faire entendre ces principes.

Je suppose que l'on ait à délibérer entre les trois avis suivans.

Il est prouvé qu'un tel accusé est coupable.

Il est prouvé qu'il est innocent.

Ni l'un ni l'autre n'est suffisamment prouvé.

On voit clairement ici deux systèmes de propositions contradictoires entr'elles.

Premier Système.

(A) Il est prouvé que l'accusé est coupable.

(N) Il n'est pas prouvé que l'accusé soit coupable.

Second Système.

(a) Il est prouvé que l'accusé est innocent.

(n) Il n'est pas prouvé que l'accusé soit innocent.

Nous avons donc quatre combinaisons.

1.^o Les deux propositions A & a; mais ces deux propositions

sont évidemment contraires l'une à l'autre, & par conséquent cette combinaison est absurde.

2.^o La combinaison A & n , la proposition n est renfermée dans la proposition A ; ainsi cette combinaison se réduit à l'avis, il est prouvé que l'accusé est coupable.

3.^o La combinaison N & a , la proposition a renferme la proposition N , & cette combinaison forme l'avis, il est prouvé que l'accusé est innocent.

4.^o Enfin la combinaison N & n , d'où résulte l'avis, il n'est prouvé ni que l'accusé soit innocent ni qu'il soit coupable.

Supposons maintenant que le premier avis ait 11 voix en sa faveur, le second 7, & le troisième 6, nous aurons onze voix pour la proposition A & treize pour la proposition N , sept voix pour la proposition a & dix-sept pour la proposition n ; ce sera donc le troisième avis qui doit avoir la pluralité, quoiqu'en comptant les avis à la manière ordinaire, il parût avoir la minorité.

Dans cet exemple, quelque proportion qu'on suppose dans le nombre des voix, on ne pourra avoir en même temps la pluralité en faveur des deux propositions contraires A & a : le résultat de la votation sera toujours une décision pour un des trois avis possibles, & la même chose aura lieu pour tous les cas où de quatre combinaisons possibles entre deux systèmes de propositions simples, une des combinaisons sera exclue, parce qu'elle contient deux propositions contraires.

Il paroît d'abord absolument indifférent, ou d'aller deux fois aux voix sur chaque proposition simple, ou d'y aller une seule fois sur chacun des trois avis; mais cette parité n'est exacte qu'autant qu'on suppose qu'en prenant deux fois les

Manière d'avoir dans ce cas l'avis de la pluralité.

voix, il n'arrive jamais à aucun des Votans d'être successivement de deux avis contraires. Or cela peut arriver, surtout si on recueille les voix par scrutin, & par conséquent il vaut mieux faire prononcer chacun pour un des trois avis, & ensuite, par un calcul très-simple, déduire du nombre des voix de chacun le véritable résultat de la décision. Cette remarque s'étend généralement à tous les cas semblables.

Inconvénient de celle qui est en usage dans plusieurs pays.

On a senti dans plusieurs pays, & particulièrement dans les Tribunaux de France, que souvent l'avis qui avoit le plus de voix, n'étoit pas véritablement l'avis de la pluralité, & l'on a imaginé d'y remédier, en prenant deux des avis qui ont le plus grand nombre de voix, & en obligeant les Votans de se partager entre ces avis.

Ce que nous avons dit suffit pour montrer que cette méthode ne remédie qu'en partie aux inconvéniens.

1.^o Elle a celui d'obliger les Votans à se ranger à un avis qui n'est pas le leur, & à voter non selon la vérité, mais selon les inconvéniens qu'ils croient apercevoir dans les partis entre lesquels ils sont obligés de se partager.

2.^o Il peut même arriver que la pluralité réelle ne soit en faveur d'aucun des deux avis qui ont le plus de voix, comme dans l'exemple que nous avons choisi.

2.^d Exemple, d'une décision sur la justice de restrictions mises à la liberté du commerce.

Passons ensuite à un exemple plus compliqué: supposons que les trois avis soient,

1.^o Toute restriction mise à la liberté du commerce, est injuste.

2.^o Les restrictions mises à la liberté du commerce par des loix générales, sont les seules qui soient justes.

3.^o Les restrictions à la liberté, mises par des ordres particuliers, peuvent aussi être justes.

On est obligé ici de prendre trois systèmes de propositions.

(1.^o) *A*, toute restriction est injuste.

N, il peut y avoir des restrictions justes.

(2.^o) *a*, les restrictions mises par des loix générales, peuvent être justes.

n, les restrictions mises par des loix générales, ne sont pas justes.

(3.^o) *a*, les restrictions mises par des ordres particuliers, peuvent être justes.

v, les restrictions mises par des ordres particuliers, ne peuvent être justes. Ce qui donne huit combinaisons mathématiquement possibles, formées par les propositions

(I) *A, a, a*, (II) *A, a, v*, (III) *A, n, a*, (IV) *A, n, v*,
(V) *N, a, a*, (VI) *N, a, v*, (VII) *N, n, a*, (VIII) *N, n, v*.

Ces lettres désignent ici les propositions auxquelles elles répondent, & qui forment chaque système.

De ces huit combinaisons il faut rejeter les trois premières, parce qu'elles renferment des propositions qui sont contraires entr'elles.

La quatrième se réduit au premier avis, il ne peut y avoir de restrictions justes.

La cinquième donne le troisième avis, les restrictions mises par des ordres particuliers peuvent être justes, comme celles qui sont mises par des loix générales.

La sixième donne le second avis, les restrictions mises par des loix générales sont les seules justes.

La septième doit être rejetée, parce qu'elle contient les deux propositions; les restrictions mises par des loix générales sont injustes; celles qui sont mises par des ordres particuliers peuvent être justes, ce qui paroît contraire à la raison.

La huitième doit être rejetée aussi, parce que les deux propositions, les restrictions mises par des loix générales sont injustes, les restrictions mises par des ordres particuliers sont injustes, conduisent à la conclusion, toute restriction est injuste; proposition qui ne pourroit subsister avec la première proposition de ce système; il peut y avoir des restrictions justes.

Si donc le premier avis a eu 15 voix, le second 11, & le troisième 12, la proposition *A* aura réellement 15 voix, & la proposition *N* 23; la proposition *a* 23 voix, & la proposition *n* 15 voix; la proposition *a* 12 voix, & la proposition *r* 26 voix; la combinaison qui doit l'emporter sera donc composée des propositions *N*, *a* & *r*, ce qui est le second avis, & précisément celui qui paroïssoit avoir le moins de voix.

On trouve encore dans cet exemple, & dans tous ceux où les huit avis seront réduits à trois par de semblables raisons, que les trois propositions, qui ont chacune la pluralité, appartiennent toujours à des systèmes possibles.

3.^e Exemple, de la décision d'une question, où l'avis qu'il n'y a pas eu preuves suffisantes, & les deux avis sur la question elle-même sont également admis.

On aura de même la solution des autres cas; par exemple, celui où les Votans qui adoptent une des propositions contradictoires sur une première question, ne peuvent avoir un avis sur la seconde, comme si l'on délibère sur ce système de quatre propositions.

Les preuves acquises sont suffisantes pour décider.

Les preuves acquises ne sont pas suffisantes.

Et ensuite les deux propositions contradictoires sur la question en elle-même: alors il est clair que ceux qui ont voté pour la proposition, les preuves ne sont pas suffisantes, ne peuvent voter sur la seconde question. Ainsi, dans le cas où, lorsqu'il n'y a pas de preuves suffisantes, la justice

n'oblige pas à préférer l'un des deux partis à l'autre; il est clair que si la proposition, les preuves sont suffisantes à la pluralité des voix, il faudra décider la deuxième question à la pluralité prise entre les seuls Votans qui ont été de cet avis.

On pourroit objecter ici qu'il peut arriver que la pluralité, soit en faveur de l'existence de preuves suffisantes, soit en faveur d'un des deux partis, soit si petite que la probabilité de la décision devienne inférieure même à celle de la première opinion, *il n'y a pas de preuves suffisantes*, & que dans ce cas on ne doit adopter aucune décision; qu'enfin il faut alors conclure, non *que les preuves ne suffisent pas*, mais que la proposition qu'elles sont insuffisantes quoiqu'improbable, l'est encore moins qu'aucune des propositions qui prononcent sur la question en elle-même.

Mais il est aisé de répondre, que du moment où la proposition que l'on a des preuves suffisantes est la plus probable, tout ce qu'on doit conclure du plus ou moins de probabilité de cette opinion, c'est que l'avis de ceux qui décident sur le fond de la question, est aussi plus ou moins probable: la probabilité de leur décision prise à la pluralité, sera donc plus ou moins grande, mais toujours plus probable que la décision contradictoire, & plus grande que $\frac{1}{2}$, & par conséquent dans les cas où il y auroit autant d'inconvénient à ne pas décider qu'à se tromper sur le parti qu'on prendra, il faut alors préférer la décision rendue à la pluralité des voix.

Dans les autres cas au contraire, comme il seroit difficile de soumettre au calcul la diminution de probabilité qui résulte pour l'avis de chacun, de l'incertitude s'il ne s'est pas trompé en prononçant que les preuves sont suffisantes, on suivra la

méthode que nous avons exposée ci-dessus, page xliij, & qui conduit à une probabilité suffisante.

4.° Exemple,
d'une élection
entre trois
Candidats.

Il nous reste à donner un dernier exemple: c'est le cas d'une élection entre trois candidats, que nous nommerons *A, B, C*.

Il est clair d'abord que celui qui donne sa voix pour *A*, prononce les deux propositions,

A vaut mieux que *B*,

A vaut mieux que *C*;

celui qui vote pour *B*, les deux propositions,

B vaut mieux que *A*,

B vaut mieux que *C*;

celui qui vote pour *C*, les deux propositions,

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*.

Nous avons donc ici trois systèmes de propositions contradictoires.

A, A vaut mieux que *B*,

N, B vaut mieux que *A*,

a, A vaut mieux que *C*,

n, C vaut mieux que *A*,

a, B vaut mieux que *C*,

v, C vaut mieux que *B*;

ce qui produit huit combinaisons mathématiquement possibles.

(I) *Aaa*, (II) *Aav*, (III) *Ana*, (IV) *Anv*,

(V) *Naa*, (VI) *Nav*, (VII) *Nna*, (VIII) *Nnv*.

De ces combinaisons, la première, formée des trois propositions *Aaa*, ou

A vaut mieux que *B*,

A vaut

A vaut mieux que *C*,

B vaut mieux que *C*.

forme un vœu en faveur de *A*.

La seconde, formée des trois propositions *Aa*, ou

A vaut mieux que *B*,

A vaut mieux que *C*,

C vaut mieux que *B*,

renferme encore un vœu en faveur de *A*.

La troisième, formée des trois propositions *Ana*, ou

A vaut mieux que *B*,

C vaut mieux que *A*,

B vaut mieux que *C*,

est évidemment telle, que de deux quelconques des trois propositions qui la forment, résulte une conclusion contraire à la troisième.

La quatrième combinaison, formée des propositions *An*, ou

A vaut mieux que *B*,

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

exprime un vœu en faveur de *C*.

La cinquième, formée des propositions *Na*, ou

B vaut mieux que *A*,

A vaut mieux que *C*,

B vaut mieux que *C*,

exprime un vœu en faveur de *B*.

La sixième, formée des propositions *Na*, ou

B vaut mieux que *A*,

A vaut mieux que *C*,

C vaut mieux que *B*,

est telle que comme dans la troisième, deux quelconques

h

des trois propositions qui la forment, renferment une conclusion contraire à la troisième.

La septième combinaison, formée des propositions *Naa*, ou

B vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *A*;

B vaut mieux que *C*,

renferme un vœu en faveur de *B*,

La huitième combinaison, formée des propositions *Nbv*,

ou

B vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *A*;

C vaut mieux que *B*,

exprime un vœu en faveur de *C*.

Nous aurons donc les deux combinaisons I & II en faveur de *A*, les deux combinaisons V & VII en faveur de *B*, les deux combinaisons IV & VIII en faveur de *C*, enfin les deux combinaisons III & VI, qui donnent un résultat contradictoire.

La méthode employée dans les élections ordinaires, est défectueuse.

Cela posé, il est aisé de voir d'abord que la manière employée dans les élections ordinaires est défectueuse. En effet, chaque Votant se borne à nommer celui qu'il préfère: ainsi dans l'exemple de trois Candidats, celui qui vote pour *A*, n'énonce pas son vœu sur la préférence entre *B* & *C*, & ainsi des autres. Or, il peut résulter de cette manière de voter une décision réellement contraire à la pluralité.

Supposons, par exemple, 60 Votans, dont 23 en faveur de *A*, 19 en faveur de *B* & 18 en faveur de *C*; supposons ensuite que les 23 Votans pour *A* auroient décidé unanimement que *C* vaut mieux que *B*; que les 19 Votans pour *B* auroient décidé que *C* vaut mieux que *A*; qu'enfin des 18

Votans pour *C*, 16 auroient décidé que *B* vaut mieux que *A*,
& 2 seulement que *A* vaut mieux que *B*.

On auroit donc, 1.° 35 voix pour la proposition *B* vaut mieux que *A*, & 25 pour la proposition contradictoire.

2.° 37 voix pour la proposition *C* vaut mieux que *A*,
& 23 pour la proposition contradictoire.

3.° 41 voix pour la proposition *C* vaut mieux que *B*,
& 19 pour la proposition contradictoire.

Nous aurions donc le système des trois propositions qui ont la pluralité, formé de trois propositions.

B vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

qui renferme un vœu en faveur de *C*.

De plus, nous aurions les deux propositions qui forment le vœu en faveur de *C*.

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

décidées l'une à la pluralité de 37 contre 23, l'autre à la pluralité de 41 contre 19.

Les deux propositions qui forment le vœu en faveur de *B*,

B vaut mieux que *A*,

B vaut mieux que *C*,

décidées l'une à la pluralité de 35 voix contre 25, l'autre à la minorité de 19 contre 41.

Enfin les deux propositions qui forment un vœu en faveur de *A*.

A vaut mieux que *B*,

A vaut mieux que *C*,

décidées à la minorité, l'une de 25 voix contre 35, l'autre de 23 voix contre 37.

Ainsi celui des Candidats qui auroit réellement le vœu de la pluralité, seroit précisément celui qui, en suivant la méthode ordinaire, auroit eu le moins de voix.

Tandis que *A* qui, suivant la forme ordinaire, auroit eu le plus de voix, se trouve être celui au contraire qui dans la réalité a été le plus éloigné d'avoir le vœu de la pluralité.

On voit donc déjà que l'on doit rejeter la forme d'élection adoptée généralement: si on devoit la conserver, ce ne pourroit être que dans le cas où l'on ne seroit pas obligé d'élire sur le champ, & où l'on pourroit exiger de ne regarder pour élu que celui qui auroit réuni plus de la moitié des voix. Dans ce cas même, cette forme a encore l'inconvénient d'exposer à regarder comme non élu celui qui auroit eu réellement une très-grande pluralité.

Méthode qu'il faut y substituer.

Ainsi l'on devoit en général substituer à cette forme celle dans laquelle chaque Votant, exprimant l'ordre suivant lequel il place les Candidats, prononceroit à la fois sur la préférence respectueuse qu'il leur accorde.

On tireroit de cet ordre les trois propositions qui doivent former chaque avis, s'il y a trois Candidats; les six propositions qui doivent former chaque avis, s'il y a quatre Candidats, les dix s'il y en a cinq, &c. en comparant les voix en faveur de chacune de ces propositions ou de sa contradictoire.

On auroit par ce moyen le système de propositions, qui seroit formé à la pluralité parmi les 8 systèmes possibles pour trois Candidats, les 64 systèmes possibles pour quatre Candidats, les 1024 systèmes possibles pour cinq Candidats & si on considère seulement ceux qui n'impliquent pas

contradiction, il n'y en aura que 6 possibles pour trois Candidats, 24 pour quatre, 120 pour cinq, & ainsi de suite.

On peut demander maintenant si la pluralité peut avoir lieu en faveur d'un de ces systèmes contradictoires, & on trouvera que cela est possible.

Supposons en effet que dans l'exemple déjà choisi, où l'on a 23 voix pour *A*, 19 pour *B*, 18 pour *C*, les 23 voix pour *A* soient pour la proposition *B* vaut mieux que *C*; cette proposition aura une pluralité de 42 voix contre 18.

Supposons ensuite que des 19 voix en faveur de *B*, il y en ait 17 pour *C* vaut mieux que *A*, & 2 pour la proposition contradictoire; cette proposition *C* vaut mieux que *A* aura une pluralité de 35 voix contre 25. Supposons enfin que des 18 voix pour *C*, 10 soient pour la proposition *A* vaut mieux que *B*, & 8 pour la proposition contradictoire, nous aurons une pluralité de 33 voix contre 27 en faveur de la proposition *A* vaut mieux que *B*. Le système qui obtient la pluralité sera donc composé des trois propositions,

A vaut mieux que *B*,

C vaut mieux que *A*,

B vaut mieux que *C*.

Ce système est le troisième, & un de ceux qui impliquent contradiction.

Nous examinerons donc le résultat de cette forme d'élection, 1.^o en n'ayant aucun égard à ces combinaisons contradictoires, 2.^o en y ayant égard.

Nous avons vu que des 6 systèmes possibles réellement, il y en avoit 2 en faveur de *A*, 2 en faveur de *B*, 2 en faveur de *C*.

Ainsi dans un des exemples précédens, où nous avons supposé que sur 60 voix, la proposition

A vaut mieux que *B*,

avoit 25 voix contre 35; la proposition

A vaut mieux que *C*,

23 voix contre 37; la proposition

B vaut mieux que *C*,

19 voix contre 41: la pluralité est en faveur du système VIII, formé des trois propositions

B vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

dont la première a la pluralité de 35 voix contre 25; la seconde, celle de 37 voix contre 23; la troisième, celle de 41 voix contre 19.

Et l'on aura, d'après la probabilité de la voix de chaque Votant, celle que ce système est conforme à la vérité.

Mais le quatrième système, formé des propositions

A vaut mieux que *B*,

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

conduit de même à un résultat en faveur de *C*, & la combinaison des deux systèmes donne les deux propositions

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

l'une à la pluralité de 37 voix contre 23, l'autre à la pluralité de 41 voix contre 19.

Or, nous demandons maintenant si nous devons regarder le vœu comme donné en faveur de *C*, seulement parce que le système des trois propositions qui ont la pluralité,

renferme ce vœu , ou parce que des trois résultats que donnent les six systèmes pris deux à deux , celui qui est en faveur de *C* est le plus probable.

Cette question seroit peu importante si ce résultat étoit toujours le même , comme dans cet exemple , mais il n'est pas toujours le même. En effet , supposons que des 23 voix en faveur de *A* , 13 aient adopté la proposition

C vaut mieux que *B* ,

& 10 la proposition

B vaut mieux que *C* ;

que des 19 voix en faveur de *B* , 13 aient adopté la proposition

C vaut mieux que *A* ,

& 6 la proposition

A vaut mieux que *C* ;

qu'enfin les 18 voix en faveur de *C* aient adopté la proposition

B vaut mieux que *A*.

Le système qui résulteroit de la pluralité , seroit formé des trois propositions

B vaut mieux que *A* ,

C vaut mieux que *A* ,

C vaut mieux que *B* ,

la première ayant une pluralité de 37 voix contre 23 , les deux autres une pluralité de 31 voix contre 29 , & ce système renferme un vœu en faveur de *C*.

Mais dans le même exemple , le résultat de toutes les combinaisons en faveur de *C* est formé des deux propositions

C vaut mieux que *A* ,

C vaut mieux que *B* ,

qui ont chacune une pluralité de 31 voix contre 29; mais le résultat des combinaisons en faveur de *B* est formé des deux propositions

B vaut mieux que *A*,

B vaut mieux que *C*,

dont la première a une pluralité de 37 voix contre 23, & la seconde une minorité de 29 voix contre 31.

Or, la probabilité de chaque voix peut être telle que celle de la vérité de ces deux propositions surpasse celle des propositions

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

& il paroît en résulter une probabilité en faveur de *B*, tandis qu'en s'en tenant au système de trois propositions le plus probable, on a une décision en faveur de *C*.

Pour résoudre cette difficulté, nous observerons, 1.^o que dans ce cas il est clair que *A* ne doit pas avoir la préférence, puisqu'il n'a pour lui que la minorité, soit qu'on le compare à *B*, soit qu'on le compare à *C* (ce qui a lieu dans tous les cas semblables) : c'est donc entre *B* & *C* qu'il reste à choisir. Or, la proposition *B* vaut mieux que *C*, a la minorité; donc on doit regarder le vœu de la pluralité comme porté en faveur de *C*.

2.^o Celui qui prononceroit en faveur de *C*, feroit le raisonnement suivant: j'ai lieu de croire que *C* vaut mieux que *A*; j'ai aussi lieu de croire que *C* vaut mieux que *B*; donc je dois croire que *C* vaut mieux que *A* & que *B*. Celui au contraire qui prononceroit en faveur de *B*, feroit le raisonnement suivant: j'ai lieu de croire que *B* vaut mieux que *A*; j'ai aussi lieu de croire que *C* vaut mieux que *B*; donc je doi

dois croire que *B* vaut mieux que *C*; conclusion qui paroît absurde.

Le résultat du calcul paroît donc en contradiction avec le simple raisonnement, dans le cas où l'on adopteroit pour former la décision, non le système le plus probable, mais le résultat des deux systèmes favorables à un même Candidat, qui seroit le plus probable.

D'ailleurs si on examine le résultat du calcul, on voit que si la combinaison

B vaut mieux que *A*,

B vaut mieux que *C*,

est plus probable que la combinaison

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

quoique la dernière soit formée de deux propositions qui ont la pluralité, c'est uniquement parce que si on adopte la seconde, on se trompera plus souvent en préférant *C* à *A*, que dans la première en préférant *B* à *A*.

On risquera donc plus souvent de se tromper en interprétant le vœu de la décision en faveur de *C* qu'en l'interprétant en faveur de *B*, mais c'est uniquement parce que l'on se sera trompé en n'accordant pas la préférence à *A*. Il est donc naturel de préférer *C* à *B* du moment où l'exclusion de *A* doit avoir lieu.

Il résulte de ce qu'on vient d'exposer, qu'il faut faire en sorte que les assemblées chargées d'élire, soient formées de manière qu'on soit rarement exposé à n'avoir qu'une pluralité qui conduise à une décision de la nature de celle que nous venons de discuter; ce qui est d'autant plus nécessaire, que du moment où une proposition

C vaut mieux que *B*
 a la pluralité, la proposition
B vaut mieux que *A*,
 ne peut avoir une plus grande pluralité que la proposition
C vaut mieux que *A*,
 sans indiquer une incertitude dans les opinions.

Dans le cas d'ailleurs où l'on a une décision de cette espèce, il faut, si la nature des places qu'on donne par élection le permet, ne pas regarder l'élection comme terminée, & exiger pour élire *C*, par exemple, que les deux propositions

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

soient les deux qui aient la plus grande pluralité, ou bien que le système,

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

ait une pluralité au-dessus de $\frac{1}{2}$.

Dans le cas où l'on est forcé d'élire, comme on ne peut en général éviter l'inconvénient de ces décisions, qu'on peut appeler équivoques, sinon en exigeant une grande pluralité, ou en ne confiant l'élection qu'à des hommes très éclairés, le second moyen est le seul qu'on puisse employer; & lorsqu'il est impossible d'avoir des Votans assez éclairés, il ne faut admettre au nombre des Candidats que des hommes dont la capacité soit assez certaine pour mettre à l'abri des inconvéniens d'un mauvais choix.

Ces précautions une fois prises, on regardera comme élu par la pluralité des Votans celui pour lequel les deux propositions qui forment un vœu en sa faveur, ont chacune la

pluralité, ce qui est la même chose que d'adopter le système formé par les trois propositions qui ont la pluralité. Au reste, ce cas d'une décision équivoque ne peut avoir lieu, à moins que la décision résultante de la pluralité n'ait une probabilité moindre que $\frac{71}{100}$, ce qui en exige une très-petite pour chaque Votant.

Supposons maintenant que les trois propositions qui ont la pluralité forment un des deux systèmes contradictoires; s'il n'y a pas nécessité d'élire, on regardera la décision comme nulle; mais s'il y a nécessité d'élire, on se conformera à la décision qui résulte des deux propositions les plus probables. Car il est aisé de voir, comme nous l'avons remarqué, que deux quelconques des trois propositions, forment alors une décision contradictoire avec la troisième; & que, par exemple, dans le système III, formé des trois propositions

A vaut mieux que *B*,

C vaut mieux que *A*,

B vaut mieux que *C*,

les deux premières donnent un vœu en faveur de *C*, la première & la troisième, un vœu en faveur de *A*, la deuxième & la troisième un vœu en faveur de *C*. Or, soit la proposition *B* vaut mieux que *C* celle qui a la moindre probabilité, & *A* vaut mieux que *B* celle qui en a la plus grande; il est clair que ces deux propositions,

B vaut mieux que *C*,

B vaut mieux que *A*,

ont chacune une moindre probabilité que les deux propositions

A vaut mieux que *B*,

A vaut mieux que *C*.

B doit donc être exclus; mais entre *A* & *C*, *C* doit avoir la

préférence, puisque la proposition

C vaut mieux que *A*

a la pluralité.

Si c'est la proposition

C vaut mieux que *A*

qui a la plus grande pluralité; on trouvera que dans les combinaisons

C vaut mieux que *A*,

C vaut mieux que *B*,

B vaut mieux que *C*,

B vaut mieux que *A*,

les deux propositions qui forment la première, ont chacune une plus grande pluralité ou une moindre minorité que celles qui forment la seconde; donc *C* doit être préféré à *B*; mais entre *C* & *A*, *C* doit avoir la préférence; donc c'est en faveur de *C* que le vœu doit s'interpréter.

Observons enfin que ces systèmes contradictoires ne peuvent se présenter sans indiquer de l'incertitude dans les opinions, & ils n'auront lieu, ni si les voix étant prises à l'ordinaire, un des Candidats a plus de la moitié des voix, ni si l'on exige pour admettre les propositions qui forment le vœu, une pluralité d'un tiers.

Il résulte de toutes les réflexions que nous venons de faire, cette règle générale, que toutes les fois qu'on est forcé d'élire, il faut prendre successivement toutes les propositions qui ont la pluralité, en commençant par celles qui ont la plus grande, & prononcer d'après le résultat que forment ces premières propositions, aussi-tôt qu'elles en forment un, sans avoir égard aux propositions moins probables qui les suivent.

Si par ce moyen on n'obtient pas le résultat le moins sujet

à l'erreur , ou un résultat dont la probabilité soit au-dessus de $\frac{1}{2}$, & formé de deux propositions plus probables que leurs contradictoires , on aura du moins celui qui n'oblige pas à adopter les propositions les moins probables , & duquel il résulte une moindre injustice entre les Candidats , considérés deux à deux. Nous reviendrons sur cet objet dans la cinquième Partie.

On ne trouve ici qu'un essai très-imparfait de la théorie des décisions rendues sur des propositions compliquées , & de celle des élections : il en résulte que pour réunir les deux conditions essentielles à toute décision , la probabilité d'avoir une décision , & celle que la décision obtenue sera vraie , il faut , 1.^o dans le cas des décisions sur des questions compliquées , faire en sorte que le système des propositions simples qui les forment soit rigoureusement développé , que chaque avis possible soit bien exposé , que la voix de chaque Votant soit prise sur chacune des propositions qui forment cet avis , & non sur le résultat seul. La manière de proposer la question à décider est donc très-importante ; la fonction d'établir cette question est donc une des fonctions les plus délicates & les plus difficiles que le Corps , chargé de décider , ou ceux qui l'ont établi , puissent confier. Cependant chez les Anciens , & même chez les Modernes , elle a été presque par-tout abandonnée au hasard , ou donnée comme un pouvoir , un droit attaché à une dignité , & non imposée comme un de voir qui exige de la sagacité & de la justice.

2.^o Il faut de plus que les Votans soient éclairés , & d'autant plus éclairés , que les questions qu'ils décident sont plus compliquées ; sans cela on trouvera bien une forme de décision qui préservera de la crainte d'une décision fautive , mais qui

Résultat
général.

en même temps rendant toute décision presque impossible ; ne sera qu'un moyen de perpétuer les abus & les mauvaises loix.

Ainsi la forme des assemblées qui décident du sort des hommes, est bien moins importante pour leur bonheur que les lumières de ceux qui les composent : & les progrès de la raison contribueront plus au bien des Peuples que la forme des constitutions politiques.

Analyse de la seconde Partie.

NOUS avons supposé dans la première Partie, que l'on connoissoit la probabilité de la voix de chacun des hommes qui formoient une assemblée, le nombre des Votans, la pluralité exigée ; & nous avons cherché à déterminer la probabilité, 1.^o qu'il n'y auroit pas une décision contraire à la vérité, 2.^o qu'il y auroit une décision, 3.^o qu'il y auroit une décision conforme à la vérité, 4.^o qu'une décision rendue seroit vraie, en supposant que la pluralité qu'elle a obtenue n'est pas connue, 5.^o qu'une décision, dont la pluralité est donnée, sera vraie ; 6.^o que la décision est vraie dans le cas de la moindre pluralité.

Il est aisé de voir que la première & la troisième de ces probabilités étant connues, on a la seconde & la quatrième.

En effet, la probabilité qu'une décision est vraie, est égale à celle d'avoir une décision vraie, si on prend pour le nombre total de combinaisons celles qui donnent une décision vraie ou fautive, & si on fait abstraction de celles qui ne donnent aucune décision. La probabilité d'avoir une décision est égale à celle d'avoir une décision vraie, plus celle d'avoir une décision fautive, & l'on a cette dernière probabilité en

retranchant du nombre total des combinaisons celles qui ne donnent pas une décision fautive.

La cinquième & la sixième probabilité ne diffèrent entre elles que par le nombre qui exprime la pluralité, & doivent être regardées comme des quantités de la même forme dans les discussions mathématiques.

On suppose donc dans cette seconde Partie, que l'une de ces trois probabilités est connue, & de plus, que de ces trois choses, le nombre des Votans, la pluralité & la probabilité de chaque voix, on en connoît deux, & on cherche à déterminer la troisième, & en même temps ce qui en est une suite, les deux autres probabilités encore inconnues.

Objet de cette seconde Partie.

Comme dans plusieurs de ces questions on ne peut obtenir, par les méthodes de calcul connues, des valeurs exactes des quantités cherchées, on y supplée par des méthodes d'approximation, au moyen desquelles on obtient ces valeurs avec une précision suffisante dans la pratique.

Les probabilités que nous regardons ici comme connues, peuvent être données d'après les observations faites sur des décisions déjà rendues, ou bien l'on peut supposer qu'elles ont une certaine valeur qu'on a déterminée d'après l'assurance de la vérité des décisions qu'il est nécessaire d'avoir pour pouvoir se conduire d'après cette décision, sans blesser la prudence ou la justice.

Sens dans lesquels on peut regarder comme donnée la probabilité d'une décision

M. le Comte de Buffon a proposé * de fixer en général un certain degré de probabilité, qu'on regarderoit comme donnant la plus grande probabilité possible, & qu'on appelleroit

Nature de l'espèce de probabilité, qu'on peut regarder comme une assurance suffisante.

* Voyez l'Encyclopédie, article *Absens*, & dans l'Histoire Naturelle, l'ouvrage intitulé : *Arithmétique morale*.

certitude morale : tous les degrés de probabilité intermédiaires entre ce degré & la certitude rigoureuse, se confondroient & seroient supposés avoir la même valeur, & il ajoute que cette idée lui paroît propre à expliquer plusieurs paradoxes que le calcul des probabilités présente, & qui n'ont pas encore été suffisamment expliqués. S'écarter de l'opinion d'un homme célèbre, c'est s'imposer la nécessité de la combattre : nous prions donc l'Auteur de l'Histoire Naturelle de nous pardonner les détails où nous allons entrer.

Examen de
l'opinion de
M. le Comte
de Buffon.

I. Le principe qu'il propose est inexact en lui-même, puisqu'il tend à confondre, à faire regarder comme équivalentes deux choses d'une nature essentiellement différentes, telles que la probabilité & la certitude.

II. Ce même principe ne peut servir ni à expliquer aucun paradoxe, ni à éclaircir aucune difficulté. En effet, ce qui est faux ou paradoxal, en supposant aux quantités leurs valeurs réelles, ne devient pas vrai ou conforme à la raison commune, parce qu'il paroît tel, si on suppose aux quantités des valeurs différentes de leurs vraies valeurs. On devroit plutôt en conclure que ces nouvelles valeurs ne doivent pas même être prises pour des valeurs approchées, & que la petite différence entr'elles & les vraies valeurs ne doit pas être négligée : car c'est une condition nécessaire pour la bonté d'une méthode d'approximation, que la valeur approchée qu'elle donne puisse être substituée à la vraie valeur, sans produire une différence sensible dans les résultats.

III. La limite de la probabilité est l'unité, & cette limite en est par conséquent le seul véritable *maximum*, c'est-à-dire, la valeur la plus grande qu'on puisse supposer à la probabilité, valeur dont elle peut approcher indéfiniment, mais sans jamais y atteindre.

y atteindre. Par conséquent toute méthode où l'on donneroit à la probabilité une limite moindre, seroit défectueuse. Si l'on ignoroit la véritable limite, alors il seroit permis d'en fixer une un peu au-dessus, s'il est question de celle où la quantité a la plus grande valeur, & un peu au-dessous dans le cas contraire; mais dès que la limite est connue, il ne peut être permis de donner une valeur incertaine à une quantité dont la valeur précise est donnée.

IV. Ce ne sont pas des quantités petites en elles-mêmes qu'on néglige dans les méthodes d'approximation, mais des quantités très-petites par rapport à celles qu'on cherche à déterminer.

Ainsi, par exemple, je pourrai regarder comme égales les probabilités $\frac{999999}{1,000,000}$, $\frac{999998}{1,000,000}$, que je supposerai exprimer les espérances de vivre, & considérer comme petite par rapport à elles la différence $\frac{1}{1,000,000}$ de ces probabilités; mais il n'en est pas moins vrai que les risques de mourir $\frac{1}{1,000,000}$ & $\frac{1}{1,000,000}$, qui sont doubles l'un de l'autre, ne doivent pas être confondus. S'il y a des cas où les deux risques puissent être négligés; il en existe où un seul des deux peut l'être, & dans aucun ils ne doivent être regardés comme égaux.

V. Il résulteroit encore une erreur de cette manière de considérer la probabilité, c'est qu'elle donneroit un résultat faux si l'on supposoit une suite un peu nombreuse d'événemens ayant la même probabilité; car si on suit cette méthode, la certitude morale que l'évènement aura lieu constamment, sera la même que pour un seul évènement, quoique dans ce cas elle puisse devenir réellement au-dessous de la limite assignée.

k

Ce qu'on doit entendre par une assurance suffisante, ou par un risque que l'on peut négliger.

Ainsi au lieu d'une probabilité tellement grande qu'on puisse la confondre avec la certitude, nous chercherons une probabilité telle, qu'il seroit imprudent ou injuste d'adopter dans la pratique une proposition dont la probabilité seroit au-dessous de cette limite, & qu'on puisse au contraire se conduire avec sûreté d'après une proposition qui auroit ce degré de probabilité, ou un degré supérieur.

Cette limite de la probabilité, cette valeur la plus petite, au-dessous de laquelle on ne doit pas tomber, ne peut pas avoir une valeur fixe: sa valeur peut & doit varier, suivant les inconvéniens où l'erreur peut exposer, & ceux qui peuvent résulter d'une indécision qui empêcheroit d'agir. Elle doit varier sur-tout d'après la nature des objets sur lesquels il est question de prononcer.

Nous avons vu ci-dessus qu'il n'y avoit aucune liaison nécessaire entre la probabilité d'un événement & son existence. Ainsi le motif de regarder une probabilité comme suffisante, ne peut être tiré que des observations faites sur l'ordre commun des choses humaines, & nous ne pouvons regarder un risque comme assez petit pour être négligé, que dans le cas où nous aurions observé que les hommes sages négligent pour eux-mêmes un risque de la même nature & de la même importance lorsqu'il est aussi petit.

Par exemple, s'il s'agit du jugement d'un accusé, on peut se dire: *Je ne serai point injuste en soumettant cet homme à un jugement qui, s'il est innocent, ne l'expose qu'à un danger si petit, que lui-même, étant supposé de sang-froid, jouissant de sa raison, ayant des lumières, s'exposeroit à un danger égal pour un léger intérêt, pour son amusement, sans croire avoir besoin de courage, ou s'y verroit exposé sans en être frappé, sans presque le remarquer.*

S'il est question d'une loi civile, on peut également se dire : *Je ne serai point injuste en soumettant les hommes à cette loi, s'il est aussi probable qu'elle est juste, & par conséquent utile, qu'il est probable qu'un homme sage & éclairé, qui a placé son patrimoine d'une manière qu'il croit sûre, & sans être guidé par aucun motif d'avidité ou de convenance particulière, n'est pas exposé à le perdre.*

On pourroit dire que si l'on connoît, pour un exemple le risque que l'on peut négliger, le mal auquel ce risque expose étant aussi connu, on déterminera les risques qu'on pourra négliger dans d'autres circonstances, en supposant ces risques d'autant plus grands que le mal est moindre, & d'autant plus petits que le mal est plus grand.

Examen de la méthode où l'on suppose- roit la probabilité du danger qui peut être négligé en raison inverse de l'importance de ce danger.

Cette règle seroit précisément celle qu'ont établie les premiers Géomètres qui se sont occupés du calcul des probabilités, & qu'ils ont constamment employée dans les calculs des jeux de hasards : mais cette même règle les a conduit à des conclusions tellement opposées à la raison commune, qu'on a été obligé de reconnoître que si elle n'étoit point fautive, elle étoit du moins insuffisante, & qu'il falloit ou la modifier, ou introduire dans le calcul des considérations qu'on avoit négligées.

M. Daniel Bernoulli est le premier qui ait fait voir les inconvéniens de cette règle, & qui ait cherché des moyens d'y remédier. M. d'Alembert a depuis attaqué la règle en elle-même, & jusqu'ici les objections sont restées sans réponses.

Nous chercherons ici sur quel fondement réel cette proportion entre les valeurs des objets & la probabilité de les obtenir a pu être établie.

Supposons, par exemple, un dez de six faces, & qu'on

k ij

parie que je n'amenerai pas six, suivant cette règle, il faut, pour jouer à jeu égal, que si je mets une pièce, celui qui joue contre moi en mette cinq.

La première réflexion qui se présente, c'est qu'il n'est pas question d'une égalité rigoureuse & absolue, puisque mon adversaire a une probabilité $\frac{1}{6}$ de gagner 1, & que j'ai une probabilité $\frac{1}{6}$ de gagner 5.

Suivant la même règle, on égale encore la certitude d'avoir une pièce à la probabilité $\frac{1}{2}$ d'en avoir deux, & ici la différence des deux états est plus frappante.

Quelle est donc l'espèce d'égalité que l'on peut établir entre ces deux états? le voici. Lorsque deux personnes se déterminent à jouer un jeu avec des probabilités inégales de gagner, elles doivent chercher, comme dans toutes les conventions, à faire en sorte qu'il n'y ait ni avantages ni désavantages d'aucun côté, excepté ceux qui tiennent nécessairement à la nature de la convention.

Or dans celle qu'on fait ici, en supposant les mises proportionnelles à la probabilité du gain, on trouve, 1.^o que si l'on continue le même jeu un certain nombre de fois, plus ce nombre sera grand, plus les probabilités de gagner ou de ne pas perdre qu'aura chaque Joueur, approcheront d'être égales entr'elles & de la valeur $\frac{1}{2}$.

2.^o Que plus aussi ce nombre sera grand, plus il y aura de probabilité que chacun des Joueurs ne perdra qu'une partie donnée de sa mise totale; mais que cette probabilité, toujours croissante, ne peut avoir lieu pour aucune somme fixe donnée.

On trouvera de même que cette loi est la seule qui réunisse ces deux conditions, & qu'aucune ne donneroit la troisième. Ainsi cette règle est la seule qui rétablisse l'égalité, autant

qu'il est possible, entre deux états absolument différens, & par conséquent la seule qu'on puisse adopter.

Mais on voit également que cette égalité suppose deux conditions : la première, que le jeu se puisse répéter assez pour approcher de l'égalité entre les deux probabilités de perdre & de gagner.

La seconde, que la partie de la mise totale, au-dessous de laquelle il devient très-probable que la perte ne montera point, puisse être risquée par les deux Joueurs.

D'ailleurs on voit que dans cette même hypothèse d'une suite d'évènemens, l'état de deux Joueurs qui jouent un jeu inégal, se rapproche de celui de deux Joueurs qui jouant un jeu égal, risquent des mises égales, puisque les probabilités que l'un ou l'autre gagnera, approchent dans le second cas de l'égalité qu'elles ont toujours dans le premier : qu'il y a dans les deux également une probabilité toujours croissante que la perte de l'un ou de l'autre n'excédera pas une certaine partie de la perte totale ; & qu'enfin ni dans l'un ni dans l'autre cette probabilité croissante ne peut être pour une somme fixe donnée.

Quant à ce qui se passe dans un jeu égal, on voit que la supposition d'une mise égale ne remet pas le Joueur dans un état équivalent à celui d'un homme qui ne joue point, mais le rapproche, autant qu'il est possible, de cet état où il est sûr de ne gagner ni de perdre, en lui donnant une probabilité toujours égale de gagner ou de perdre, & une probabilité toujours croissante de ne perdre qu'une certaine partie de la mise totale.

On peut observer aussi qu'il résulte du calcul, qu'en suivant cette règle, moins la différence des probabilités & celle des mises seront grandes, plus l'inégalité ou la différence entre

l'état des deux Joueurs sera moindre; & il faudra supposer une suite moindre d'événemens pour rétablir entre ces deux états l'espèce d'égalité dont ils sont susceptibles.

Cette considération peut servir à rendre raison de presque toutes les difficultés que présente l'usage de cette règle; mais ce n'est pas ici le lieu de s'en occuper.

Examinons à présent ce qui résulteroit de l'application de cette même loi aux questions qui nous occupent, & supposons, par exemple, qu'on établisse cette proposition : *la probabilité qu'un accusé condamné est coupable, doit être à la probabilité qu'un accusé renvoyé est innocent, comme l'inconvénient de condamner un innocent est à celui de renvoyer un coupable.*

Il est évident que nous devons avoir pour chaque jugement une probabilité suffisante qu'un accusé condamné est coupable. Or, l'existence de cette probabilité ne seroit pas du tout une conséquence de cette règle; il en résulteroit seulement que sur un grand nombre de jugemens, le nombre des innocens condamnés & celui des coupables renvoyés, approcheroient d'être dans le rapport inverse des inconvéniens qui en résultent, c'est-à-dire, qu'on auroit une grande probabilité de faire à peu-près autant de mal à la société en renvoyant des coupables qu'en condamnant des innocens.

Si on choisissoit une plus grande probabilité de ne pas condamner un innocent, alors à la longue on feroit plus de mal à la société en renvoyant des coupables qu'en condamnant des innocens.

Dans l'hypothèse contraire, le mal qui résulteroit de la condamnation des innocens seroit plus grand à la longue que celui qui naîtroit du renvoi des coupables.

De même, dans le premier cas, la somme du mal total

qui en résulteroit pour la société, seroit probablement moindre durant un long espace de temps, mais aussi ce moindre mal seroit plus probable.

Le seul usage qu'on pourroit faire de cette règle, seroit donc de fixer la limite où le danger de condamner un innocent & celui de renvoyer un coupable, se trouvent égaux, & par conséquent au-dessous de laquelle on ne doit jamais se permettre de condamner; en sorte que si une probabilité moindre donnoit une assurance de ne pas condamner un innocent, que d'ailleurs on pût regarder comme suffisante, il ne faudroit pas s'en contenter.

Mais dans aucun cas il n'en résulteroit qu'on eût pour chaque décision une probabilité suffisante du crime: ainsi quand il seroit vrai que cet équilibre entre les deux risques fût utile à établir pour une suite nombreuse de jugemens, & que ce fût le moyen de faire en sorte que l'erreur fit le moindre mal possible à la société, il seroit injuste & tyrannique de l'établir, parce qu'il résulteroit une véritable lésion pour chaque homme en particulier. La société, si l'on veut, joueroit alors un jeu égal, parce qu'elle le répète un nombre indéfini de fois; mais il n'en seroit pas de même d'un individu qui, relativement au petit risque qu'il a pu courir de la part des coupables renvoyés, n'a pu jouer qu'un nombre de coups, beaucoup trop petit pour que l'égalité ait lieu pour lui.

Nous demandons pardon d'employer le mot de *jeu* dans une matière aussi grave, mais Pascal nous en a donné l'exemple.

Ce sera donc uniquement d'après des considérations, tirées de la nature même des questions à décider, & d'après l'observation, que nous déterminerons les probabilités qui doivent être regardées comme suffisantes; & au lieu de faire les

Méthode qu'il convient de suivre pour déterminer l'assurance.

probabilités en raison inverse des maux qui résultent de l'erreur, il faut chercher pour chacun de ces maux la probabilité que pour ce genre & ce degré de mal, on peut regarder comme donnant une assurance assez grande, & ce sujet sera traité dans la troisième Partie.

Des Tribunaux où le nombre des Juges n'est pas constant, considérés relativement à la pluralité exigée.

Nous examinons à la fin de cette seconde Partie l'usage établi dans plusieurs pays, de fixer le nombre de Juges nécessaire pour porter une décision, & la pluralité à laquelle elle doit être rendue, mais en admettant dans le Tribunal un nombre de Juges plus grand, ce qui fait que ce nombre n'est pas constant.

Dans ce cas, si le nombre de Juges exigé est impair, & la moindre pluralité paire, ou au contraire, il est clair que le nombre des Juges étant augmenté d'une unité, la pluralité exigée se trouvera aussi diminuée d'une unité.

Par exemple, si 7 est le nombre des Juges, & 2 la pluralité exigée, il faudra une pluralité de 3 pour 7 Juges, & la pluralité 2 pour 8 Juges. Si 8 est le nombre des Juges, & 3 la pluralité exigée, il faudra une pluralité de 4 pour 8 Juges, & une de 3 pour 9.

Si le nombre de Juges exigé est impair, ainsi que la pluralité exigée, ou que tous deux soient pairs, alors si le nombre des Juges augmente d'une unité, la pluralité augmentera d'une unité.

Par exemple, si 8 est le nombre des Juges, & 2 la pluralité, il faudra la pluralité 3 pour 9 Juges; & si 7 est le nombre des Juges, & 3 la pluralité exigée, il faudra la pluralité 4 pour 8 Juges.

Ainsi en général, si la pluralité est paire ou impaire, il y aura plus de sûreté pour l'accusé, moins d'espérance d'avoir
une

une décision, & moins à craindre qu'un innocent ne soit condamné, lorsque le nombre des Juges est de la dénomination contraire.

D'où il résulte que, pour ne pas faire dépendre du hasard le plus ou le moins de sûreté de l'accusé, il faut faire en sorte que dans le cas le plus défavorable, cette sûreté soit telle qu'on ne trouve aucun avantage sensible à exiger la pluralité d'une voix de plus.

Si le nombre des Juges & la pluralité sont de la même dénomination, & qu'un Juge s'absente, il remplit précisément le même objet que s'il votoit pour l'accusé.

S'il survient un Juge, & qu'il vote contre, il n'expose l'accusé à aucun risque de plus; s'il vote pour lui, il le sauve dans une des combinaisons possibles de voix.

Si au contraire le nombre des Juges & la pluralité sont de dénominations contraires, & qu'un Juge s'absente, il fait précisément le même effet que s'il condamnoit l'accusé: si un nouveau Juge survient, il ne change rien s'il est pour l'accusé; mais s'il est contre, il y a une combinaison de voix où il détermine la condamnation.

On voit donc qu'il résultera de cette constitution de Tribunaux, & de l'incertitude dans les jugemens, & peut-être même des abus, parce qu'il faut moins de pouvoir sur un Juge pour le déterminer à s'absenter d'un jugement ou à se joindre aux autres Juges, que pour le faire voter pour ou contre, quoiqu'il puisse savoir, par réflexion, que l'effet en est le même.

Ainsi cette forme doit être regardée comme vicieuse, à moins que le grand nombre des Juges, ou la sûreté résultante de la moindre pluralité, n'en rende les inconvéniens

très-rares & insensibles. Encore vaudroit-il mieux, si on ne veut pas rendre invariable le nombre des Juges, établir le nombre des Juges nécessaire pour former une décision de la même dénomination que la pluralité exigée; & le Tribunal étant une fois d'un nombre de cette même dénomination, établir que de nouveaux Juges ne pourront y entrer, ni les premiers s'en retirer que deux à deux.

La même réflexion s'applique aux cas où l'on exigeroit une pluralité proportionnelle.

Analyse de la troisième Partie.

Objet
de cette Partie.

NOUS nous proposons dans cette troisième Partie, de donner les moyens, 1.^o de déterminer par l'observation la probabilité de la vérité ou de la fausseté de la voix d'un homme ou de la décision d'un Tribunal; 2.^o de déterminer également, pour les différentes espèces de questions qu'on peut avoir à résoudre, la probabilité que l'on peut regarder comme donnant une assurance suffisante, c'est-à-dire, la plus petite probabilité dont la justice ou la prudence puisse permettre de se contenter.

Deux
méthodes de
déterminer la
probabilité des
voix.

Pour résoudre la première question, nous emploierons deux méthodes: la première consiste à déterminer la probabilité d'un jugement futur, d'après la connoissance de la vérité ou de la fausseté des jugemens déjà rendus.

1.^o D'après
la connoissan-
ce de la vérité
ou de la fauf-
feté des juge-
mens déjà
rendus.

Il faut donc chercher d'abord une méthode de déterminer cette probabilité, & ensuite un moyen de connoître la fausseté ou la vérité de jugemens rendus, & d'appliquer à la méthode de déterminer la probabilité des Jugemens futurs l'espèce de connoissance qu'on peut acquérir sur cette vérité; connoissance qui, comme il est facile de le voir, ne peut être aussi qu'une probabilité.

La seconde méthode a également pour but de déterminer

la probabilité des jugemens futurs d'après celle des jugemens rendus ; mais en employant uniquement cette seule supposition, que la probabilité qu'un homme décidera plutôt en faveur de la vérité que de l'erreur, est au-dessus de $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, en supposant qu'un homme qui porte un jugement se décidera plutôt en faveur de la vérité que de l'erreur.

1.° D'après l'hypothèse, que dans ces jugemens la probabilité de chaque voix est au-dessus de $\frac{1}{2}$.

Cette supposition paroîtra d'abord très-naturelle, & elle doit d'autant plus être admise, que dans l'hypothèse contraire il devient absurde de rien faire décider à la pluralité des voix, du moins en regardant ce genre de décision comme un moyen de parvenir à la vérité, & non comme faisant connoître la volonté du plus grand nombre, c'est-à-dire, la volonté du plus fort.

L'idée de chercher la probabilité des évènements futurs d'après la loi des évènements passés, paroît s'être présentée à Jacques Bernoulli & à Moivre, mais ils n'ont donné dans leurs ouvrages aucune méthode pour y parvenir.

Méthode générale de chercher la probabilité des évènements futurs d'après la loi des évènements passés.

M.^{rs} Bayes & Price en ont donné une dans les Transactions philosophiques, années 1764 & 1765, & M. de la Place est le premier qui ait traité cette question d'une manière analytique.

La question fondamentale se réduit à celle-ci : si de deux évènements contraires, l'un est arrivé cent fois, par exemple, & l'autre pas une seule, on bien si l'un est arrivé cent fois & l'autre cinquante, quelle est la probabilité que le premier arrivera plutôt que le second ?

Principes de cette méthode

Cette question suppose que la probabilité des deux évènements demeure constamment la même à chaque fois qu'ils se reproduisent, c'est-à-dire, que la loi inconnue qui en détermine la production est constante. En effet, sans cette

Elle suppose que la loi des évènements est constante.

condition, le calcul, ainsi que le simple bon sens, font connoître que la probabilité pour l'avenir sera égale pour les deux évènements, de quelque manière que les évènements passés se soient succédés.

Probabilité
de l'existence
d'une loi constan-
te,

Mais aussi le calcul donne en même temps la probabilité de l'existence d'une loi constante dans la production des évènements.

Et il conduit aux résultats suivans.

1.° Si la différence du nombre de fois qu'arrivent le premier & le second évènement est proportionnel au nombre total, la probabilité que la loi de leur production est constante, peut croître indéfiniment; 2.° si au contraire cette différence est nulle ou constante, & n'augmente pas avec le nombre des évènements, la probabilité que la loi est constante décroît indéfiniment; d'où il résulte que le nombre des évènements étant même fort grand, si la différence du nombre de fois que chacun d'eux est arrivé, n'est pas dans une proportion sensible avec la totalité des évènements, la probabilité de la constance de la loi de production peut être très-petite. On trouve enfin que pour avoir la probabilité d'un évènement futur, d'après la loi que suivent les évènements passés, il faut prendre, 1.° la probabilité de cet évènement dans l'hypothèse que la production en est assujettie à des loix constantes; 2.° la probabilité du même évènement dans le cas où la production n'est assujettie à aucune loi; multiplier chacune de ces probabilités par celle de la supposition en vertu de laquelle on l'a déterminée, & diviser la somme des produits par celle des probabilités des deux hypothèses.

Moyen qui
en résulte d'a-
voir la proba-
bilité des évè-
nemens futurs
lorsqu'on
ignore si la loi
de leur
production
est constante.

Supposons, par exemple, qu'un évènement soit arrivé trois fois & un autre une fois: si la loi de leur production est

constante, la probabilité que le premier évènement arrivera plus tôt que l'autre, est $\frac{4}{6}$; & si la loi n'est pas constante, cette même probabilité est $\frac{1}{2}$. Mais dans cette même hypothèse la probabilité que la loi est constante, est $\frac{1}{20}$, & celle que la loi n'est pas constante, est $\frac{1}{6}$: la probabilité du premier évènement sera donc $\frac{4}{120}$ plus $\frac{1}{32}$, le tout divisé par $\frac{1}{20}$ plus $\frac{1}{6}$, c'est-à-dire, $\frac{62}{108}$ au lieu de $\frac{72}{108}$ ou $\frac{4}{6}$, qu'on auroit eu si l'on avoit été sûr que la loi de production étoit constante.

Si l'on regarde comme constante la loi de la production des deux évènements contraires, & que l'on connoisse le nombre de fois que chaque évènement est arrivé, le calcul donnera la probabilité que l'un des évènements arrivera une fois de plus; mais il est bon d'exposer ici ce que donne réellement le calcul, & ce que l'on doit entendre par cette probabilité.

On voit que ce ne peut être la vraie probabilité. Supposons en effet qu'il y ait dans une urne cent billets blancs & un noir, & que l'on ait tiré quatre-vingts fois un billet blanc, & une fois un noir, en ayant soin de rejeter à chaque fois dans l'urne le billet qui en a été tiré, il est clair que si je ne connois que ce fait avec le nombre total des billets, & que j'ignore qu'il y avoit cent billets blancs & un noir dans l'urne, jamais je ne le pourrai deviner d'une manière certaine, ni par conséquent connoître la véritable probabilité qui dépend du rapport du nombre des billets blancs à celui des billets noirs; mais je pourrai faire le raisonnement suivant. S'il y a cent un billets blancs, la probabilité d'amener un billet blanc sera 1, ou la certitude: s'il y a cent billets blancs & un noir, celle d'amener un billet blanc sera $\frac{100}{101}$, & ainsi de suite, mais dans chacune de ces suppositions j'ai une certaine probabilité

Probabilité des évènements futurs, dans le cas où la loi est constante.

On ne connoît pas la vraie probabilité, mais seulement une probabilité moyenne.

d'amener quatre-vingts billets blancs & un noir ; & par conséquent puisque ce nombre a été amené, j'aurai pour la probabilité que cette hypothèse a lieu, celle d'amener quatre-vingts billets blancs & un noir dans cette hypothèse, divisée par la somme des probabilités d'amener le même nombre dans toutes les hypothèses possibles. En effet, la probabilité d'une chose est le nombre des combinaisons où cet évènement arrive, divisé par le nombre total des combinaisons. Or, ici le nombre des combinaisons qui répondent dans chaque hypothèse à l'évènement d'avoir tiré quatre-vingts billets blancs & un noir, est représenté par la probabilité d'amener quatre-vingts billets blancs & un noir dans cette hypothèse ; & par la même raison, la somme de cette probabilité dans toutes les hypothèses représente le nombre de toutes les combinaisons possibles : donc en multipliant la probabilité d'amener un billet blanc dans chaque hypothèse par la probabilité de cette hypothèse, & divisant la somme de ces produits par celle des probabilités de ces hypothèses, j'aurai la probabilité d'amener le billet, puisque j'aurai le nombre de toutes les combinaisons où ce billet arrive, divisé par celui de toutes les combinaisons possibles.

Tels sont les principes sur lesquels ce calcul est fondé, à cela près que l'on suppose plus grand qu'aucune quantité donnée le nombre des billets, & par conséquent celui des différens rapports que peuvent avoir entr'eux le nombre des billets blancs & celui des noirs.

Ce n'est donc pas la probabilité réelle que l'on peut obtenir par ce moyen, mais une probabilité moyenne.

Ainsi, non-seulement comme dans tout le calcul des probabilités il n'y a aucune liaison nécessaire entre la probabilité

& la réalité des évènements, mais il n'y en a non plus aucune entre la probabilité donnée par le calcul & la probabilité réelle. C'est cependant, comme nous l'avons déjà exposé dans le commencement de ce Discours, sur des probabilités de cette espèce que roulent toutes nos connoissances & que sont appuyés tous les motifs qui nous guident dans la conduite de notre vie. Cette incertitude peut paroître effrayante, mais il est utile de la faire connoître; c'est même le seul moyen solide d'attaquer le pirrhonisme, qui n'a jamais pu être combattu avec avantage tant que la méthode d'affujettir les probabilités au calcul a été ignorée. En effet, il étoit facile de montrer que dans toutes nos connoissances, même les plus certaines, dans celles qui sont fondées sur les raisonnemens les plus rigoureux, il reste toujours une incertitude attachée à notre nature, & il étoit impossible de prouver qu'on avoit tort d'en conclure que nous étions condamnés à demeurer dans un doute absolu, à moins de montrer que cette incertitude avoit différens degrés susceptibles d'être appréciés & mesurés.

Conséquences qui résultent de ces principes, relativement à la certitude des connoissances humaines.

Difficulté d'attaquer solidement le pirrhonisme tant que cette doctrine a été inconnue.

Dans la question que nous examinons ici, le calcul donne la probabilité de l'évènement qui est arrivé le plus souvent plus grande que celle de l'évènement contraire; mais ces probabilités ne sont pas entr'elles dans le même rapport que le nombre des évènements.

La probabilité de l'évènement qui est arrivé le plus souvent, est plus grande que celle de l'évènement contraire, mais elle n'est pas proportionnelle au nombre des évènements.

Par exemple, si le premier évènement est arrivé cent fois, & le second cinquante, la probabilité du premier sera $\frac{101}{152}$, & celle du second $\frac{51}{152}$, au lieu d'être $\frac{100}{150}$ & $\frac{50}{152}$, comme elles le seroient si elles étoient proportionnelles au nombre des évènements. La probabilité est ici un peu moindre, mais plus le nombre des évènements d'après lesquels on la cherche

est grand, plus elle approche de cette limite. Ainsi cette façon commune de parler, *cet évènement est arrivé cent fois contre cinquante, donc on a 2 à parier contre 1 qu'il arrivera*, est inexacte en elle-même, mais elle approche beaucoup de la vérité, si la proportion a été établie sur un très-grand nombre d'évènements.

Si un évènement est arrivé cent mille fois & l'autre cinquante mille fois, la probabilité du premier est $\frac{100000}{150000}$ au lieu de $\frac{2}{3}$, celle du second est $\frac{50000}{150000}$ au lieu de $\frac{1}{3}$; celle du premier est donc seulement plus petite, & celle du second plus grande d'un $\frac{1}{30000}$.^e Mais pour que les probabilités soient exactement comme le nombre des évènements, pour que la probabilité moyenne soit égale à la probabilité absolue, & qu'on puisse la regarder comme invariable, il faut que le nombre des évènements soit infini: en sorte que l'avantage de connoître une probabilité absolue & constante, est ici une limite dont on peut approcher indéfiniment, mais que jamais on ne peut atteindre.

Probabilités
d'avoir diffé-
rentes espèces
de pluralités
en faveur d'un
évènement, ou
de ne pas les
avoir contre.

Nous avons cherché dans la première Partie à déterminer la probabilité que sur un nombre donné d'évènements contraires, celui qui étoit le plus probable n'auroit pas contre lui, ou auroit en sa faveur une certaine pluralité, soit constante, soit proportionnelle. On peut demander ici la probabilité d'avoir en faveur d'un évènement une pluralité aussi, soit constante, soit proportionnelle, lorsqu'on fait seulement que cet évènement & l'évènement contraire sont arrivés un certain nombre de fois, ou bien la probabilité de n'avoir pas la même pluralité contre cet évènement.

Pluralité
constante.

Si la pluralité est constante, on trouvera que l'évènement qui a obtenu la pluralité aura, après un certain nombre d'évènements,

d'évènemens, une probabilité toujours croissante d'avoir la pluralité exigée ; mais cette probabilité ne croît pas indéfiniment jusqu'à l'unité, comme dans le cas où cet évènement auroit eu lui-même une probabilité plus grande que $\frac{1}{2}$; elle est renfermée dans de certaines limites qui ne dépendent point de la grandeur de la pluralité exigée ; mais de celle qui a eu lieu dans les évènemens passés.

Par exemple, si on a tiré deux boules blanches d'une urne sans en tirer une noire, la probabilité que l'on tirera plus souvent une boule blanche qu'une noire, sera d'autant plus grande qu'on tirera plus de boules, mais elle ne sera jamais au-dessus de $\frac{7}{8}$.

Si on avoit tiré deux blanches & une noire, la probabilité de tirer plus souvent des blanches dans un nombre donné de coups, ne sera jamais au-dessus de $\frac{11}{16}$.

Dans la même hypothèse, la probabilité que l'évènement qui a obtenu la pluralité n'arrivera pas moins souvent que l'autre un nombre donné de fois, a les mêmes limites ; mais elle ne croît pas toujours après un certain terme ; & toutes les fois que la pluralité de cet évènement est moindre que le double de la pluralité exigée moins deux, cette probabilité finit par être continuellement décroissante.

Ainsi, par exemple, si l'on a tiré deux boules blanches, la probabilité que le nombre des boules noires, dans une suite de tirages successifs, ne surpassera point de trois unités celui des blanches, approchera continuellement de $\frac{7}{8}$ à mesure qu'on augmentera le nombre des tirages, mais jusqu'à un certain terme elle sera plus grande. En effet, pour trois évènemens seulement, elle est $\frac{19}{20}$; & pour cinq elle n'est plus que $\frac{261}{280}$.

Pluralité proportionnelle.

Si on veut que la pluralité soit proportionnelle, on trouvera de même que la probabilité que l'évènement qui a obtenu la pluralité obtiendra dans la suite cette pluralité proportionnelle, ira toujours en croissant au bout d'un certain terme, pourvu que ce même évènement ait obtenu dans le passé une pluralité qui soit dans la même proportion que la pluralité exigée, plus un nombre constant, ou une proportion plus forte, mais cette probabilité ne croît pas jusqu'à l'unité, & elle a des limites. Par exemple, si on a tiré deux boules blanches & point de noires, la probabilité de tirer deux fois plus de boules blanches que de noires, ne pourra croître au-delà de $\frac{1}{2}$. Si on avoit amené en deux boules blanches & une noire, la limite de la même probabilité seroit alors $\frac{1}{3}$, mais dans ce cas elle aura d'abord été plus grande, & décroîtra après un certain terme.

La probabilité qu'un évènement n'aura pas contre lui une pluralité proportionnelle, sera croissante si cet évènement n'a pas eu contre lui, dans les évènements passés, une pluralité dans la même proportion, plus un nombre constant, ou dans une proportion plus grande; mais cette probabilité ne pourra devenir égale à l'unité, & sera renfermée dans certaines limites. Par exemple, si nous avons tiré deux boules blanches, la probabilité que le nombre des noirs ne surpassera pas d'un tiers celui des blanches, ne pourra croître au-delà de $\frac{2}{3}$; si on avoit eu deux boules blanches & une noire, la même probabilité ne pourroit croître au-delà de $\frac{1}{2}$.

Les mêmes conclusions ont lieu, quelque grand que soit le nombre des évènements passés, pourvu qu'il soit fini; mais si on le suppose infini ou plus grand qu'aucune quantité donnée, alors on aura précisément les mêmes résultats que dans la première Partie.

Conséquence
de cette théo-
rie, relative-
ment à la cer-
titude de nos
connoissances.

On peut conclure de cette théorie, 1.^o que, à quelque nombre que soient portées les observations de la constance d'un effet, la probabilité que cet effet ne manquera jamais, ira toujours en décroissant à mesure qu'on cherchera cette probabilité pour un temps plus long, de manière qu'elle sera zéro si l'on suppose le temps infini.

2.^o Que si on se contente de la probabilité que cet événement manquera rarement, comme une fois sur mille, une fois sur dix mille, cette probabilité sera d'autant plus grande; que le nombre des observations aura été plus grand, mais qu'elle ne peut être égale à l'unité tant que le nombre des observations est fini.

3.^o Que quelque constance qu'on ait observé dans une loi de la Nature, on ne peut jamais avoir une probabilité au-dessus de $\frac{1}{2}$, qu'elle continuera indéfiniment d'avoir la même constance; seulement on pourra avoir une probabilité assez grande pour un temps fini & déterminé: mais aussi à mesure que de nouvelles observations confirment la constance de cette loi, cette probabilité devient plus grande pour le même temps, ou reste la même, mais pour un temps plus long.

4.^o Que l'on aura de même une probabilité toujours croissante avec le nombre des observations; que pendant une durée, même infinie, cette constance ne cessera d'avoir lieu que pour un nombre d'événemens, ayant une certaine proportion donnée avec le nombre total. Mais quelle que soit cette proportion établie & le nombre de fois que l'événement est arrivé constamment, cette probabilité aura toujours une limite moindre que l'unité.

5.^o Que si au lieu d'une loi constante, c'est-à-dire, d'une

évènement qui n'a jamais manqué d'arriver, on a au contraire seulement un évènement qui arrive plus souvent qu'un autre; suivant une certaine proportion; on aura de même des probabilités, ou que l'évènement qui est arrivé le plus souvent conservera le même avantage, ou que la proportion entre les évènements futurs s'éloignera très-peu de la proportion observée; probabilités qui pour un temps infini croîtront avec le nombre des observations, mais n'auront pas l'unité pour limite tant que ce nombre restera fini.

6.° Comme nous avons supposé ici que les évènements étoient assujettis à une loi de production constante, les déterminations précédentes doivent encore être corrigées d'après ce que nous avons dit ci-dessus; & pour avoir la vraie probabilité, il faudra la prendre dans les deux hypothèses; multiplier celle qu'on trouvera pour chacune par la probabilité de chaque hypothèse, & diviser cette somme par celle de ces dernières probabilités. Mais on trouvera que s'il s'agit de la constance d'un évènement, plus on aura d'observations où cette constance existe, plus l'hypothèse que la loi de production est constante, sera probable; en sorte que les conclusions précédentes ne changent point par cette nouvelle considération, à cela près que la probabilité est un peu plus petite.

S'il s'agit seulement de la probabilité que l'évènement qui est arrivé plus souvent que l'autre, conservera le même avantage, soit absolument, soit dans la même proportion ou dans une proportion approchante, on aura encore les mêmes conclusions, avec une simple diminution de probabilité qui sera peu importante.

Le seul cas où le changement sera très-sensible, est celui où la pluralité des évènements passés est petite par rapport à

leur nombre total, parce qu'alors la probabilité que la production est assujettie à une loi quelconque, n'est pas très-grande par rapport à celle que la production n'est assujettie à aucune loi.

Voilà donc à quelles limites s'arrête notre connoissance des évènements futurs, des loix mêmes de la Nature regardées comme les plus certaines & les plus constantes. Non-seulement nous n'avons aucune certitude, ni même aucune probabilité réelle, mais nous avons une probabilité moyenne que les évènements sont assujettis à une loi constante, & ensuite une probabilité moyenne que la loi indiquée par les évènements est cette même loi constante, & qu'elle sera perpétuellement observée; probabilité qui est encore affoiblie, parce que nous n'avons qu'une probabilité aussi moyenne & de la vérité des observations & de la justesse du raisonnement employé à en déduire des conséquences.

Mais cette conclusion, loin de nous conduire, comme l'ancien pirrhonisme, au découragement & à l'indolence, doit produire l'effet contraire, puisqu'il en résulte que nos connoissances de toute espèce sont fondées sur des probabilités dont il est possible de déterminer la valeur avec une sorte d'exactitude; & qu'en cherchant à les déterminer, nous parvenons à juger & à nous conduire, non plus d'après une impression vague & machinale, mais d'après une impression assujettie au calcul, & dont le rapport avec les autres impressions du même genre nous est connu. (*Voyez première Partie, page xiv*).

Revenons maintenant à l'objet de cet Ouvrage. Je suppose que l'on connoisse un certain nombre de décisions formées par des Votans, dont la voix a la même probabilité que celle des Votans sur les décisions futures, de la vérité desquelles on veut

Limites étroites de nos connoissances sur les évènements futurs.

Détermination de la probabilité des votes.

Établissement
d'un Tribunal
d'examen pour
les décisions
passées, &
méthode de
s'en servir pour
déterminer
d'une manière
approchée la
probabilité des
voix & des dé-
cisions.

acquérir une certaine assurance. Je suppose de plus que l'on ait choisi un nombre assez grand d'hommes vraiment éclairés, & qu'ils soient chargés d'examiner une suite de décisions dont la pluralité est déjà connue, & qu'ils prononcent sur la vérité ou la fausseté de ces décisions: si parmi les jugemens de cet espèce de Tribunal d'examen, on n'a égard qu'à ceux qui ont une certaine pluralité, il est aisé de voir qu'on peut, sans erreur sensible, ou les regarder comme certains, ou supposer à la voix de chacun des Votans de ce Tribunal une certaine probabilité un peu moindre que celle qu'elle doit réellement avoir, & déterminer, d'après cette supposition, la probabilité de ces jugemens. En effet, puisqu'on cherche à se procurer une assurance pour les jugemens futurs, il est clair que celle qu'on se procurera par cette dernière hypothèse, & qui doit pouvoir être regardée comme suffisante, sera au-dessous de la probabilité réelle, & que par conséquent on sera certain d'avoir dans la réalité une assurance même plus grande que celle qu'on a cru devoir exiger.

On ne peut faire qu'une seule objection sur le fond de cette méthode, c'est qu'en n'admettant que les jugemens qui ont été formés par le Tribunal d'examen avec une certaine pluralité; les données qu'on se procure ne sont établies que d'après les décisions clairement bonnes ou clairement mauvaises, & non sur les douteuses, qui forment peut-être le plus grand nombre.

Pour discuter la valeur de cette objection, il faut observer qu'il y a trois espèces de décisions: les unes ont pour objet des vérités ou des faits susceptibles de preuves permanentes; & dans ces cas, si le Tribunal d'examen est vraiment composé d'hommes éclairés, le nombre des jugemens qui n'auront pas

la pluralité exigée doit être très-petit, & la pluralité ne peut guère demeurer au-dessous de cette limite que pour des questions très-épineuses; en sorte qu'il y auroit plus d'inconvénient que d'avantage à faire entrer dans l'évaluation des probabilités les décisions rendues sur des questions de ce genre.

Les décisions de la seconde espèce s'appuient sur des faits dont les preuves ne sont pas permanentes, & d'après lesquels on doit prononcer en faveur de ce qui est le plus probable, quoique la probabilité soit très-petite. Dans ce cas il doit arriver plus fréquemment que le Tribunal d'examen n'ait pas la pluralité demandée; mais aussi on doit conclure de cette petite pluralité, que pour ces mêmes décisions la probabilité réelle de la décision en elle-même étoit très-petite; puisqu'il est très-difficile pour des hommes très-éclairés, de distinguer quel est celui des deux avis en faveur duquel existe ce foible avantage de probabilité. Cette difficulté sera donc plus grande encore pour les Votans, de la voix desquels on cherche à déterminer la probabilité; d'où il résulte qu'il y auroit de l'inconvénient à employer ces décisions pour cette détermination.

La troisième espèce est celle où l'on juge sur des faits, mais avec cette condition de ne prononcer que dans le cas où il s'est suffisamment prouvé: alors c'est sur la suffisance ou l'insuffisance de la preuve que tombe la décision du Tribunal d'examen; & par conséquent ce troisième cas se confond avec le premier. L'on voit donc qu'en général le petit nombre de jugemens où le Tribunal d'examen n'aura pas la pluralité, appartient à des questions douteuses en elles-mêmes; sur lesquelles les assemblées dont on a examiné les décisions, n'ont, pour ainsi dire, prononcé qu'au hasard, & qu'ainsi au lieu

d'employer ces décisions à faire connoître la probabilité moyenne de la voix de ceux qui les ont rendues, il vaut mieux examiner ces questions en elles-mêmes, voir quelle peut être la cause de leur incertitude, & chercher les moyens d'y remédier.

Supposons, par exemple, qu'il soit question de jugemens sur les questions réglées par les loix civiles; si l'on observe une grande incertitude dans ces jugemens, incertitude indépendante, comme elle le seroit ici du peu de lumières des Juges, il est évident que ce n'est pas dans la forme des jugemens, mais dans la loi même que l'on doit chercher le mal & le remède; & que l'ayant une fois trouvé, on peut supposer que les Juges pourront décider ces mêmes questions avec autant de probabilité que les autres, c'est-à-dire, par conséquent avec celle qu'on aura déterminée, en rejetant de l'examen, les décisions rendues sur ces questions, dont la solution a paru incertaine.

1.° Dans le cas où l'on ne considère qu'une décision isolée

On déterminera d'abord pour une seule décision future la probabilité qui résulte des jugemens portés par le Tribunal d'examen, & il est aisé de voir que si l'on suppose que l'on ignore, la pluralité à laquelle ont été rendues les décisions intermédiaires entre cet examen & celle que l'on considère, la probabilité de cette décision sera toujours la même, quelque rang qu'elle occupe dans la suite des décisions, puisque toutes les combinaisons de voix possibles doivent être regardées comme pouvant avoir eu lieu chacune avec le degré de probabilité qui leur convient.

2.° Dans celui où l'on connoît les décisions intermédiaires.

Mais on peut supposer que l'on connoisse la pluralité des décisions intermédiaires. Dans ce cas on a d'abord, par la méthode précédente pour la première décision, la probabilité qu'elle est vraie & la probabilité qu'elle est fautive. En considérant séparément

séparément ces deux hypothèses, on a pour chacune la probabilité qu'une seconde décision est vraie ou fausse, & par conséquent quatre systèmes pour le nombre de voix vraies ou fausses, qui ont chacun une probabilité différente, mais connue. On aura huit de ces systèmes après trois décisions, & ainsi de suite. Cela posé, si on cherche la probabilité d'une décision future, on la prendra dans ces différens systèmes, &, multipliant celle qui résulte de chaque système par la probabilité du système, on aura la probabilité moyenne de la décision future.

Par ce moyen l'on déterminera d'abord la probabilité des jugemens de l'assemblée à laquelle les décisions seront confiées, & on l'aura pour chaque jugement qui doit entrer dans la suite des décisions futures; ensuite à chaque époque, prise dans cette suite, on connoîtra cette même probabilité pour l'époque qui doit suivre, d'après la pluralité qu'ont eue les jugemens dans la suite des décisions passées.

Cette dernière recherche est importante. En effet, si cette probabilité moyenne ainsi déterminée se trouve, au bout d'un certain nombre de décisions, sensiblement différente de ce qu'elle auroit été trouvée pour une décision future, d'après le seul résultat des jugemens du Tribunal d'examen, il devient très-vraisemblable que la probabilité a changé. On peut donc connoître par ce moyen la nécessité de changer la forme de l'assemblée de décision, si elle cesse de donner une assurance suffisante; ou du moins la nécessité de recourir à un nouvel examen, si cette diminution de probabilité annonce dans celle de chaque voix un changement dont l'effet puisse devenir sensible.

Utilité de
cette dernière
recherche.

Comme l'objet principal qu'on se propose ici est de se

”

Détermination
d'une limite
de probabilité
au-dessous
de laquelle on
peut supposer
que les voix
ne tomberont
pas.

procurer une probabilité aussi grande que la justice & la sûreté l'exigent, & que ce n'est pas même la vraie probabilité, mais une probabilité moyenne que nous pouvons parvenir à connoître, on doit en inférer que ce n'est pas d'après cette probabilité moyenne qu'il faut chercher à se procurer l'assurance exigée, mais qu'il faut déterminer une limite au-dessous de laquelle on ait une première assurance que la probabilité d'aucune des voix ne tombera, & prendre ensuite cette limite pour la probabilité de chaque voix. Cette méthode est la plus sûre, mais elle exige nécessairement un très-grand nombre d'observations, sans quoi la limite assignée différoit beaucoup de la probabilité moyenne; & le résultat du calcul, en donnant à la vérité une sûreté très-grande, s'écarteroit trop de la réalité, & forceroit à prendre des précautions incommodes & superflues.

Difficulté
pratique de
cette première
méthode.

Cette première méthode de déterminer la probabilité, ne peut avoir dans la pratique qu'un seul inconvénient; la difficulté de composer le Tribunal d'examen, le long temps qui seroit nécessaire pour qu'il pût examiner un grand nombre de décisions, & les embarras qui peuvent rendre cet examen difficile dans beaucoup de circonstances. Ainsi, quoique dans la théorie elle soit moins hypothétique, plus directe & plus naturelle que la seconde méthode que nous allons développer, cependant celle-ci peut mériter la préférence dans la pratique. En effet, il suffit de connoître pour chaque espèce de question un grand nombre de décisions, le nombre des Votans pour chacune, & la pluralité à laquelle elle a été tendue. Le reste se détermine par le calcul.

Seconde
méthode, dé-
duite de la
seule supposi-

Nous avons dit que cette seconde méthode consistoit à supposer seulement que la probabilité de la vérité de la voix

de chaque homme est entre 1 & $\frac{1}{2}$, & celle de l'erreur entre $\frac{1}{2}$ & zéro.

tion que la probabilité des voix est toujours au-dessus de $\frac{1}{2}$.

Cette supposition une fois admise, si l'on a un évènement quelconque *A* arrivé un certain nombre de fois, & l'évènement contraire *N* arrivé un autre nombre de fois, on aura par le calcul, 1.° la probabilité que c'est l'évènement *A* plutôt que l'évènement *N*, dont la probabilité est entre 1 & $\frac{1}{2}$; 2.° la probabilité que l'évènement *A* arrivera plutôt que *N*; ou bien que sur un nombre donné d'évènements, *A* aura sur *N* une certaine pluralité; 3.° & c'est le point qui nous intéresse ici, la probabilité que l'évènement, quel qu'il soit, dont la probabilité est entre 1 & $\frac{1}{2}$, arrivera plutôt que celui dont la probabilité est entre $\frac{1}{2}$ & zéro; & celle que sur un nombre donné d'évènements, ce même évènement aura sur l'autre une certaine pluralité, ou n'aura pas contre lui la même pluralité. Or, on voit que, d'après l'hypothèse, la probabilité de la vérité de la voix d'un Votant, ou de la vérité d'une décision, est la même que celle de cet évènement, dont la probabilité est entre 1 & $\frac{1}{2}$.

Ce qu'on entend dans ce cas par la probabilité d'une voix dans les décisions futures.

On peut supposer la probabilité entre 1 & $\frac{1}{2}$ toujours constante dans la suite des évènements, ou bien variant pour chacun & n'étant assujettie qu'à cette condition d'être au-dessus de $\frac{1}{2}$. Si on regarde ces deux hypothèses comme possibles, il faudra d'abord chercher la probabilité de toutes deux, & former ensuite une valeur commune, en multipliant le résultat de chaque hypothèse par la probabilité que ce résultat a lieu.

Nécessité de distinguer les deux hypothèses d'une probabilité constante pour tous les Votans, ou d'une probabilité variable.

Dans la seconde hypothèse, la probabilité que celle de la vérité de chaque voix est entre 1 & $\frac{1}{2}$, sera constamment $\frac{3}{4}$, quelqu'aient été les pluralités des décisions, d'après lesquelles on cherche à connoître cette probabilité. Ainsi dans

la question que nous considérons ici, on peut regarder cette probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque voix comme une espèce de limite; & si la distribution des voix est telle, qu'en supposant la probabilité constante on ait un résultat au-dessous de cette valeur, ou qu'on n'ait pas même une très-grande assurance qu'elle ne tombera pas au-dessous, alors on doit regarder comme trop peu éclairés les Votans auxquels on se proposoit de confier les décisions futures, puisque la probabilité de leur voix est au-dessous de la probabilité moyenne qui naît de la seule hypothèse, qu'ils décideront plutôt en faveur de la vérité que de l'erreur.

Il auroit été curieux de faire à la suite des décisions de quelque Tribunal existant, l'application de ce dernier principe, mais il ne nous a pas été possible de nous procurer les données nécessaires pour cette application. D'ailleurs les calculs auroient été très-long, & la nécessité d'en supprimer les résultats, s'ils avoient été trop défavorables, n'étoit pas propre à donner le courage de s'y livrer.

Probabilité
des décisions
futures dans
les différentes
hypothèses &
pluralité.

Dans cette méthode, la probabilité que l'évènement dont la probabilité est entre 1 & $\frac{1}{2}$, aura sur l'autre une pluralité constante, & celle que l'autre évènement n'obtiendra pas cette pluralité, croissent indéfiniment jusqu'à l'unité, quelle qu'ait été la distribution des évènements observés. Mais si l'on suppose la pluralité proportionnelle, alors la probabilité que l'évènement, dont la probabilité est entre zéro & $\frac{1}{2}$, n'obtiendra pas cette pluralité, croît jusqu'à 1; mais la probabilité que celui dont la probabilité est entre $\frac{1}{2}$ & 1, obtiendra la même pluralité, est renfermée dans de certaines limites qui dépendent du nombre des évènements passés & de la pluralité observée entr'eux.

Si l'on n'avoit qu'une seule décision rendue par un très-grand nombre de voix, le calcul de cette méthode seroit très-simple; mais si l'on a un certain nombre de décisions, l'on fait seulement pour chacune que la probabilité des avis est entre 1 & $\frac{1}{2}$ pour l'un, entre $\frac{1}{2}$ & zéro pour l'autre; mais on ignore pour deux décisions, par exemple, lequel des deux avis de la première répond à l'un des deux avis de la seconde. On aura donc deux combinaisons possibles, pour chacune desquelles il faut chercher la probabilité 4 pour trois décisions, huit pour 4, & ainsi de suite pour un nombre quelconque de décisions.

C'est donc en considérant toutes ces combinaisons possibles de voix, vraies ou fausses, & par conséquent ayant leur probabilité depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, ou depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro, & en prenant la probabilité moyenne, que l'on parviendra à démêler la probabilité que peuvent avoir les décisions futures.

On peut, dans cette méthode comme dans la précédente, recommencer le calcul après un certain nombre de décisions, prendre la probabilité qui résulte de la manière dont les voix y sont distribuées, & voir si ces deux probabilités n'ont point entr'elles une différence qui indique un changement dans les lumières ou dans la sagacité des Votans.

Il est inutile d'avertir que l'on pourra, dans cette méthode comme dans la précédente, avoir une limite de probabilité, au-dessous de laquelle on ait une certaine assurance de ne pas tomber, & prendre ensuite cette limite au lieu de la probabilité moyenne, comme la valeur qu'on doit supposer à la probabilité.

Les méthodes que nous venons d'indiquer pourroient ne conduire qu'à des résultats très-incertains si on les appliquoit

Pour une décision isolée, ou en ayant égard aux décisions intermédiaires.

Limite au-dessous de laquelle on peut supposer que les voix ne tomberont pas.

Précautions nécessaires dans l'emploi de ces méthodes.

sans précaution : il faut, dans l'une comme dans l'autre, ne faire entrer dans un même calcul que des questions du même genre, n'y admettre que des décisions rendues à des époques trop peu éloignées pour qu'on puisse supposer que dans l'espace de temps qu'elles embrassent il se soit fait une révolution dans les opinions. Il faut enfin écarter celles dans lesquelles on peut supposer que certains préjugés, des intérêts de corps, ou l'esprit de parti, ont eu quelque influence. Cette dernière condition est d'autant plus essentielle dans la seconde méthode, que si l'on admet l'influence de ces préjugés, l'hypothèse sur laquelle la méthode est fondée cesse d'être admissible, puisque la probabilité que les Votans se décideront contre la vérité, devient alors plus grande que la probabilité contraire : mais dans la première même, quoique l'on puisse avoir une vraie probabilité moyenne, en admettant les décisions de cette espèce, il est aisé de voir que cette probabilité moyenne ne donnera pas pour ces mêmes questions l'assurance que la justice exige, & que ce n'est point par la forme des décisions que l'on peut se mettre à l'abri de ce genre d'erreurs. On peut appliquer ici le même raisonnement, d'après lequel nous avons exclu les décisions sur lesquelles le Tribunal d'examen prononce à une trop foible pluralité.

Nous avons donc des moyens de connoître la probabilité que nous pouvons supposer aux voix des personnes à qui la décision d'une affaire est confiée, & aux décisions rendues à une certaine pluralité ; & il ne nous reste plus qu'à savoir quelle probabilité nous devons exiger dans ces décisions.

Détermination
de l'assurance
que la justice
exige de se
procurer dans
les décisions.

Nous avons déjà observé que cette détermination pouvoit se réduire à trois points principaux ; la détermination, 1.^o de la probabilité de ne pas avoir une décision contraire à la vérité ;

1.° de celle d'avoir une décision, ou d'avoir une décision vraie; 3.° de celle enfin qu'une décision rendue à la moindre pluralité possible, est plutôt vraie que fausse.

Nous avons observé ensuite qu'il falloit avoir une probabilité assez grande pour que, si on a cette probabilité, ou une qui lui seroit supérieure, on puisse regarder comme juste ou comme utile, de conformer sa conduite à la décision rendue; & nous avons remarqué en même-temps que cette limite de probabilité devoit être déterminée par des principes différens, & avoir diverses valeurs, suivant la nature des questions proposées.

Nous distinguerons donc ici trois espèces de questions, auxquelles nous appliquerons cette méthode: nous les avons choisies telles qu'elles embrassent les cas les plus importants qu'on puisse se proposer de faire décider à la pluralité des voix, & que de plus elles exigent à peu-près l'emploi de tous les principes qui doivent être employés dans la détermination d'une assurance suffisante. Ces trois questions sont, 1.° l'établissement d'une loi nouvelle, 2.° un jugement en matière civile, 3.° le jugement d'un accusé.

Lorsqu'il s'agit d'établir une loi nouvelle, il paroît au premier coup-d'œil, qu'on doit sur-tout chercher à s'assurer de ne pas avoir une décision fausse, non-seulement à cause de l'importance des suites qu'une mauvaise loi ne peut manquer d'avoir, mais aussi à cause de la difficulté de la réformer lorsque l'on viendroit à découvrir l'erreur: c'est même le seul objet que l'on ait paru regarder comme essentiel dans la plupart des constitutions; & l'on a souvent sacrifié à cette considération l'espérance de réformer les vices de la constitution & de remédier aux abus.

Ce principe de mettre des obstacles à la destruction des

Exemple
de la méthode
qu'il
faut suivre.

1.° Dans le cas
de l'établisse-
ment d'une
loi nouvelle.

Objet
qu'on doit se
proposer.

mauvaises loix, pour éviter le risque ou des innovations fréquentes ou de mauvaises loix nouvelles, tient à trois causes différentes; la première est l'opinion très-ancienne & presque générale, que le genre humain, loin de gagner en sagesse, se détériore par le temps, & qu'il ne peut être replacé au même point de sagesse, de vertu, de bonheur, que par des secousses violentes. Il est évident qu'en adoptant cette opinion, toute forme qui évite un changement, même par le défaut de la pluralité nécessaire pour former une décision, doit paroître avantageuse. S'il est très-probable que la loi ancienne est bonne, il faut, pour la réformer, avoir une probabilité beaucoup plus grande de la vérité de la décision, qui, en lui substituant une autre loi, déclare que la première est mauvaise.

Mais cette opinion doit être regardée comme un préjugé, fondé sur le mécontentement que les hommes ont de leur sort, fortifié par l'envie que l'on ressent contre ses contemporains, par l'autorité qu'ont presque par-tout sur l'opinion les vieillards, qui naturellement regrettent le temps de leur jeunesse, enfin par l'ignorance de l'antiquité, qu'on juge d'après l'enthousiasme de ceux qui veulent tirer vanité de l'avoir étudiée.

La seconde cause est l'opinion non moins répandue, qui fait regarder les loix, non comme des conséquences nécessaires de la nature des hommes & de leurs droits, mais comme des sacrifices de ces mêmes droits exigés par des vues d'utilité commune. Si donc on regarde une loi nouvelle comme une atteinte de plus à la liberté naturelle, il est tout simple de chercher des moyens de s'assurer qu'aucune ne sera établie que dans le cas où une nécessité pressante en fera presque généralement désirer l'établissement. Cette opinion a pu être excusable

excusable dans l'origine des corps politiques, où l'on manquoit même d'une partie des loix nécessaires à leur maintien, & où l'on avoit une opinion souvent exagérée des droits de la liberté naturelle dans l'état de société.

Mais il n'en est pas de même dans les sociétés anciennement établies, où l'on a plutôt à se plaindre du trop grand nombre de loix; où les nouvelles loix ne peuvent être presque jamais que la destruction ou la correction d'une loi ancienne, établie dans des temps d'ignorance & de préjugés; où l'on doit s'occuper, non de restreindre les droits de la liberté primitive, mais de les rendre aux hommes que des vues d'une politique fautive & bornée en ont privés.

Le troisième motif, est la crainte des innovations très-fréquentes, qui affoibliront, dit-on, le respect pour les loix. Il est vrai que lorsque les loix ne sont pas les conséquences de principes fixes & de vérités réelles & bien prouvées, ce respect, fondé alors sur l'habitude & non sur la raison, est d'autant plus fort que ces loix sont plus anciennes: mais puisqu'il s'agit ici des moyens d'avoir des loix dont les dispositions soient conformes à la vérité & à la justice, c'est précisément de substituer l'empire de la raison à celui de l'habitude que l'on doit s'occuper.

Il est donc également important de s'assurer qu'une bonne loi ne sera pas rejetée pour n'avoir pas eu la pluralité exigée, ou de pouvoir se répondre qu'aucune mauvaise loi n'aura la pluralité, & l'on doit chercher l'assurance qu'une loi nouvelle ne sera rejetée que parce qu'elle est mauvaise, & non parce qu'il n'y aura pas eu de décision sur cette loi.

Enfin il faut, lorsqu'une loi est adoptée à la moindre pluralité exigée, avoir une assurance suffisante que cette loi est bonne,

Assurance
d'avoir une
décision vraie,
& de l'avoir
dans le cas de
la plus petite
pluralité.

Or, il est aisé de voir, en examinant les formules qui naissent du calcul, que si on a d'abord cette assurance suffisante pour le cas de la moindre pluralité, & de plus une assurance égale d'avoir une décision vraie plutôt que d'avoir une décision fautive, ou de n'avoir pas de décision, le risque d'avoir une décision fautive, sera tellement petit qu'il est inutile de s'occuper en particulier des moyens de remplir la première condition.

Il peut être
juste d'assujettir
les autres à
une loi, &
raisonnable de
s'y soumettre
soi-même,
lorsque l'on a
cette dernière
assurance de la
justice de la
loi.

Nous devons donc chercher principalement ici quelle est la probabilité qui donne une assurance de la bonté d'une loi admise à la plus petite pluralité, telle qu'on puisse croire qu'il n'est pas injuste d'assujettir les autres à cette loi, & qu'il est utile pour soi de s'y soumettre. Alors celui qui emploieroit la force publique au maintien de cette loi, auroit une assurance suffisante de ne l'employer qu'avec justice: alors le citoyen, en obéissant à la même loi, sentiroit que s'étant soumis, par une condition nécessaire dans l'ordre social, à ne se pas conduire conformément à la raison seule dans une certaine classe de ses actions, il a du moins l'avantage de ne suivre que des opinions, qu'en faisant abstraction de son jugement, il doit regarder comme ayant le degré de probabilité suffisant pour diriger sa conduite. Par conséquent chacun ne seroit obligé de se conduire que d'après l'espèce de sûreté que lui permet la nature même des choses.

En effet, tout homme a le droit de se conduire d'après sa raison; mais lorsqu'il s'unit à une société, il consent à soumettre à la raison commune une partie de ses actions, qui doivent être réglées pour tous, d'après les mêmes principes; sa propre raison lui prescrit alors cette soumission, & c'est encore d'après elle qu'il agit, même en renonçant à en faire

usage. Ainsi lorsqu'il se soumet à une loi contraire à son opinion; il doit se dire: *Il ne s'agit pas ici de moi seul, mais de tous; je ne dois donc pas me conduire d'après ce que je crois être raisonnable, mais d'après ce que tous, en faisant comme moi, abstraction de leur opinion, doivent regarder comme étant conforme à la raison & à la vérité.*

Il s'agit donc maintenant de chercher cette assurance nécessaire, c'est-à-dire, comme nous l'avons observé, une probabilité au-dessous de laquelle on ne puisse agir sans injustice ou sans imprudence. Nous supposerons ici que le risque de l'erreur doit être tel, que l'on néglige un risque * semblable, même lorsqu'il est question de notre propre vie.

Cette assurance est suffisante si le risque de l'erreur est égal à un risque qu'on néglige pour la propre vie.

M. de Buffon évalue ce risque à $\frac{1}{10000}$, parce qu'on n'est pas frappé en général de la crainte de mourir dans l'espace d'un jour, & que $\frac{1}{10000}$ peut être regardé comme l'expression de ce risque: mais, 1.° M. Daniel Bernoulli a observé que cette crainte de ne pas mourir dans la journée, ne peut être regardée comme nulle que pour les hommes qui, quelque temps avant l'époque de leur mort, n'ont pas, soit un commencement de maladie ou un état de dépérissement & de langueur, soit des dispositions à une mort prochaine qu'ils se dissimulent, car les premiers n'ont pas cette sécurité, & les autres auroient tort de l'avoir. On doit exclure aussi ceux qui sont d'un très-grand âge: cette observation est d'autant plus importante, qu'il s'agit ici d'évaluer un risque moyen que l'on juge devoir être négligé; il ne peut donc être formé qu'en prenant un terme moyen entre des risques que l'on néglige. Ainsi lorsqu'on fait entrer dans un calcul de ce genre

Méthode d'évaluer ce risque.

Examen de l'opinion de M. le Comte de Buffon,

* Par *risque*, nous entendons ici non le danger, mais la probabilité du danger.

un risque très-grand en lui-même, on suppose tacitement que celui qui l'a couru en ignoroit l'étendue. Cette méthode d'évaluer le risque moyen seroit donc ici très-fautive. En effet, on fait ce risque $\frac{1}{10000}$, parce qu'il est $\frac{365}{10000}$ pour une année, mais dès-lors ce risque ne peut être regardé comme un risque moyen que relativement aux morts imprévues : pour les autres maladies, le risque est nul ou très-grand, suivant que l'homme pour lequel on le considère est attaqué d'une maladie, ou ne l'est pas encore. Or, de ce que cet homme néglige ce risque lorsqu'il est très-petit ou nul, & ne le néglige pas certainement lorsqu'il le voit très-grand; il ne peut pas en résulter qu'il néglige le risque moyen qui naît de la combinaison de ces deux risques.

Supposons, par exemple, que sur 10000 hommes il en meurt 400 par an, dont 35 de mort subite, nous avons $\frac{35}{3650000}$ pour le danger de cette mort dans un jour. Supposons que les 365 autres meurent d'une maladie dont on ne périt qu'au huitième, il en résulte que nous aurons pour un jour moyen 9999 hommes exposés à un danger très-petit, $\frac{35}{3650000}$ de périr dans le jour, & un seul exposé au danger 1 de périr dans ce même jour. Ce calcul, quoique fait en négligeant des considérations importantes, montre combien cette méthode seroit fautive, puisque $\frac{35}{3650000}$ est le véritable risque négligé, au lieu du risque $\frac{400}{3650000}$ que donneroit la méthode, & qui est plus de dix fois plus grand.

2.° Cette manière de considérer les dangers qu'on néglige, ne nous paroît pas applicable à la mesure de la probabilité. En effet, non-seulement le risque de mourir dans un jour est très-petit, mais le danger est habituel & inévitable. Ces deux dernières causes peuvent contribuer autant que la première

à le faire négliger , lors sur-tout qu'agissant ensemble , leur influence doit être très-forte. Or , il faudroit avoir ici un risque que la petitesse seule fit négliger. Il faut donc chercher un danger auquel on s'expose volontairement sans aucune habitude formée, pour un intérêt si léger , qu'on ne puisse le comparer à celui de la vie , & sans qu'on s'imagine avoir besoin de courage pour le braver.

Il seroit aisé de prouver que l'absence d'une seule de ces conditions suffit pour qu'on paroisse négliger des risques tellement grands , qu'il seroit impossible d'attribuer à la petitesse du risque le peu d'impression qu'il produit.

Supposons donc , par exemple , qu'on sache combien il périt de paquebots sur le nombre de ceux qui vont de Douvres à Calais , & réciproquement , & qu'on n'ait égard qu'à ceux qui sont partis par un temps regardé comme bon & sûr par les hommes instruits dans la Navigation ; il est clair qu'on aura par ce moyen la valeur d'un risque qu'on peut négliger sans imprudence. En effet , ce risque n'empêche pas de s'embarquer des gens d'ailleurs très-peu courageux , pourvu qu'ils n'aient pas pour les dangers de la mer cette crainte qui naît de l'ignorance. D'autres voyages sur mer , du même genre , donneroient une autre valeur de la même quantité.

Méthode
qu'il faut suivre
dans cette
évaluation.

On pourroit encore employer utilement pour les mêmes évaluations , certains dangers que des hommes prudens & qui ne manquent point de courage , évitent ou bravent suivant leur manière personnelle de voir & de sentir. Tel est le passage sous le pont Saint-Esprit.

Peut-être feroit-on bien de chercher non-seulement les risques qu'on néglige pour soi-même , mais ceux que les hommes de bon sens regardent comme nuls lorsqu'il s'agit

des personnes qu'ils aiment. Ce n'est point par une vaine ostentation de sensibilité que nous proposons cette épreuve : mais en supposant même un degré assez fort de personnalité, il paroît que la crainte qu'éprouve un homme qui est en sûreté pour la vie d'une personne qui lui est chère, est très-comparable à la crainte qu'il éprouveroit pour lui-même : & en supposant que le risque auquel cette personne est exposée ne soit pas nécessaire, il peut même y avoir quelque avantage à employer ce dernier moyen. En effet, on est plus sûr que c'est la petitesse du risque, & non le courage de celui qui s'y expose, ou l'intérêt qu'il a de s'y exposer, qui le font alors regarder comme nul.

On ne doit point se borner à examiner une seule de ces hypothèses, mais il faut en considérer plusieurs, déterminer pour chacune le degré de risque qu'elle permet de négliger, & par ce moyen on verra quel est réellement celui que l'on peut regarder comme le plus grand parmi ceux que les hommes sages négligent comme nuls dans la conduite ordinaire de la vie.

L'application de cette méthode exige des Tables qui n'ont pas été faites encore, pour les différentes espèces d'accidens fortuits auxquels les hommes sont exposés ; mais il n'est pas impossible d'y suppléer à quelques égards.

Moyens
de suppléer
à cette
méthode.
1.^{er} moyen.

D'abord on connoît ces placemens en rentes viagères sur plusieurs têtes, où l'on se propose non d'augmenter son revenu, mais de placer ses fonds à un haut intérêt & d'une manière sûre ; & l'on peut, en examinant la manière dont les hommes les plus habiles parmi ceux qui font des opérations de ce genre, combinent leurs placemens, & en y appliquant les Tables de mortalité, connoître successivement la probabilité qu'ils ont

de retirer de leur capital un intérêt égal à l'intérêt commun du commerce, celle de ne pas avoir un intérêt inférieur à celui des placemens regardés comme certains, celle de retirer au moins leur capital, celle enfin d'en perdre la totalité ou la presque totalité. L'on pourroit, par exemple, regarder ensuite celle-ci comme exprimant le risque qu'on peut négliger, & il différeroit peu de celui qu'on néglige pour sa propre existence; car les hommes qui font le commerce d'argent, ont pour leurs richesses un attachement équivalent à l'amour de la vie.

On pourroit même trouver que le risque d'une perte totale est ici fort au-dessous de celui qu'on négligeroit pour la vie, en sorte que c'est peut-être à la perte de toute espèce d'intérêt qu'il faudroit s'arrêter, ou bien à la probabilité de ne retirer que l'équivalent d'une rente viagère au taux des rentes foncières, ce qui est une sorte de perte totale du capital. On ne devoit pas être étonné de ce résultat, parce que les précautions que l'on prend dans ces arrangemens, ont pour objet non-seulement de conserver ses fonds, mais aussi de s'en assurer un emploi avantageux.

Il seroit plus facile de se procurer les données nécessaires pour employer ce moyen, mais elles n'existent encore dans aucun Recueil.

Le second moyen que nous proposons, & auquel nous nous arrêterons, consiste à se servir des Tables de mortalité ordinaires, mais en considérant non un danger de mort que l'on croit devoir négliger, mais une différence entre deux risques, que l'on regarde certainement comme nulle.

*a. d. moyen :
raisons de le
préférer.*

Supposons, par exemple, que nous prenions la proportion de la mortalité au nombre des vivans pour différens âges,

en n'admettant dans cette liste que ceux qui périssent d'une mort presque instantanée, & que nous en déduisons pour ces différens âges la probabilité de mourir dans l'espace d'une semaine.

En comparant ces différens risques d'année en année, durant tout l'espace où la crainte de mourir dans une semaine n'occupe pas un homme sain, on verroit les risques croître peu à peu avec l'âge, & on pourroit distinguer l'époque où les accroissemens deviennent plus rapides, & où la sécurité est causée moins par la petitesse du danger que par la confiance en ses propres forces, ou le défaut d'attention.

On prendroit ensuite dans cet espace des intervalles où les risques ont des accroissemens réguliers & peu sensibles : & choisissant quelques-uns de ces intervalles durant lesquels l'assurance de ne pas mourir dans l'espace d'une semaine ne diminue pas, quoique le risque ait augmenté, on cherchera pour ces différens intervalles la valeur de ces augmentations de risques, qui sont absolument regardées comme nulles par le commun des hommes. Par exemple, si on prend les Tables de Sulsmifch, & qu'on suppose que le nombre des hommes qui meurent de maladies, dont la durée est moindre qu'une semaine, soit à peu-près dans tous les âges le dixième du nombre total *, on trouvera que depuis 37 ans jusqu'à 47, & depuis 18 jusqu'à 33, le risque va en s'augmentant d'une manière assez uniforme : on observera qu'un homme de 18 ans & un de 33, un homme de 37 ans & un de 47, n'ont

* Cette hypothèse est déduite des Tables de mortalité de M. Raymond, de Marseille; elles donnent le nombre des hommes atteints de chaque maladie, celui des morts & celui de ceux qui ont échappé, mais l'Auteur n'y a pas fait entrer l'âge des malades.

pas une crainte plus grande l'un que l'autre de mourir dans l'espace d'une semaine. Or, pour la première période, la différence des risques est $\frac{1}{301115}$, & pour la seconde $\frac{1}{144768}$: on peut donc regarder ces deux risques comme pouvant tous deux être négligés, & prendre le second, qui est le plus grand, pour le risque le plus considérable qu'il soit permis de regarder comme nul, & par conséquent $\frac{144767}{144768}$ représentera l'assurance qu'il est convenable d'exiger.

Cette méthode de prendre la différence de deux dangers, est précisément la même que celle où l'on considère un risque isolé auquel on s'expose sans s'imaginer être moins en sûreté. En effet, ce danger particulier devient pour l'homme qui s'y expose dans le moment, un risque ajouté au risque moyen, auquel il est exposé comme les autres. D'ailleurs ce même genre de risque, quoiqu'inévitable, ne peut être regardé comme aussi habituel ; il s'éloigne moins par conséquent de la nature de ceux qu'il faudroit considérer.

Nous croyons donc qu'on pourra prendre $\frac{144767}{144768}$ comme l'expression de la probabilité, qu'on doit regarder comme donnant une assurance suffisante, dans le cas où il s'agit de prononcer sur une nouvelle loi, soit qu'une décision rendue à la moindre pluralité sera vraie, soit que l'on aura une décision vraie à la pluralité exigée. Cette probabilité paroitra peut-être très-grande, & on pourroit s'imaginer qu'il seroit très-difficile de se la procurer : cependant le calcul montre qu'une assemblée de 61 Votans, où l'on exigeroit une pluralité de neuf voix, rempliroit ces conditions, pourvu qu'on eût la probabilité de chaque voix égale à $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire, qu'on supposât que chaque Votant ne se trompera qu'une fois sur cinq ; & si on suppose qu'il ne se trompe qu'une fois sur dix, alors il suffira

Valeur
de l'assurance
suffisante,
soit pour
la vérité de la
décision à la
moindre pro-
babilité, soit
pour celle
d'avoir une
décision vraie;

P.

d'exiger une pluralité de six voix, & d'avoir une assemblée de 44 Votans.

Plus la probabilité des voix diminue, plus la pluralité exigée doit augmenter, ainsi que le nombre des Votans, & ce nombre croît avec une grande rapidité, lorsque la probabilité des voix est très-petite. Il en résulte que dans un pays où les lumières sont très-peu répandues, mais où il y a un certain nombre d'hommes éclairés, il peut être possible de satisfaire aux deux conditions exigées, en remettant la décision à une assemblée peu nombreuse, tandis qu'il seroit impossible, ou du moins très-difficile d'y satisfaire si on étoit obligé de la confier à une nombreuse assemblée.

On voit donc que l'avantage de confier à une assemblée de Représentans plus ou moins nombreuse le soin de statuer sur les loix, dépend de la manière dont les lumières sont distribuées dans chaque pays, & qu'il peut y avoir des cas où il soit désavantageux d'augmenter le nombre de ces dépositaires de la raison générale.

Nous reviendrons sur cet objet dans la cinquième Partie.

Utilité
de distinguer
deux objets
dans les loix.

Il seroit peut-être utile de distinguer dans les loix l'objet essentiel de la loi, ce qui la constitue proprement, & les détails dans lesquels on est obligé d'entrer en la rédigeant; & il peut y avoir des circonstances où il soit plus avantageux de confier cette dernière partie, qui exige souvent plus de lumières & plus d'habitude de combiner les idées, à une assemblée moins nombreuse de Votans plus éclairés. On peut même observer que sur quelques-unes de ces questions on pourroit, ou se contenter d'une pluralité qui donne une moindre assurance, ou ne pas exiger la même probabilité qu'il y aura une décision dès la première votation, s'il y a des points qui puissent rester indécis sans inconvénient.

Par exemple, supposons qu'on propose à une assemblée de décider si la peine de mort doit être établie contre le vol, c'est-à-dire, si l'intérêt de la société exige qu'elle soit établie pour quelques espèces de vols, & si dans le cas où l'intérêt de la société paroîtroit l'exiger, cette peine n'est pas contraire à la Justice & au Droit naturel.

Il est clair qu'on doit chercher également à s'assurer, & que la décision de cette assemblée sera conforme à la vérité, & que l'on aura une décision; puisque dans un pays où cette peine existeroit, l'humanité, & même la justice rigoureuse, exigeroient de ne pas laisser une semblable question indécidée.

Supposons ensuite qu'on ait décidé que cette peine ne peut être juste, & que le vol doit être puni seulement par la perte de la liberté, dont on a abusé pour attenter aux droits d'autrui, & par des travaux utiles à la société dont on a troublé l'ordre; il reste encore à classer les différentes espèces de vols, à marquer la peine qui convient à chacune, l'intensité, la durée de cette peine. Or, il est aisé de voir qu'il sera plus avantageux de confier cette décision à un corps moins nombreux d'hommes plus éclairés qui pourront, 1.^o en exigeant une pluralité peu considérable, donner une assurance suffisante d'obtenir sur tous les points qu'il est nécessaire de décider sur le champ, une première décision, où il n'y auroit à craindre ni des erreurs grossières ni des inconvéniens d'abord très-sensibles; 2.^o d'obtenir ensuite du même corps une suite de décisions rendues à une plus grande pluralité, de la bonté desquelles on aura une assurance suffisante, mais qui peuvent être retardées par le défaut de la pluralité exigée, sans qu'il en résulte aucun mal. Cette méthode seroit d'autant moins sujette à des inconvéniens, que parmi ces questions, il y en auroit plusieurs

pour lesquelles un des avis doit être suivi tant que l'avis contraire n'a pas obtenu la pluralité exigée; puisque dans tous les cas le parti de la plus grande rigueur ne peut être adopté avec justice que lorsqu'on a une assurance suffisante que cette rigueur est nécessaire.

2.^d Exemple.
Jugement
en matière
civile.

Détermination
de l'assurance
d'avoir
une pluralité,
de laquelle
résulte une
probabilité
suffisante de la
vérité
de la décision.

Détermination
de
cette dernière
probabilité.

Dans la seconde question, il s'agit d'un jugement en matière civile, & l'on suppose que les deux parties qui, par exemple, se disputent une propriété, ont un droit également favorable. On suppose de plus qu'il est nécessaire d'avoir une décision*; dans ce cas le nombre des Votans doit être impair; & puisque la pluralité d'une voix suffit, nous ne pouvons avoir la certitude d'obtenir une pluralité qui donne une assurance suffisante. Nous chercherons donc une probabilité d'avoir cette assurance qui soit égale à $\frac{144767}{144768}$, c'est-à-dire, égale à une probabilité que nous regardons comme suffisante relativement à notre propre vie, & il nous restera ensuite à fixer cette assurance.

Pour cela, nous chercherons un risque que des hommes attachés à leur bien, négligent dans leur conduite, même lorsque la plus grande partie de leur fortune y est exposée. Si on avoit des Tables de ces placemens en rentes viagères dont nous venons de parler; si on en avoit également qui fussent dressées, d'après les évènements, pour les assurances maritimes, pour celles contre les incendies, on en pourroit tirer des données utiles, en ayant toujours soin de considérer le plus d'hypothèses, le plus d'espèces de dangers que l'on pourroit, de déterminer les différens risques auxquels on est exposé, & qu'on regarde comme nuls, pour choisir ensuite parmi ces risques celui qui est le plus grand dans le nombre de ceux qu'on verra ne pouvoir être négligés que par la

* Voyez sur cet objet l'analyse de la cinquième Partie.

petitesse du risque , & non par des considérations étrangères.

Mais comme nous n'avons point ces Tables , nous nous contenterons d'une méthode analogue à celle par laquelle nous avons traité la première question , c'est-à-dire, que nous considérerons deux risques inégaux de perdre sa fortune , à la différence desquels un homme raisonnable ne fait aucune attention , & nous regarderons ce risque comme le plus grand qui puisse être négligé.

Par exemple, un homme à qui un Bénéficiaire qui jouit d'une bonne santé, a résigné un bénéfice, ne se croit pas plus exposé au danger de le perdre par la mort imprévue du Résignateur dans l'espace de moins de quinze jours, soit que ce Résignateur ait 37 ans, soit qu'il en ait 47. Or, comparant ces deux risques, la différence se trouve être environ $\frac{1}{24000}$ ou $\frac{1}{36000}$, selon qu'on supposera que le tiers ou la moitié de ceux qui meurent de maladies aiguës, périssent dans moins de quinze jours*.

Prenant donc une de ces valeurs , nous chercherons (la probabilité de l'avis de chaque Juge étant donnée) la pluralité nécessaire pour avoir l'assurance que la décision est conforme à la vérité : & cette pluralité étant connue, nous chercherons le nombre des Juges nécessaire pour avoir la probabilité $\frac{144767}{144768}$ d'avoir cette pluralité.

Ainsi toutes les fois que l'on aura cette pluralité, le jugement aura une probabilité telle, que le risque de l'erreur devra être regardé comme nul, puisqu'on néglige dans la conduite ordinaire un pareil risque lorsqu'il s'agit de sa fortune ;

* Cette détermination est prise aussi des Tables de M. Raymond, mais elles ne contiennent pas la durée de chaque maladie, & c'est ce qui m'oblige à laisser ici une si grande latitude dans la détermination de l'assurance.

& l'on aura de plus une assurance qu'on regarde comme suffisante, même pour sa propre vie, de n'avoir pas une décision rendue à une moindre pluralité.

On est conduit ici à une conclusion qui peut paroître singulière, c'est que l'on doit encore plus dans les questions de ce genre que pour des matières même plus importantes, chercher à ne confier la décision qu'à des hommes éclairés; puisque la nécessité d'avoir une décision force à se soumettre même à celle qui n'a que la pluralité d'une seule voix, & que par conséquent on ne peut trouver dans la forme des décisions de moyens de suppléer, par la pluralité exigée, au peu de probabilité de la voix de chaque Votant en particulier.

Détermination
d'une assurance
suffisante
pour décider
en faveur de la
cause la moins
favorable.

Nous avons dit dans la première Partie, que dans plusieurs questions de ce genre, le droit d'une des parties étant plus favorable que celui de l'autre, on pourroit exiger une pluralité au-dessus de l'unité, pour décider en faveur de la partie dont le droit étoit le moins favorable, & regarder comme en faveur de l'autre les décisions rendues à une moindre pluralité.

Dans ce cas on déterminera, comme ci-dessus, la pluralité par la condition de donner en faveur de la vérité une probabilité $\frac{23999}{24000}$ ou $\frac{35999}{36000}$, & l'on cherchera à s'assurer une probabilité suffisante d'avoir cette pluralité. On verra, dans l'examen de la troisième question, la manière de déterminer cette dernière probabilité.

Il faudra aussi avoir égard à la remarque faite à la fin de la seconde Partie, c'est-à-dire, chercher à se procurer des Votans, dont la voix ait une probabilité assez grande pour que la différence de deux voix dans la pluralité, entre le cas où l'on décide d'après la pluralité & celui où l'on décide contre, produise une très-grande différence dans la valeur de la probabilité.

La troisième question a pour objet, de déterminer l'assurance qu'on doit exiger d'un Tribunal qui prononce à la pluralité des voix qu'un accusé est coupable ou innocent, ou plutôt qu'il est prouvé qu'il est coupable, ou que cela n'est pas prouvé.

On trouvera d'abord que l'on doit exiger, lorsque la pluralité est la moindre, une probabilité de la décision, telle que le risque de l'erreur soit regardé comme nul, même lorsqu'il s'agit de la vie. Nous ferons donc cette probabilité égale à $\frac{14+267}{144768}$,

Mais l'objet qu'on se propose dans un jugement de cette espèce, n'est pas seulement d'éviter qu'un innocent ne soit condamné; la forme du Tribunal doit encore être telle que l'on évite en même-temps le risque de renvoyer un coupable lorsque le crime est réellement prouvé, c'est-à-dire, que ce risque doit être assez petit pour pouvoir être négligé.

Le renvoi d'un coupable a deux inconvéniens, celui d'engager au crime par l'espérance de l'impunité, & le danger auquel les citoyens peuvent être exposés de la part de ce coupable qui peut commettre de nouveaux crimes.

Si l'on se borneroit à une probabilité de ne pas renvoyer un coupable, assez grande pour que le risque auquel il seroit exposé fût capable de détourner du crime un homme de sang-froid, une très-petite probabilité suffiroit. En effet, supposons qu'elle soit seulement $\frac{2}{300}$, c'est-à-dire, que de trois cents coupables, il en échappe un seulement, il est clair que la crainte d'un danger où sur trois cents personnes il ne s'en sauve qu'une seule, est plus que suffisante. Un homme qui s'expose à un pareil danger, est nécessairement animé d'une passion violente qui lui fait préférer la mort à la vie qu'il

3.^e Exemple.
Jugemens
en matière
criminelle.

Le risque
d'une erreur
dans une
décision doit
être tel qu'on
le néglige pour
sa propre vie,

Quelle assu-
rance on doit
avoir de ne pas
renvoyer de
coupables,

1.^o Pour éviter
l'exemple
de l'impunité
d'un coupable
renvoyé
comme inno-
cent, ou faute
de la pluralité
nécessaire pour
condamner,

méneroit après s'être soustrait à ce danger. Mais ce n'est pas ainsi que raisonnent ceux que leur intérêt ou leur penchant entraîne au crime ; un seul exemple d'un coupable qui a évité le supplice, leur fait une impression profonde, & l'intérêt public exige qu'on ait une grande probabilité qu'ils n'auront pas cet exemple. Il s'agit ici d'hommes grossiers, attentifs seulement aux évènements qui se passent sous leurs yeux. Nous supposons donc que chacun de ces hommes puisse avoir vraiment connoissance de vingt crimes & de vingt jugemens, & en cela nous ferons une supposition qui ne sera pas trop foible pour un pays policé. Cela posé, en exigeant dans chaque jugement une probabilité $\frac{22222}{100000}$ qu'il n'y aura pas un coupable renvoyé, on aura dans une génération un risque moindre que $\frac{3}{1000}$ de voir renvoyer un coupable. Or, cela peut être regardé comme suffisant si l'on songe qu'il ne peut être question ici que de ceux qui seroient affermis dans le crime pour l'espérance de l'impunité, & non de ceux qui le sont par l'espérance, bien plus facile à former, de ne pas être arrêtés, qu'il ne s'agit même que des accusés qui seroient renvoyés par l'erreur ou le défaut de lumières du Tribunal, & non de ceux qui échapperoient au supplice faute de preuves. Les exemples de cette dernière espèce sont très-dangereux, mais ce n'est pas la forme des décisions qui peut en préserver.

Il ne suffit pas de mettre à l'abri de l'exemple du renvoi d'un accusé coupable, il faut éviter un danger plus grand encore, c'est celui de l'exemple d'un coupable renvoyé lorsque la pluralité le condamne, mais qu'elle est au-dessous de la pluralité exigée.

Il faut donc que la probabilité de ce risque soit au moins au-dessous de $\frac{1}{144768}$ pour un seul jugement ; & si on veut,

ce

ce qui paroît naturel , qu'elle soit au-dessous de cette valeur , même pour vingt jugemens , d'après l'hypothèse faite ci-dessus, alors il faudra qu'elle soit au-dessous de $\frac{1}{3000000}$ pour chacun.

On ne doit faire entrer ici dans le calcul que les cas où un homme réellement coupable est renvoyé parce que la pluralité exigée n'a pas lieu contre lui , & non pas ceux où un innocent condamné est renvoyé parce que cette pluralité n'a pas eu lieu contre lui. Il est vrai que si l'opinion particulière de ceux sur qui l'exemple influe , est que cet innocent est coupable , alors l'exemple est également dangereux ; mais si au contraire ils le regardent comme innocent , celui du danger qu'il a couru devient un exemple capable de les effrayer.

D'ailleurs comme on ne compte ici que les cas où la pluralité est pour condamner , & n'est pas suffisante , en supposant que le risque dans vingt jugemens est au-dessous de $\frac{144767}{144768}$, on fait une supposition un peu exagérée , puisqu'on suppose que dans une génération on peut être témoin de vingt de ces jugemens. Ainsi en déterminant le risque qu'on peut négliger dans un seul jugement à $\frac{1}{3000000}$, on n'a point à craindre d'avoir fixé trop haut cette limite.

Si on se contente pour chaque jugement d'un risque au-dessous de $\frac{1}{144768}$, il sera , au bout de vingt jugemens , au-dessous de $\frac{14}{1000000}$; risque encore très-petit , car il paroît suffisant de pouvoir se procurer l'assurance qu'il y ait six mille environ à parier contre un que dans une génération entière on ne sera pas frappé de l'exemple d'un coupable renvoyé , pour n'avoir pas eu contre lui la pluralité exigée , c'est-à-dire , parce que les preuves de son crime , quoique devant être regardées très-probables , & même comme acquises , n'ont

point frappé un assez grand nombre de Juges pour déterminer la condamnation.

2.° Pour éviter le tort qu'un coupable renvoyé peut faire à la société.

Si on examine ensuite le danger qui résulte des coupables renvoyés, on trouvera qu'il n'est pas nécessaire pour que ce risque puisse être négligé, que la probabilité de renvoyer un coupable soit aussi petite, à beaucoup près, que l'exige la nécessité d'éviter les inconvéniens de l'exemple de l'impunité. L'on peut donc négliger cette considération; & pourvu que les conditions que nous avons fixées ci-dessus soient remplies, on peut se croire assuré d'obtenir toute la sûreté qu'exigent la Justice & la sûreté publique, du moins relativement à chaque individu*.

Assurance que doit se procurer un Législateur ou un Juge, que dans l'espace d'une génération un innocent ne sera pas condamné en vertu de sa loi ou de son jugement.

En effet, on peut demander de plus: *S'il doit suffire à un Législateur d'établir une forme de décision telle, que dans chaque jugement il y ait l'assurance suffisante qu'un innocent ne sera pas condamné, ou s'il est obligé au contraire de faire en sorte d'avoir cette assurance, ou pour un certain espace de temps, ou pour un certain nombre de décisions.*

La seconde opinion paroît devoir être préférée, mais il faut observer qu'il est impossible de se procurer cette assurance pour un temps ou pour un nombre de décisions indéfini; qu'il est même impossible de n'avoir pas à la longue une très-grande assurance qu'un innocent sera condamné.

On doit donc prendre ici une limite: nous choisirons celle d'une génération; par ce moyen chaque homme ou Juge, ou dépositaire de la force publique, aura une assurance suffisante

* On voit par cet exemple, comment, si la même forme de jugement étoit appliquée à d'autres questions, il faudroit chercher, d'après la nature même de ces questions, à se procurer les assurances suffisantes d'avoir un jugement vrai à la pluralité exigée, &c. Voyez page CXVIII.

de ne pas contribuer involontairement, soit par sa voix, soit par son consentement à la condamnation d'un innocent. Comme il s'agit ici, non d'un danger instantané, mais d'un danger qui se répand sur la vie entière, il semble qu'on peut se contenter d'une assurance moindre, & telle qu'elle suffise pour ne pas être frappé d'un danger de la même espèce. Nous observerons en conséquence qu'un homme n'est pas plus frappé de la crainte de mourir dans sa vingt-cinquième année que dans sa vingtième. Les Tables de mortalité donnent ce risque égal à $\frac{1}{1900}$: ainsi nous prendrons ici $\frac{1822}{1900}$ pour l'assurance qui peut être regardée comme suffisante. Si, d'après cette détermination, on suppose mille, par exemple, pour le nombre des hommes condamnés pendant une génération, ce qui est un nombre très-grand pour des pays policés, même d'une étendue très-considérable, on trouvera que l'assurance qu'il faut en conséquence se procurer dans chaque jugement, qu'un innocent ne sera pas condamné, sera $\frac{1922222}{2000000}$ environ. Alors on pourra chercher à avoir, ou cette assurance qu'un accusé condamné en général n'est pas innocent, ou bien la même assurance qu'il n'est pas innocent, même en supposant les jugemens rendus à la plus petite pluralité possible.

Quelle que soit celle de ces deux assurances qu'on exige, il ne faut pas croire qu'elles conduisent, pour la formation du Tribunal, à des conditions impossibles à remplir. En supposant à la voix de chaque Votant une probabilité $\frac{2}{10}$; une pluralité de six voix & un Tribunal de trente Membres suffiront pour donner toutes les assurances nécessaires, si l'on veut seulement les obtenir pour une suite de décisions, dont la pluralité soit quelconque; & si on les exige pour une suite de décisions supposées rendues à la plus petite pluralité, il

Possibilité de
remplir toutes
ces conditions.

suffira d'une pluralité de huit voix, ou même de sept, & le nombre des Votans pourra être au-dessous de cinquante.

La probabilité qu'un innocent sera condamné dans un temps indéfini, croît indéfiniment.

L'observation que l'on ne peut avoir aucune assurance que dans un espace de temps indéfini un innocent ne sera pas condamné, & qu'il y a même, quelque forme qu'on donne à la décision, une probabilité très-grande que cet évènement aura lieu, cette observation, dis-je, doit nécessairement engager à chercher des moyens d'éviter un si grand mal. Pour cela, supposons, par exemple, un Tribunal de trente Juges, & qu'on exige une pluralité de six voix, il faudra donc pour condamner un innocent que dix-huit Votans sur trente aient jugé contre la vérité. Or, il est probable que cette combinaison n'aura lieu que parce que des circonstances extraordinaires auront influé sur le jugement. La probabilité moyenne de la voix d'un homme ne peut être connue, comme nous l'avons dit, que par l'observation du nombre de cas où il décide en faveur de la vérité & de ceux où il décide en faveur de l'erreur : mais dans chaque jugement particulier il résulte du calcul, que lorsqu'on fait qu'un homme s'est trompé, il y a trois à parier contre un que dans cette circonstance la probabilité de la vérité de sa voix étoit au-dessous de $\frac{1}{2}$. Si l'on suppose que l'on a eu dix-huit voix contre la vérité & douze pour l'erreur, on a une probabilité beaucoup plus grande que dans ce cas celle de la voix est tombée au-dessous de la limite $\frac{1}{2}$. On aura de même une probabilité encore plus grande que celle de la voix des Votans est tombée fort au-dessous de la probabilité moyenne qu'on lui avoit assignée, & par conséquent on aura également une probabilité qu'on doit attribuer cette diminution à quelques circonstances particulières. Cela posé, si on rend l'instruction publique, il y aura lieu de

Conséquences qui en résultent ; nécessité & moyens de remédier à cet inconvénient inévitable.

croire que quelqu'un de ceux qui suivront l'instruction, & qui doivent être supposés avoir différentes opinions, différens penchans démèleront cette influence, pourront avertir les Juges, & par ce moyen prévenir l'injustice.

De même si l'on établit qu'aucun jugement capital ne sera exécuté sans la signature du Prince ou du premier Magistrat il est très-probable qu'ils seront instruits de ces circonstances extraordinaires par l'accusé ou par ses défenseurs; qu'alors ils pourront suspendre l'exécution, en refusant leur signature, & ordonner un nouvel examen; & il seroit aisé de concilier la manière de faire cet examen dans tous les cas où il peut être nécessaire, avec la célérité des jugemens, la nécessité de ne pas laisser le crime impuni, & tous les avantages d'une bonne législation.

On auroit donc, par la réunion de ces deux moyens, une assurance que dans le cas où un innocent auroit été condamné, sa condamnation ne seroit pas exécutée, & que le jugement seroit réformé.

Supposons cette assurance encore $\frac{1899}{1900}$, on aura le risque qu'un innocent seroit condamné dans une suite de mille jugemens, égal à environ $\frac{1}{3610000}$, d'où résulte l'assurance $\frac{1899}{1900}$ qu'un innocent ne sera pas condamné pour un temps qu'on peut regarder comme infini par rapport à la durée des institutions humaines, & même à la durée de l'état actuel des lumières & de la civilisation de notre espèce.

La même observation nous conduit à la réflexion suivante. Il est démontré qu'on ne peut se procurer pour un temps indéfini une assurance aussi grande que l'on voudra qu'un innocent ne sera pas condamné, & même qu'il est très-probable qu'il y en aura un de condamné dans un certain espace de temps. Il

Autre
conséquence
de la même
observation.

est donc démontré qu'on ne peut avoir une assurance suffisante pour un très-long temps, d'éviter une injustice.

Preuve,
ou plutôt
démonstration
de l'injustice
de la peine
de mort.

Or, la peine de mort est la seule qui rende cette injustice absolument irréparable : donc il est démontré que l'existence de la peine de mort expose à commettre une injustice irréparable ; donc il est démontré qu'il est injuste de l'établir. Ce raisonnement nous paroît avoir en effet absolument la force d'une démonstration.

On pourroit objecter sans doute qu'on commet une injustice égale, en condamnant un innocent à une autre peine, qui peut même être regardée comme plus cruelle que la mort, si on fait abstraction de la terreur machinale que la mort inspire ; que l'injustice peut aussi, dans ce cas, n'être jamais réparée ; mais on peut répondre que la Justice n'exige du Législateur que ce qui n'est pas impossible par la nature des choses ; qu'ainsi puisqu'il est nécessaire de punir le crime, puisqu'en le punissant, il est impossible de ne pas s'exposer à punir un innocent, le Législateur ne peut être injuste s'il s'est procuré toutes les assurances possibles d'échapper à cette injustice involontaire, mais qu'il ne peut légitimement, par un acte de sa volonté, rendre irréparable cette injustice à laquelle la nécessité l'expose. Cette irréparabilité n'est pas alors la suite de la nature des choses ; l'ouvrage de la nécessité, c'est le sien. On remarquera de plus que puisqu'il y a une assez grande probabilité que tout jugement faux est la suite de circonstances particulières qui ont influé sur le jugement, il en résulte nécessairement une probabilité que la vérité pourra être connue, & par conséquent un véritable devoir de ne se priver d'aucun moyen de réparer l'injustice.

Cette seule raison nous paroît détruire tout ce qu'on a pu

alléguer pour prouver la nécessité ou la justice de la peine de mort dans l'état de paix, c'est-à-dire, toutes les fois que la force publique peut contenir le coupable & l'empêcher de nuire.

Il est aisé de voir, en lisant cette analyse de la troisième Partie, qu'on n'a point prétendu donner ici les véritables déterminations de l'assurance qu'on doit chercher à se procurer pour les différens cas, mais seulement indiquer la méthode qu'il faut suivre pour y parvenir, les conditions qu'on doit chercher à remplir, avec des exemples de déterminations assez approchées pour donner une idée des résultats qu'on peut attendre du calcul.

Conclusion
générale.

Nous la terminerons par quelques règles générales, qu'il est facile de déduire de ce que nous avons dit.

1.° Dans chaque question on examinera soigneusement quelles sont les différentes espèces de dangers auxquels l'erreur ou la non-décision peuvent exposer.

2.° On fera en sorte que le risque qui reste malgré l'assurance, ait pour limite un autre risque du même genre que les hommes les plus sages négligent lorsqu'il est question d'intérêts de la même nature & aussi importans.

3.° On choisira pour exemples des dangers que la petitesse du risque fasse seule négliger, & auxquels on s'expose de sang-froid & pour un léger intérêt.

4.° S'il s'agit d'un risque involontaire, & sur-tout habituel, il ne faut pas prendre ce risque en lui-même, mais la différence de deux risques qu'on néglige tous deux, & qu'on regarde comme égaux, quoiqu'ils ne le soient pas.

5.° Puisqu'il faut déterminer dans chaque question le risque le plus grand qu'on puisse négliger, il ne suffit pas de déterminer

la valeur de ce risque ou de cette différence de risque, dans un seul cas, mais examiner d'après les observations un grand nombre de ces risques, & choisir le plus grand de ceux dans lesquels la petitesse du risque est plus uniquement le motif qui les fait négliger.

Analyse de la quatrième Partie.

Objet
de cette Partie.

L'OBJET de cette quatrième Partie, est d'indiquer des moyens de faire entrer dans le calcul des considérations qu'il n'est pas permis de négliger lorsqu'on cherche à en faire l'application à la pratique, & qu'on veut obtenir des résultats précis.

Questions
qui
y sont traitées.

Nous y discuterons six questions principales.

1.^o Du moyen d'avoir égard aux différences de probabilité que peuvent avoir les voix des mêmes Votans dans différentes décisions.

2.^o De la différence de probabilité entre les voix des Votans dans une même décision.

3.^o De l'influence qu'un ou plusieurs Votans, Rapporteurs, Présidens ou Membres perpétuels d'une assemblée peuvent avoir sur la voix des autres.

4.^o De la manière d'évaluer dans les jugemens l'influence de la mauvaise foi des Votans.

5.^o De la probabilité dans le cas où l'on oblige les Membres d'une assemblée de former un vœu unanime.

6.^o De l'usage de compter pour une seule voix celle de la pluralité, prise entre plusieurs Votans qui sont liés par la parenté.

Si la probabilité que l'on attribue à la voix de chaque Votant a été

a été déterminée d'après des décisions rendues à différentes pluralités, il est clair qu'elle n'est qu'une sorte de probabilité moyenne, prise entre plusieurs probabilités qui peuvent varier d'une décision à l'autre, & être différentes pour chaque Votant.

Or, 1.^o si l'on emploie la première méthode de la troisième Partie, pour déterminer la probabilité, & qu'on la cherche séparément pour les différentes pluralités, il est très-probable que les valeurs qu'on obtiendra seront d'autant plus grandes que les pluralités seront aussi plus grandes; & elles le seront certainement si on emploie la seconde méthode. Ainsi la valeur de la probabilité moyenne qu'on a trouvée en général, ne convient pas également à toutes les décisions, & l'on doit la supposer plus ou moins forte, suivant le degré de pluralité qu'on a obtenu.

2.^o On trouvera également que si la pluralité est supposée la même, la probabilité moyenne seroit d'autant plus petite, que le nombre des Votans seroit plus grand; & ces deux résultats sont d'accord avec ce que la raison semble indiquer. En effet, une assemblée de 25 Votans, qui a décidé à la pluralité de 20 voix contre 5, inspirera plus de confiance qu'une assemblée de 425 Votans qui aura décidé à la pluralité de 220 contre 205.

Les deux méthodes de déterminer la probabilité d'une décision future, que nous avons exposées dans la troisième Partie, donnent réellement une probabilité plus petite lorsque le nombre des Votans étant plus grand, la pluralité reste la même; & lorsque, le nombre des Votans étant le même, la pluralité augmente, elle donne également une plus grande augmentation de probabilité qu'on ne l'auroit, en supposant

1.^{ere} Question.
 Comment
 on doit avoir
 égard
 dans le calcul
 aux
 changemens
 de probabilité
 de la voix d'un
 même Votant
 dans
 différentes
 décisions.

celle de chaque voix égale à une quantité constante, comme dans la première Partie.

Mais cela ne suffit pas, puisque la différence qu'on trouve alors entre le résultat de la méthode de la troisième Partie & de celle de la première, naît uniquement de la distribution générale des voix, tant dans les décisions passées qui ont servi à déterminer la probabilité, que dans celle qu'on examine; &, comme nous venons de le montrer, il doit exister une différence de probabilité, dépendante seulement de la distribution des voix dans la dernière décision.

La méthode la plus sûre seroit sans doute de chercher à connoître les différentes probabilités, en divisant en plusieurs classes les décisions passées qui servent à déterminer la probabilité, à prendre séparément toutes celles qui donnent à peu-près une même pluralité proportionnelle; & ensuite, lorsqu'il s'agiroit de déterminer la probabilité d'une nouvelle décision, on emploïeroit, non la totalité des décisions passées, mais seulement le système de celles où le rapport de la pluralité au nombre des Votans est à peu-près le même que dans la nouvelle décision.

Cette méthode exigeroit des recherches plus longues, & sur-tout obligeroit à prendre un beaucoup plus grand nombre de décisions passées. Or, il en pourroit résulter une nouvelle source d'incertitudes. En effet, quelque méthode qu'on emploie, il faut supposer toujours que les nouveaux Votans, de la voix desquels on cherche à connoître la probabilité, sont à peu-près égaux en justesse d'esprit & en lumières à ceux dont les décisions passées servent de base à la méthode, ce qui exige qu'on se renferme dans des limites assez étroites relativement à la nature des décisions, à l'état de ceux qu

les ont rendues , à l'espace de temps que ces décisions ont embrassé & à la distance des lieux où elles ont été formées

Nous proposons de substituer à cette méthode le moyen suivant. On déterminera d'abord les deux limites les plus prochaines entre lesquelles on peut avoir une assurance suffisante , que se trouvera la probabilité de toutes les voix qui composent une assemblée de Votans *. Cela posé , on prendra pour chaque cas la probabilité , en supposant simplement que celle de chaque voix est entre ces limites. A la vérité on suppose, dans ce cas , que toutes les probabilités contenues entre ces limites peuvent avoir lieu également.

Mais il faut observer que la probabilité plus ou moins grande de chacune des valeurs qui sont entre les limites , dépend des observations faites sur la totalité des décisions passées ; qu'ainsi elle ne doit pas être admise ici , où l'on se propose principalement d'éviter l'erreur que cette manière de considérer la question, peut introduire dans l'examen de chaque décision particulière : au lieu qu'en supposant également probables toutes les valeurs contenues entre les deux limites, la valeur moyenne qui en résulte ne varie que suivant la distribution des voix dans chaque décision particulière.

Il faut observer ici que ces limites varient avec le nombre des Votans ; & que plus ce nombre est grand, plus la probabilité moyenne diminue. Alors cette diminution a deux causes :

* *Nota.* On n'a point parlé dans cet Ouvrage de la manière de trouver ces limites les plus prochaines ; la méthode en est fort simple. Soient u & u' ces deux limites, l'assurance étant supposée connue, on a une équation entre u & u' , & il faut prendre les valeurs de u & u' , qui donnent un *minimum* pour $u - u'$. La solution n'a de difficulté que la longueur du calcul, & on trouveroit facilement des moyens de la diminuer.

d'abord les formules analytiques donnent même, en supposant les mêmes limites, une probabilité plus petite, & de plus l'étendue plus grande de ces mêmes limites, tend encore à diminuer la probabilité. Cette conclusion est d'accord avec ce que la raison semble indiquer. En effet, il est aisé de voir que plus on multiplie le nombre des Votans, la pluralité étant constante, plus, en supposant qu'ils ont toujours les mêmes lumières, il devient vraisemblable que la probabilité de chaque voix est moindre dans cette décision particulière, que dans une autre décision, où un moindre nombre de ces Votans auroit rendu une décision à la même pluralité. Par exemple, si sur 425 personnes, on a eu 220 pour un avis, & 205 contre; & que dans un autre cas on ait, sur 25 personnes prises dans ce nombre, eu 20 voix pour un avis & 5 contre, on trouvera vraisemblable que dans l'affaire particulière, examinée par la première assemblée, la probabilité de chaque voix a dû être plus foible que dans la seconde.

De même il paroît naturel de supposer que lorsque le nombre des Votans augmente, la probabilité moyenne de la voix de chacun doit diminuer.

2.^{de} Question.
Comment
on doit avoir
égard
à l'inégalité
de lumières
des Votans
dans
une même
décision.

Dans cette première correction que nous avons proposé de faire, nous supposons encore toutes les voix égales; mais on sent que cette supposition ne peut que s'écarter beaucoup de ce qui existe dans la réalité, & qu'ainsi il faut, même dans chaque jugement isolé, avoir égard à l'inégalité des voix.

Le moyen que nous proposons ici, consiste à supposer les Votans partagés en un nombre quelconque de classes, pour lesquelles la probabilité est supposée restreinte entre certaines limites, & à prendre la probabilité moyenne, en supposant,

1.° la probabilité que chaque Votant est d'une classe plutôt que d'une autre égale à la probabilité que la voix est entre ces limites; 2.° que dans tous les jugemens, la différence de la probabilité des Votans d'une classe à celle des Votans d'une autre classe, reste constante.

C'est-à-dire, par exemple, que si on a des Votans pour lesquels la probabilité soit entre $\frac{9}{10}$ & $\frac{8}{10}$, & d'autres dont la probabilité soit depuis $\frac{8}{10}$ jusqu'à $\frac{7}{10}$; nous supposons que lorsque la probabilité des premiers, dans une certaine décision, ne sera que $\frac{88}{100}$, celle des autres ne sera que $\frac{78}{100}$.

On pourroit aussi, si l'on croyoit y trouver plus d'exactitude, supposer que ces limites de probabilité, au lieu d'être placées à des espaces égaux, le soient à des espaces proportionnels aux valeurs des probabilités, & que la probabilité diminue aussi d'une quantité proportionnelle pour toutes les voix en même-temps.

Mais ces recherches ne doivent avoir que peu d'utilité. En effet, nous avons déjà observé plusieurs fois qu'il ne suffisoit pas que la probabilité moyenne, avec quelque exactitude qu'elle soit déterminée, donnât une assurance suffisante, mais qu'il faut, autant que la nature des choses le permet, se procurer cette assurance dans les cas les plus défavorables. Ainsi, sans s'arrêter à faire entrer dans le calcul l'influence de l'inégalité de probabilité des voix, soit entre les Votans, soit dans les différentes décisions, il suffira de chercher une limite au-dessous de laquelle on ait une assurance suffisante que la probabilité d'aucun des Votans ne doit tomber, de supposer la probabilité égale à cette limite inférieure, & de remplir dans cette hypothèse toutes les conditions du problème, de manière à se procurer le degré d'assurance qu'exige la justice ou l'utilité.

Réflexion
générale
sur ces deux
premières
Questions :
nécessité
de prendre,
au lieu de la
probabilité
moyenne,
une
certaine limite
de la
probabilité.

3.^e Question.
Comment
on peut faire
entrer
dans le calcul
l'influence
d'une partie
des Votans
sur les autres.

Influence
des
Rapporteurs
ou des
Commissaires.

On peut supposer qu'un ou plusieurs Votans aient sur l'opinion des autres une certaine influence, & il est clair que cette influence tend, dans certains cas, à diminuer la probabilité de leurs jugemens.

Par exemple, dans les questions qui sont examinées par un ou plusieurs Commissaires chargés d'en faire leur rapport à une assemblée, il est vraisemblable, 1.^o que l'autorité que doit donner à ces Commissaires l'opinion qu'ils ont fait un examen plus approfondi de la question, influera sur la décision des autres Votans; 2.^o que leur voix aura réellement une probabilité plus grande en elle-même que celle des autres Votans. Ainsi, par la première raison, une décision rendue conformément à l'avis de ces Commissaires, aura une moindre probabilité; & par la seconde, elle peut avoir une probabilité plus forte.

Influence
des Membres
perpétuels
d'une
assemblée.

Il arrivera de même que les Membres perpétuels d'une assemblée, dont les autres Membres ne sont qu'à temps, auront vraisemblablement aussi quelque influence sur l'opinion de ces derniers; & si on suppose que ces Membres perpétuels sont plus instruits, il pourra en résulter aussi une augmentation ou une diminution de probabilité.

Influence
des Chefs.

Enfin on peut supposer de l'influence à un Chef, ou en plusieurs Chefs sur le Corps qu'ils président. Cette dernière influence ne peut tendre qu'à diminuer la probabilité, parce qu'on ne peut supposer raisonnablement que ces Chefs doivent avoir plus de lumières ou de justesse d'esprit que les simples Membres de l'assemblée.

Première
méthode
de calculer
l'influence.

Pour évaluer les effets de cette influence, nous suivrons deux méthodes différentes. Dans la première, nous supposons l'effet de l'influence sur chaque voix égal à la différence qui

a lieu entre la probabilité que cette voix sera de l'avis du Votant auquel on suppose de l'influence, & la probabilité que deux Votans quelconques seront du même avis. On suppose ensuite que la probabilité qu'un Votant prononcera en faveur de la vérité ou de l'erreur, diminue en proportion de cette influence; & on prend, tant pour le cas où le Votant qui a influé sur le jugement a prononcé en faveur de la vérité, que pour celui où il a voté contre, la probabilité qui résulte de cette hypothèse pour les différentes distributions de voix.

Cette méthode s'applique également au cas où l'on regarde la probabilité de la vérité des voix comme donnée & constante, & à ceux où on la déduit des observations.

Elle s'applique aussi à l'hypothèse de l'influence de plusieurs Votans.

Elle est d'ailleurs assez simple, & on peut la regarder comme propre à faire connoître exactement l'influence lorsque l'on a un très-grand nombre de décisions connues, d'après lesquelles on cherche à connoître la probabilité d'une décision future.

Mais comme cette méthode n'est pas rigoureuse, nous discutons ensuite la question par des principes plus exacts: nous cherchons d'abord la probabilité qu'il existe une influence, & nous la trouvons, en déterminant la probabilité que dans une suite infinie de votations, celles qui sont en faveur de la vérité seront en plus grand ou en plus petit nombre, dans le cas où l'influence a lieu, que dans celui où elle n'a pas lieu.

Seconde
méthode.

Nous déterminons ensuite la probabilité pour chaque décision future, en ayant égard aux effets de l'influence, &

nous déterminons enfin ces effets, en comparant cette probabilité avec celle qu'on auroit eue s'il n'y avoit pas existé d'influence.

Si l'on a l'avantage d'avoir des décisions qui ne soient soumises à aucune influence, & de pouvoir les comparer immédiatement à celles qui y sont soumises, la méthode est rigoureuse en elle-même; mais si l'on n'a point de pareilles décisions, alors on aura une expression, à la vérité plus incertaine de la probabilité de l'influence, en cherchant la probabilité de l'avantage qui résulte en faveur de la vérité: 1.^o en considérant la distribution dans la somme totale des décisions, & la comparant à celle de ces mêmes voix, prises successivement pour le cas où le Votant qui a une influence, prononce pour la vérité & pour celui où il prononce contre; 2.^o en considérant chacune de ces deux distributions séparément, & les comparant entr'elles.

Cette seconde comparaison est plus rigoureuse, parce qu'il est aisé de voir que s'il n'y a aucune influence, il ne doit exister aucun avantage d'une de ces distributions de voix sur l'autre.

Il se présente une autre difficulté sur cette méthode; c'est que non-seulement la différence de proportion entre les voix vraies ou fausses dans chaque hypothèse, mais le nombre même de ces voix, changent la valeur des probabilités où conduit cette méthode.

Ce résultat doit avoir lieu à la rigueur. En effet, il est aisé de voir que si, par exemple, sur trois mille évènements on en a deux mille favorables & mille contraires, la probabilité d'avoir un évènement favorable sera plus grande que
si

si sur trois cents on en avoit eu deux cents favorables & cent contraires.

Mais dans le cas que l'on considère ici, nous croyons qu'on s'approcheroit plus près de la vérité, en faisant en sorte que les nombres absolus des voix, dont on compare la distribution, soient égaux entr'eux, ce qui peut s'exécuter si les assemblées dont on considère les décisions sont formées d'un nombre constant de Votans. En effet, on pourra, prenant pour base l'hypothèse qui donne le moins de décisions, la comparer successivement avec toutes les combinaisons possibles d'un même nombre de décisions que donnent les autres hypothèses.

Ces deux méthodes semblent devoir mériter la préférence, chacune dans des cas différens: la première, lorsque la différence du nombre absolu paroît en quelque sorte une suite nécessaire de l'hypothèse même: la seconde, lorsque les deux hypothèses paroissent indépendantes.

Si l'on considère l'influence d'un nombre donné de Votans, il est clair qu'on ne peut avoir de méthode rigoureuse, à moins de connoître des décisions soumises à cette influence; & dans ce cas, la méthode par laquelle on détermine l'influence d'un Votant, s'applique à cette nouvelle hypothèse sans aucune difficulté. Si au contraire l'on n'a point de décisions semblables à celles qu'on examine, mais seulement des décisions soumises à l'influence d'un Votant, l'on est obligé de recourir à une hypothèse pour déterminer les effets de cette influence multipliée. Celle que nous proposons consiste (pour l'influence de trois Votans, par exemple) à prendre dans la suite des décisions où un seul Votant a eu de l'influence, toutes les combinaisons trois à trois qu'elles peuvent former,

Influence
de plusieurs
Votans.

f

& à distinguer ainsi les cas où l'on a trois de ces Votans pour la vérité, deux pour la vérité & un contre; deux pour l'erreur & un pour la vérité; enfin trois pour l'erreur. Cette supposition peut être regardée comme assez exacte, parce qu'elle revient, si on suppose infini le nombre des décisions connues, à imaginer que lorsque l'influence d'un Votant a diminué la probabilité qu'une décision, faite indépendamment de l'influence, sera vraie ou fausse, celle d'un second Votant agit proportionnellement sur cette seconde probabilité, & ainsi de suite.

On peut dans ces recherches employer également les deux méthodes de la troisième Partie; mais si au lieu de considérer la distribution des voix dans les décisions, on considérait les décisions en elles-mêmes, alors il faudroit préférer la première méthode, la seconde ne pouvant s'appliquer à cette dernière question qu'avec difficulté, & ne pouvant même conduire alors qu'à des résultats hypothétiques.

Au reste, si l'on opère d'après un très-grand nombre de décisions données, les méthodes précédentes conduiront à des résultats suffisamment exacts pour la pratique.

Deux manières
de concevoir
l'action
de l'influence.

On peut concevoir de deux manières différentes l'action de cette influence. En effet, on peut supposer que certains Votans, ou tous les Votans dans certaines circonstances, peuvent se décider d'après l'avis des Chefs de l'Assemblée ou des Commissaires chargés d'examiner la question, de manière que la probabilité de leur voix devienne nulle; effet qui, dans ce cas, est le même que celui de la corruption; ou bien l'on peut supposer que la probabilité de leur voix est seulement diminuée, comme nous verrons qu'elle l'est dans le cas où l'on oblige les Votans de former une décision unanime;

Dans ces deux cas, il est également nécessaire, si l'on veut remplir les conditions auxquelles toute décision doit être assujettie, d'avoir une assurance suffisante que l'influence ne fera point assez forte pour faire tomber la probabilité de la décision au-dessous de la limite qu'elle doit avoir; assurance qu'on ne peut obtenir, à moins que l'influence ne soit très-petite. Il faut donc chercher à diminuer cette influence, ou faire en sorte qu'elle soit partagée entre plusieurs Votans, de manière que dans le cas d'une certaine pluralité entr'eux, leur voeu suffise pour donner une grande probabilité à la décision, & que dans le cas d'une pluralité moindre, leur influence devienne très-petite.

Cependant le premier moyen est encore préférable, & on remplira plus facilement son but avec un nombre moindre de Votans égaux & assujettis à prendre la même instruction, qu'avec une assemblée plus nombreuse & d'une forme plus compliquée.

Il faut observer de plus, que la supposition d'une influence qui affoiblit la probabilité du jugement dans tous les cas, mais qui n'aïlle jamais à déterminer le jugement, & par conséquent à rendre la probabilité nulle, ne peut être regardée comme légitime, excepté dans le cas où l'influence est réellement très-petite. En effet, si elle est sensible, on peut avoir lieu de craindre qu'elle ne détermine l'avis d'un ou de plusieurs Votans, & il résulte de la seule possibilité de ce danger, qu'il est nécessaire de se procurer une assurance suffisante; même dans l'hypothèse d'une influence qui détermine l'avis.

En supposant les Votans capables de mauvaise foi, ou de corruption, on trouvera de même qu'il est nécessaire d'exiger une pluralité assez forte, & de prendre un nombre de Votans

Nécessité
d'une assurance
suffisante
d'avoir une
décision vraie,
même dans
l'hypothèse
que l'influence
puisse rendre
nulle
la probabilité
de
quelques voix

4.^e Question.
Comment
on peut avoir
égard
à la corruption

ou à la
mauvaise foi
qu'on peut
soupçonner
dans
les Votans.

assez grand pour avoir une assurance suffisante, que dans le cas de la moindre pluralité exigée, l'influence de la corruption ou de la mauvaise foi, ne fera pas tomber la probabilité au-dessous de la limite qu'elle doit avoir; ce qui exige nécessairement que cette influence soit très-petite. Le choix des Votans, les exclusions, les récusations, seront ici des moyens beaucoup plus sûrs que ceux qui pourroient être tirés de la forme des décisions & de la constitution du Tribunal.

5.^e Question.

Comment
on peut estimer
la diminution
de probabilité
à produire
pour
la nécessité
qu'on impose
aux Votans,
de revenir
à l'unanimité.
Importance
de
cette question.

Cette forme
de décision
est en usage
dans la
Jurisprudence
criminelle de
l'Angleterre.

Opinions
opposées sur
les avantages
de cette forme.

V. La question que nous traitons ensuite est plus importante; c'est celle où l'on suppose que les décisions d'un Tribunal ne sont censées rendues que lorsque toutes les voix sont réunies, mais où l'on exige qu'elles reviennent à l'unanimité.

Les jugemens criminels en Angleterre se rendent sous cette forme: on oblige les Jurés de rester dans le lieu d'assemblée jusqu'à ce qu'ils soient d'accord, & on les oblige de se réunir par cette espèce de torture; car non-seulement la faim seroit un tourment réel, mais l'ennui, la contrainte, le mal-aise, portés à un certain point, peuvent devenir un véritable supplice.

Aussi pourroit-on faire à cette forme de décision un reproche semblable à celui qu'on faisoit, avec tant de justice, à l'usage barbare & inutile de la torture, & dire qu'elle donne de l'avantage à un Juré robuste & fripon, sur le Juré intègre, mais foible.

Cependant les avantages que la Jurisprudence criminelle Angloise a dans plusieurs autres points sur celle des autres pays de l'Europe, a excité un enthousiasme si général parmi les amis les plus éclairés de l'humanité & de la justice, qu'il est difficile de l'attaquer en quelques points sans blesser l'opinion de ceux même dont on doit desirer le plus de mériter le suffrage: & la force de la vérité, appuyée de l'autorité de

quelques hommes non moins éclairés, & qui ont échappé à cet enthousiasme, peut seule encourager à rendre publics des résultats contraires à une opinion si imposante.

Nous observerons d'abord qu'on doit distinguer trois sortes de questions : les premières sont celles où la vérité d'une opinion est susceptible, soit d'une démonstration rigoureuse, soit d'une probabilité très-grande & inassignable, ou d'une probabilité qui peut être évaluée avec exactitude par une méthode rigoureuse.

Telles sont en général les vérités des Sciences physiques, ou celles qui dépendent du raisonnement.

Dans ce cas, celui qui vote en faveur d'une proposition, prononce seulement *qu'il croit cette proposition prouvée* ; & il paroît qu'on doit regarder l'avis de celui qui, après avoir voté pour une proposition de ce genre, vient à voter contre, ou réciproquement, comme ayant toujours la même probabilité. Mais, par la même raison, on ne peut exiger de revenir à l'unanimité dans des questions de ce genre, à moins de consentir implicitement qu'une partie de ceux qui prononcent, finissent par voter contre leur conscience, ou bien de supposer que tous finiront par convenir de la vérité ; ce qui ne peut guère arriver, à moins qu'on ne laisse à ceux qui se sont trompés d'abord, le temps de revenir sur leurs idées, d'acquiescer de nouvelles lumières, de se défaire de leurs préjugés, ou aux autres d'établir d'une manière victorieuse les preuves de la vérité qu'ils ont adoptée.

Aussi, du moins dans des pays ou des siècles éclairés, n'a-t-on jamais exigé cette unanimité pour les questions dont la solution dépend du raisonnement. Personne n'hésite à recevoir comme une vérité l'opinion unanime des gens

Les décisions doivent être ici partagées en trois classes.

Décisions qui ont pour objet des opinions susceptibles d'être prouvées par le raisonnement.

Cette forme de décisions n'y est pas applicable.

instruits, lorsque cette unanimité a été le produit lent des réflexions, du temps & des recherches : mais si l'on enfermoit les vingt plus habiles Physiciens de l'Europe jusqu'à ce qu'ils fussent convenus d'un point de doctrine, personne ne seroit tenté d'avoir la moindre confiance en cette espèce d'unanimité.

Décisions qui ont pour objet des opinions susceptibles d'une probabilité plus ou moins grande, mais indéterminée, & qu'on ne peut admettre que lorsqu'elles sont prouvées.

Il y a un autre genre d'opinions, celles qui sont admises lorsqu'elles ont un certain degré de probabilité, qu'on appelle *preuves*, & rejetées lorsqu'elles ne l'ont pas.

Prononcer en faveur de ces opinions, c'est dire qu'elles ont ce degré de probabilité, ou un degré supérieur : prononcer contre, c'est dire que leur probabilité est au-dessous ; mais en même-temps ce degré de probabilité n'est pas rigoureusement précis, & il est possible qu'un Votant, par des motifs étrangers à la plus ou moins grande probabilité d'une proposition, fixe tantôt à un point, tantôt à un autre, la limite au-dessus de laquelle seulement il se permettra de regarder une opinion comme prouvée.

Examinons maintenant dans cette hypothèse, quelle probabilité on doit attacher à la voix d'un Votant, soit lorsqu'après avoir regardé une proposition comme n'étant pas assez prouvée, il juge ensuite que les preuves en sont suffisantes ; soit lorsqu'après avoir jugé que la proposition est prouvée, il finit par juger que les preuves en sont insuffisantes.

Nécessité de distinguer ici la probabilité qu'un Votant s'est décidé en faveur de la vérité, & la probabilité qu'il ne s'est pas trompé sur les limites qu'il suppose à la probabilité de l'opinion qu'il adopte.

Pour cela, nous distinguerons d'abord la probabilité du jugement d'un Votant, relativement à la vérité absolue d'une proposition, & la probabilité de ce même jugement sur le degré de probabilité de cette même proposition : nous déduirons la seconde de la connoissance de la première, en supposant connu le degré de probabilité, ou plutôt la limite de ce degré étant supposée connue, & nous chercherons enfin la valeur

de cette même probabilité lorsque le Votant change d'avis, afin de la comparer à la première.

Cela posé, dans le premier cas que nous considérons ici, celui qui a prononcé que la probabilité d'une proposition étoit au-dessous d'une limite donnée, & en conséquence qu'elle ne devoit pas être regardée comme prouvée, & qui prononce ensuite qu'elle doit être regardée comme prouvée, peut avoir deux motifs de son jugement. Il peut croire, en changeant d'avis, que la proposition a réellement une probabilité supérieure à cette limite, au-dessous de laquelle il l'avoit crue d'abord; ou bien en continuant de la croire au-dessous de cette limite, il se déterminera à la regarder comme prouvée, parce qu'elle est au-dessus d'une limite inférieure qu'il croit alors suffisante. Supposons, par exemple, qu'il soit question de juger un accusé; qu'un des Votans prononce qu'il n'est pas coupable, & entende par-là que la probabilité du crime est au-dessous de $\frac{99999}{100000}$: supposons ensuite que ce même Votant change d'avis, & prononce que l'accusé est coupable, on peut supposer qu'il se rend à de nouvelles raisons qui lui ont persuadé que la probabilité du crime étoit au-dessus de $\frac{99999}{100000}$, ou bien qu'il continue de croire cette probabilité au-dessous de cette limite, mais au-dessus de $\frac{99995}{100000}$, & qu'il consent à regarder cette preuve comme suffisante. Cette manière d'expliquer l'effet des causes étrangères à la vérité de la proposition, paroît assez naturelle; c'est même seulement ainsi qu'elles doivent agir sur un Votant honnête, mais qui manque un peu de courage ou de lumières. Ce n'est pas un homme innocent qu'il se détermine à déclarer coupable, c'est un homme qu'il regarde comme criminel, mais contre lequel il a cru d'abord qu'on n'avoit pas acquis de preuves assez convaincantes.

Premier cas : celui où un Votant qui avoit d'abord regardé une proposition comme non prouvée, change d'avis, en la regardant comme ayant une preuve suffisante.

On pourroit imaginer d'autres méthodes de calculer la probabilité dans l'hypothèse que nous considérons ici, mais celle-ci a pour base une espèce d'influence dont on ne peut nier l'effet; & si dans un grand nombre de cas il en résulte une incertitude dans les jugemens, cela suffit pour regarder comme certains les inconvéniens de cette méthode, puisque, comme nous l'avons répété plus d'une fois, la Justice exige de proscrire toute forme de décision qui introduit dans les jugemens une incertitude qui n'est pas une suite nécessaire de la nature même des choses.

Conséquences qui résultent, pour ce premier cas, de la distinction entre ces deux sortes de probabilités.

En appliquant cette méthode au cas de l'hypothèse que nous considérons, on trouve ces deux conclusions: la première, que la probabilité de ne pas condamner un innocent, peut rester encore très-grande, malgré la diminution qui naît du changement arrivé dans les avis; la seconde, que la probabilité de ne condamner qu'un coupable dont le crime soit réellement prouvé, doit au contraire devenir très-petite.

Second cas. Un Votant, après avoir décidé qu'une proposition étoit prouvée, décide ensuite, en changeant d'avis, que les preuves ne sont pas suffisantes.

Si on suppose ensuite qu'un Votant, après avoir prononcé pour une proposition, en disant qu'elle est prouvée, vote contre en disant qu'il ne la regarde plus comme prouvée, on trouvera que ce changement a lieu, ou parce que le Votant suppose à la probabilité de cette proposition une limite inférieure à la première, qu'il y avoit supposée; ou parce que croyant toujours qu'elle a cette même limite, il la regarde, dans ce second avis, comme ne formant pas une preuve suffisante. Il résulte de cette manière de considérer les changemens d'avis, que la probabilité de la vérité de la proposition rejetée, ou même celle que cette même proposition est réellement prouvée, peut encore être très-grande, malgré le changement d'avis. Si donc la proposition, d'abord admise
par

Conséquences auxquelles conduit le Calcul,

par un Votant, & rejetée ensuite, est celle-ci ; *un accusé est coupable* : lorsque le changement qui réduit ces voix à l'unanimité, a lieu pour une grande partie des Votans, il arrivera nécessairement qu'un accusé sera renvoyé, quoiqu'il y ait une grande probabilité qu'il soit coupable, & même une grande probabilité que son crime soit prouvé.

On voit donc que dans les jugemens en matière criminelle, cette méthode d'exiger que les voix se réduisent à l'unanimité, a l'avantage de ne pas exposer un accusé innocent à être condamné, mais qu'elle expose à condamner un accusé, quoique son crime ne soit pas suffisamment prouvé ; qu'enfin elle est d'ailleurs beaucoup moins propre qu'une forme plus simple à faire éviter l'inconvénient de ne pas laisser échapper un coupable. Il est facile d'expliquer dès-lors pourquoi cette forme a séduit les amis de l'humanité, les âmes compatissantes ; comment dans des temps peu éclairés, & où l'on connoissoit peu la distinction nécessaire entre une proposition vraie & une proposition prouvée, on a regardé cette forme comme la meilleure qu'on pût établir, & comment enfin les défauts qu'elle peut avoir n'ont frappé parmi les hommes vraiment éclairés, qu'un petit nombre d'esprits.

Peut-être ne seroit-il pas inutile d'entrer ici dans quelques détails sur la différence que nous avons dit qu'il étoit nécessaire d'établir entre la probabilité réelle de la vérité d'une proposition & la probabilité que cette même proposition a un certain degré de probabilité absolue ou moyenne.

Nous nous servirons pour cela d'un exemple. Supposons deux urnes, contenant chacune 10000 boules ; que la première en contienne 9999 blanches & une noire, & la seconde 9999 noires & une blanche ; supposons ensuite

Examen de la différence qui existe entre la probabilité de la vérité d'une opinion & celle de l'existence des preuves de cette opinion.

Principes pour connoître la nature de cette différence.

que l'on ait tiré une boule de chacune de ces urnes, que je doive en choisir une, & que j'aie un grand intérêt de tirer une boule blanche plutôt qu'une boule noire.

Si je puis distinguer celle qui a été tirée de la première urne, de celle qui a été tirée de la seconde, je choisirai la première, & j'aurai une probabilité $\frac{99999}{100000}$ d'avoir une boule blanche.

Supposons maintenant que j'ignore de quelle urne chaque boule a été tirée, mais qu'un témoin, ou plusieurs témoins, dont les voix réunies aient pour moi une probabilité $\frac{999}{1000}$, me disent quelle boule a été tirée de la première ou de la seconde urne, j'aurai alors une probabilité $\frac{99999}{100000}$, multipliée par $\frac{999}{1000}$, que la boule qu'ils me disent tirée de la première urne est blanche, & une probabilité $\frac{1}{100000}$, multipliée par $\frac{999}{1000}$, qu'elle est noire; mais comme il y a une probabilité $\frac{1}{1000}$ qu'ils m'ont trompé, & que cette boule a été tirée de la seconde urne, j'aurai par conséquent, pour le cas où ils m'ont trompé, une probabilité $\frac{99999}{100000}$, multipliée par $\frac{1}{1000}$, que la boule est noire, & une probabilité $\frac{1}{100000}$, multipliée par $\frac{1}{1000}$, que cette boule est blanche: la probabilité de bien choisir, que j'aurai en prenant cette boule, sera donc $\frac{99899002}{100000000}$; mais celle de choisir celle des deux boules que je dois préférer, & en même-temps de choisir une boule blanche, ne sera que $\frac{99899001}{100000000}$. On voit que cette dernière probabilité est celle que la proposition est à la fois vraie & la plus probable, & que la limite de cette probabilité est $\frac{99999}{100000}$ quand celle de la probabilité qui résulte des témoignages a l'unité pour limite.

Supposons maintenant que les témoins sachent seulement que l'on a tiré des deux urnes un certain nombre de boules

blanches & de boules noires ; qu'ils en aient conclu laquelle des deux contient des boules blanches en plus grand nombre, & que d'ailleurs ils puissent se tromper dans cette conclusion, ou me tromper, il y aura, outre la probabilité $\frac{99999}{100000}$, qui a lieu si je choisis la boule tirée de l'urne la plus avantageuse, une certaine probabilité réelle que cette urne la plus avantageuse, est plutôt celle qui a donné le plus de boules blanches que l'autre, qui a donné le plus de boules noires ; & enfin la probabilité que chaque témoin ne m'a point trompé sur cette seconde probabilité. Dans ce cas, si on suppose que le nombre des témoins devienne plus grand, il est clair que la première & la seconde probabilité resteront les mêmes, & que la troisième est la seule qui croisse indéfiniment avec ce nombre.

Si au lieu d'avoir été témoins des mêmes observations sur le tirage des boules, chacun de ceux qu'on interroge en avoit vu de nouvelles, alors chaque témoignage accroîtroit la seconde probabilité, c'est-à-dire, la probabilité réelle que telle ou telle urne est la plus avantageuse ; en sorte que cette seconde probabilité croîtroit alors avec le nombre des témoignages, &, dans certains cas, pourroit croître indéfiniment jusqu'à l'unité.

Supposons enfin que j'ignore quelle est la proportion des boules blanches ou noires dans les deux urnes, alors la probabilité réelle n'existe point pour moi, & je ne puis avoir qu'une probabilité moyenne, déduite du nombre des boules blanches & noires qu'on a observé être tirées de chacune des urnes. Ainsi, dans cette nouvelle hypothèse, la probabilité réelle & celle que l'on ne se trompera pas en déterminant, d'après les données, l'urne la plus avantageuse, se confondent

ensemble : & suivant que chaque témoignage sera fondé sur les mêmes observations , ou que chacun fait de nouvelles suites d'observations , on pourra , en multipliant les témoignages , faire croître indéfiniment , ou seulement la probabilité que ces témoignages ne tromperont pas , ou cette probabilité & en même-temps celle d'une certaine proportion entre les boules blanches & noires. L'on déduira de cette dernière la probabilité de connoître l'urne la plus favorable & celle d'avoir une boule blanche , en choisissant celle qui en est tirée , & ces deux probabilités peuvent , dans ce cas , aussi croître indéfiniment ; mais l'une croît nécessairement avec le nombre des témoignages , & l'autre seulement dans le cas où le rapport des boules blanches aux boules noires croît indéfiniment pour une des urnes , tandis qu'au contraire c'est le rapport des boules noires aux blanches qui croît indéfiniment dans celles qui sont tirées de la seconde.

Conséquences
qui
en résultent.

Voyons maintenant comment les principes où nous a conduit cet exemple , peuvent s'appliquer à des cas réels.

D'abord il est clair qu'il y a des cas où il existe , même relativement à nous , une probabilité réelle d'une proposition ; & alors le jugement de tous les hommes , en faveur de cette proposition , ne peut produire une probabilité plus grande.

Tel est , par exemple , un trait d'Histoire , telle est même une proposition de Physique : si ceux qui y croient se bornent aux preuves données avant eux , & n'en cherchent pas de nouvelles , leur consentement , en supposant qu'il pût produire une certitude , prouveroit seulement qu'il est certain que ce fait , que cette proposition sont probables. La probabilité qui naît de ce consentement , ne s'étend pas même au-delà de celle que ceux qui donnent ce consentement ont acquise de la vérité de cette proposition.

Ensuite il y a des cas où cette probabilité réelle n'existe point par rapport à nous. S'il s'agit, par exemple, d'une proposition de Physique, de l'examen de laquelle les Physiciens s'occupent, il est clair que le consentement de chacun la confirmant par de nouveaux faits, ou donnant plus de probabilité à ceux sur lesquels elle est appuyée, tend continuellement à en augmenter la probabilité.

Dans le cas que nous considérons ici, celui d'un fait sur la vérité duquel une assemblée prononce, sa probabilité réelle n'est pas connue, mais il est clair qu'elle a d'abord pour limite la probabilité propre aux faits de cette espèce, appuyés sur des preuves de la nature de celles qu'on a pu obtenir: ainsi, en supposant l'assemblée aussi nombreuse qu'on voudra, & unanime, elle ne produira jamais une probabilité au-dessus de cette limite.

Mais chacun des Votans, en prononçant en faveur d'une opinion, & en décidant qu'elle est prouvée, prononce seulement qu'elle a un degré de probabilité au-dessus d'une certaine limite, ou un tel degré de probabilité moyenne. Supposons que plusieurs autres Votans prononcent la même chose, si on connoît la valeur de ce degré de probabilité, & en même-temps la probabilité qu'ils se sont trompés dans cette évaluation, on connoîtra la probabilité moyenne de la vérité dans ce cas. Alors, en multipliant le nombre de ces Votans, on approchera seulement indéfiniment de la certitude que cette proposition est prouvée, mais la probabilité de la proposition n'excédera pas la limite où l'on suppose que la probabilité commence à être ce qu'on appelle *une preuve*, ou la valeur moyenne de la probabilité regardée comme une preuve.

Telle seroit donc l'espèce de probabilité qu'on devoit chercher à déterminer par le Calcul. Si l'on connoissoit exactement une limite de la probabilité qui doit être regardée comme preuve, celle que dans chaque cas les Votans regardent comme telle; si l'on connoissoit de plus la probabilité de chaque voix, relativement à la vérité réelle de la proposition; on en tireroit alors la valeur de la probabilité que le Votant ne se trompe pas sur la limite qu'il assigne à la probabilité.

Mais les Votans n'exprimant pas cette limite dans leur vœu; elle reste par conséquent indéterminée, elle est réellement inconnue, & il est vraisemblable que quand plusieurs Votans sont d'avis qu'une proposition est prouvée, la limite de la probabilité sera plus haute que si un seul Votant la jugeoit prouvée. Ce n'est donc pas ici rigoureusement le cas où tous les témoins jugent d'après les mêmes observations; à la vérité les preuves sont ici les mêmes pour tous; mais si lorsque le nombre des Votans en faveur d'une opinion est plus grand, il n'en résulte pas une augmentation dans les preuves réelles de cette proposition, cet accord entre un plus grand nombre doit faire croire que cette preuve est plus forte: nous avons donc supposé ici que les preuves croissent avec le nombre des Votans; mais en même-temps il nous a paru nécessaire que la proposition fût vraiment prouvée pour chaque Votant, & par conséquent de n'admettre pour la probabilité légale de la proposition que la probabilité qu'elle est à la fois vraie & prouvée. Dans cette même supposition, la limite de la probabilité seroit réellement, comme nous l'avons déjà observé, non l'unité, mais la plus grande probabilité que peuvent produire le genre des questions & la nature des preuves existantes dans chaque cas.

Au reste, cette question est inutile à l'objet principal que nous nous proposons, parce que l'affoiblissement de la probabilité, qui naît de la nécessité de revenir à l'unanimité, est exprimé à la vérité par des formules différentes, suivant ces deux manières de considérer ces probabilités dans le calcul; mais il est toujours très-sensible, & les résultats demeurent les mêmes.

On peut considérer encore le cas où l'on seroit obligé de se réunir à l'unanimité, mais où l'on prononceroit, non que la proposition qu'on adopte est prouvée, mais qu'elle est seulement plus probable que la contradictoire. On trouvera encore ici des conclusions semblables: mais il seroit inutile de s'arrêter sur ce dernier objet.

Décisions qui ont pour objet de choisir seulement la plus probable de deux opinions contradictoires

Le *liberum veto* des Nonces dans les diètes de Pologne, le *veto* des Tribuns de Rome, le droit négatif du premier Magistrat, ou d'un Corps, soit de Magistrats, soit de représentans dans les Républiques modernes, rentrent à la vérité dans cette dernière hypothèse, mais personne n'a imaginé jusqu'ici de regarder ces formes comme propres à produire des décisions conformes à la vérité: on n'a pu les louer que comme des moyens d'assurer les droits de la liberté, ou d'établir cet équilibre de pouvoirs, regardé long-temps comme l'objet essentiel de toute bonne constitution.

VI. Nous terminerons cette Partie par l'examen de l'usage introduit dans quelques pays, d'admettre dans un même Tribunal des parens très-proches, mais de réduire à une seule voix l'avis qu'ils adoptent unanimement ou à la pluralité, afin d'éviter les inconvéniens de l'influence réciproque qu'ils peuvent exercer sur leurs opinions.

Des décisions où la combinaison de plusieurs voix n'est comptée que pour une seule

Cela posé, nous trouvons, 1.^o que dans le cas d'unanimité, cette loi ne peut être d'accord avec les résultats du calcul, si

la probabilité de l'erreur & celle de la vérité de la décision des Votans ne sont pas égales, ou si l'influence n'est pas égale à l'unité, c'est-à-dire, si elle n'est pas l'unique motif qui détermine la décision.

2.^o Que dans le cas de la pluralité, la loi n'est conforme aux résultats du calcul que si les valeurs de la probabilité de la vérité & de celle de l'erreur sont égales entr'elles, ou bien lorsque l'influence a une certaine valeur déterminée.

Dans le premier cas, si on suppose la probabilité de la vérité de la décision plus grande que celle de l'erreur, abstraction faite de l'effet de l'influence, on trouvera que la loi attribuée à la probabilité de ces voix combinées une valeur plus foible que celle qu'elle a dans la réalité.

Dans le cas de la pluralité, si cette pluralité est 1, la loi donne une valeur trop forte, à moins que l'influence ne soit nulle. Si cette pluralité est 2, la loi donne une valeur trop grande ou trop petite, suivant celle qu'on peut supposer à l'influence, & ces limites dépendent de la valeur de la probabilité. Si, par exemple, la probabilité de la vérité de la décision est $\frac{9}{10}$, & celle de l'erreur $\frac{1}{10}$, la loi donnera 9 pour le rapport de la probabilité de la vérité à celle de l'erreur, & le calcul donnera 81 & une valeur au-dessus de 9, tant que l'influence sera au-dessous de $\frac{6}{10}$: si elle est au-dessus, alors la loi supposera une trop grande valeur à la probabilité.

Il en est de même pour les autres pluralités. Si elle est de 3, par exemple, en conservant les mêmes nombres, nous aurons, si l'influence est nulle, 729 pour le rapport que donne le calcul entre la probabilité de l'erreur & celle de la vérité, & 9 pour celui que suppose la loi. Ce dernier rapport restera toujours plus petit que le premier, tant que
l'influence

l'influence sera au-dessous de $\frac{128}{228}$, & deviendra plus grande si l'influence excède cette limite.

On voit donc que cette loi n'a point été faite d'après un examen approfondi de la nature de ce genre d'influence, mais d'après le simple sentiment de la réalité de cette influence, & le desir d'en éviter les inconvéniens. On voit ensuite qu'à la vérité, à moins de supposer à l'influence une valeur très-grande, cette loi suppose à ces voix une probabilité moindre que celle qu'elles ont réellement, excepté dans le cas où la pluralité n'est que d'une unité, ce qui diminue les dangers de cette fausse évaluation, en sorte qu'elle n'a, pour ainsi dire, que l'inconvénient de grossir le Tribunal de Membres inutiles. Ainsi, lorsque la cause de l'influence sera prévue, & qu'elle dépendra de relations extérieures, comme la parenté, il sera plus utile de statuer qu'on n'admettra point dans le Tribunal plusieurs Votans qui aient entr'eux ces relations, que de chercher à remédier aux inconvéniens de leur influence par cette réduction de voix ou par un autre moyen.

Conséquences
qui résultent
du Calcul.

On n'a pas cru devoir traiter ici d'une forme de décision établie dans quelques pays, & dans laquelle la voix d'un des Votans est comptée pour deux voix.

Voix pré-
pondérantes,

Il est aisé de voir que si ce Votant n'est pas nécessairement plus éclairé qu'un autre, il en résulte à la fois que la prépondérance produit un partage lorsqu'il y a une foible probabilité en faveur d'un des deux avis, & donne une décision lorsque les deux avis sont également probables, en sorte que dans ce dernier cas il seroit plus juste & plus raisonnable de tirer la décision au fort. Il n'en seroit pas de même si, par la nature des choses, le Votant auquel on accorde la double voix, devoit être supposé moins sujet à l'erreur que les autres.

Alors si la voix de ce Votant n'a pas absolument la même probabilité que deux autres voix réunies, il en résulte qu'elle produira le partage, quoiqu'il y ait une petite probabilité en faveur de l'avis contraire au sien, & qu'elle déterminera, dans le cas où la prépondérance forme l'avis, une décision en faveur de l'opinion qui est la plus probable: mais cette opinion peut alors l'être moins que celle qui avoit la pluralité lorsque la voix prépondérante a causé le partage. Par exemple, si la probabilité de la voix commune étant $\frac{4}{7}$, celle de la prépondérante est plus grande que $\frac{8}{9}$, alors l'opinion adoptée est plus probable que celle qui a eu la pluralité dans le cas de partage: elles le sont également si la probabilité de la voix prépondérante est égale à $\frac{8}{9}$: enfin la première opinion est moins probable si la probabilité de la voix prépondérante est au-dessous de cette limite.

Cette forme peut cependant être admise, mais pourvu que les objets sur lesquels on prononce soient du nombre de ceux qu'on peut abandonner à l'opinion ou à la volonté d'un seul homme; que ceux qui ont droit de décider, ne puissent être qu'en nombre pair, que la décision soit nécessaire, & qu'enfin il soit impossible ou injuste de faire décider, dans le cas de partage, par d'autres Votans.

Nous n'avons donné ici que l'application des principes établis dans les Parties précédentes, à quelques-unes des questions qui peuvent se présenter dans la pratique, & nous nous sommes bornés dans cette application à présenter les méthodes générales & les remarques nécessaires pour conduire aux résultats qui nous ont paru les plus essentiels. Ainsi l'on doit regarder sur-tout cette quatrième Partie comme un simple essai, dans lequel on ne trouvera ni les développemens

ni les détails que l'importance du sujet pourroit exiger.

Mais il résulte de ce que nous avons exposé :

1.^o Que puisqu'il est difficile de déterminer les valeurs différentes de la probabilité des voix pour les décisions rendues à différentes pluralités, & qu'il est plus difficile encore d'évaluer avec précision ce qui résulte de la différence de probabilité entre les voix des Votans, il sera plus sûr de chercher la limite, au-dessous de laquelle on aura pour une assemblée donnée une assurance suffisante que la voix d'aucun des Votans ne tombera pas, & de prendre cette limite pour l'expression de la probabilité de chaque voix.

2.^o Qu'au lieu de prendre seulement la probabilité moyenne telle qu'elle résulte du calcul, après avoir eu égard à l'influence d'un ou de plusieurs Votans, il faut de plus se procurer une assurance suffisante que l'influence ne fera pas tomber la probabilité au-dessous de la limite assignée.

3.^o Qu'il faudra non-seulement avoir en particulier l'assurance exigée que ces conditions seront remplies, & que la décision sera alors conforme à la vérité, mais qu'il faudra que le produit de la probabilité qu'on aura de chacune de ces trois conditions, & de celles qu'il pourra être nécessaire d'y ajouter, soit encore égal à l'assurance que l'intérêt de la sûreté ou de la justice exige dans chaque décision. C'est en effet le seul moyen d'avoir une assurance réelle de la vérité de la décision.

4.^o Qu'à moins d'y être forcé par la nécessité, il faut établir la plus grande égalité entre les Votans, parce que l'influence des Chefs, des Membres perpétuels, ne peut tendre qu'à diminuer la probabilité. Cet inconvénient est moindre lorsque ceux qui exercent cette influence, peuvent, comme les

Membres perpétuels en certains cas, ou les Commissaires & les Rapporteurs dans d'autres, être supposés avoir sur les questions agitées plus d'instruction & de lumières. Mais comme cette différence sera très-petite, à moins qu'il n'y ait d'ailleurs des vices, soit dans les loix d'après lesquelles on décide les questions, soit dans la manière d'instruire les affaires, il vaudra mieux encore chercher à détruire ces vices & à diminuer ou anéantir cette influence, qu'à s'occuper du soin de remédier à un abus par un autre.

5.° Que la méthode d'exiger que toutes les voix reviennent à l'unanimité, loin de procurer aux décisions plus de probabilité que celle où l'on exige une pluralité donnée pour prononcer en faveur d'une des propositions, & où l'on prononceroit contre cette même proposition toutes les fois qu'elle a une probabilité inférieure, expose à l'inconvénient de faire adopter cette même proposition lorsqu'elle n'a pas une probabilité suffisante, & de la faire rejeter lorsqu'elle a une probabilité qui s'en écarte très-peu, & qui en diffère moins que celle qui est donnée dans la méthode ordinaire par une pluralité moindre de deux voix.

Nous terminerons l'analyse de cette quatrième Partie par une observation que nous avons déjà eu occasion de faire en partie : c'est que l'égalité entre les Membres de l'assemblée qui doit prononcer, & la simplicité dans la forme de la décision, sont les moyens les plus sûrs, & peut-être les seuls, de remplir toutes les conditions qu'exige la Justice ; de manière que les distinctions entre les Membres des assemblées & les formes compliquées qui ont été employées si souvent & de tant de manières, ont peut-être quelque autre utilité, mais n'ont pas celle de contribuer à remplir l'objet

principal qu'il paroît qu'on doit se proposer, c'est-à-dire, l'assurance d'obtenir des décisions vraies & celle à procurer de n'avoir pas à craindre des décisions fausses.

Analyse de la cinquième Partie.

L'OBJET de cette dernière Partie, est d'appliquer à quelques exemples les principes que nous avons développés. Il auroit été à désirer que cette application eût pu être faite d'après des données réelles, mais la difficulté de se procurer ces données, difficultés qu'un particulier ne pouvoit espérer de vaincre, a forcé de se contenter d'appliquer les principes de la théorie à de simples hypothèses, afin de montrer du moins la marche que pourroient suivre pour cette application réelle ceux à qui on auroit procuré les données qui doivent en être la base.

Objet
de
cette Partie.

Les quatre exemples auxquels on s'arrête ici, ont pour objet :

1.° La formation d'un Tribunal où l'on peut se permettre de décider en faveur de l'opinion la plus probable, quoique la probabilité de cette opinion ne puisse être regardée comme une véritable preuve. Tels sont en général les Tribunaux qui prononcent sur les affaires civiles.

1.^{er} Exemple
Jugemens
civils.
Conditions
qu'on doit
chercher
à remplir,
& moyens d'y
parvenir.

Puisque dans ce cas on peut se permettre de suivre une opinion qui n'est pas rigoureusement prouvée, mais seulement plus probable que l'opinion contraire, il faut d'abord chercher à se procurer une assurance suffisante que la proposition qu'on adopte sera en général du nombre de celles qui peuvent avoir en elles-mêmes une assez grande probabilité, & sur lesquelles on doit craindre les erreurs des Juges plutôt que celles qui naissent de la nature même de la question.

1.^{ere} condition.
Assurance
qu'en général
chaque
décision sera
en elle-même
susceptible
d'une grande
probabilité,

Ainsi, par exemple, dans ce cas il faut que les loix aient la précision, la clarté, l'étendue nécessaire pour avoir une véritable assurance que dans l'application de ces loix à un cas particulier, on pourra obtenir une probabilité assez grande de les appliquer avec justice, ou, ce qui revient au même, pour n'avoir qu'un risque très-petit de trouver un cas particulier auquel la loi ne s'applique que d'une manière équivoque, ou incertaine.

Assurance que l'on aura une pluralité qui donnera une assurance suffisante de la vérité de la décision.

Ensuite on suppose que l'on décide à une très-petite pluralité, ou même à la pluralité d'une voix, & dans ce cas il est aisé de voir que la probabilité de la vérité de la décision pourra être fort au-dessous de l'assurance qu'on doit chercher à se procurer. Il faut donc chercher les moyens d'éviter cet inconvénient; & pour cela on doit constituer le Tribunal de manière à se procurer une assurance suffisante d'obtenir une pluralité qui donne cette assurance à laquelle on doit se proposer d'atteindre.

Limite au-dessous de laquelle le produit de ces trois assurances ne doit pas tomber.

Supposons maintenant que le produit des probabilités qui expriment ces trois assurances, soit égal à $\frac{23292}{24000}$ ou $\frac{35992}{36000}$, que nous avons vu être l'assurance nécessaire dans ce cas; on aura cette assurance qu'une décision future sera en faveur d'une opinion qui aura le degré de probabilité, qu'on croit pouvoir regarder comme suffisante.

2^{de} condition. Que dans le cas de la moindre pluralité, la probabilité soit encore au-dessus de $\frac{1}{2}$.

Après avoir rempli cette première condition, il en restera encore une seconde à remplir: elle consiste à faire en sorte que, même dans le cas de la simple pluralité, on ait une probabilité au-dessus de $\frac{1}{2}$ que la décision est vraie, & rendue en faveur d'une opinion qui a la probabilité suffisante.

Cependant on peut, relativement à cette dernière condition, choisir un des trois partis suivans, c'est-à-dire:

1.° Se contenter de remplir cette condition, en formant un Tribunal toujours impair, & où la pluralité d'une seule voix suffise pour déterminer le jugement :

Examen des moyens de remédier aux inconvéniens d'une décision rendue à la pluralité d'une seule voix.

2.° Exiger au contraire une plus grande pluralité, & statuer que si elle n'est pas obtenue, on remettra l'affaire à la décision d'un autre Tribunal :

3.° Établir que dans les cas où la pluralité seroit au-dessous de certaines limites, le même Tribunal, ou un autre, formeroit une Cour d'équité qui pût prononcer une espèce de compensation ou de partage.

On ne doit pas regarder le premier parti comme rigoureusement injuste. En effet, on ne seroit alors que donner à celui dont le droit est le plus probable : & du moment où, par la nature des choses, l'un de ceux qui prétendent à une possession, doit être préféré à l'autre, il est clair que celui dont le droit est le plus probable, doit obtenir la préférence.

Cette forme de décision n'est point injuste en elle-même.

Mais ce même moyen a l'inconvénient de faire dépendre d'une très-petite probabilité la décision d'une chose très-importante. D'ailleurs, il seroit aisé de prouver, par le calcul, que si cette très-petite pluralité se répétoit souvent, une division proportionnelle, ou à peu-près proportionnelle à la probabilité du droit, conduiroit à des injustices moindres & moins fréquentes.

Ses inconvéniens,

Le second parti a trois inconvéniens; d'abord il prolonge les décisions, & il oblige d'employer un plus grand nombre de Votans. Ensuite si la pluralité exigée n'a lieu qu'après avoir pris l'avis de plusieurs Tribunaux, elle n'a lieu réellement que sur un plus grand nombre de Votans, ce qui affoiblit la probabilité.

Renvoi de la décision à une autre assemblée. Inconvéniens de cette forme,

En troisième lieu, si les voix qui ont prononcé dans la première décision ne sont pas comptées dans la seconde ou dans la troisième, on s'expose, comme nous l'avons observé, à suivre l'avis de la minorité. Si au contraire on compte ces voix, ou il faut renoncer à une nouvelle instruction, à de nouveaux moyens de discussion, c'est-à-dire, rejeter des lumières qu'il est possible d'acquérir, ce qu'on peut regarder comme une injustice, ou bien il faut les admettre.

Dans ce dernier cas, si les anciens Votans n'ont pas la liberté de changer d'avis, on sent quelle incertitude il doit en résulter dans les jugemens; & si on leur laisse cette liberté, nous avons prouvé combien alors cette circonstance affoiblissoit la probabilité.

Établissement
d'un jugement
de
compensation.

Il nous paroît donc que le troisième parti mérite la préférence, pourvu que la manière de faire la compensation du droit, ou le partage de l'objet contesté, soit fixée par une loi, ainsi que les limites de l'autorité de cette espèce de Cour d'équité. En effet, lorsque cette petite pluralité a lieu, il devient vraisemblable que la probabilité de la décision en elle-même est très-petite, & on peut même avoir une très-grande probabilité qu'elle sera au-dessous d'une certaine limite. Or, nous avons déjà observé que dans le cas d'une très-petite probabilité, le partage proportionnel expose à moins d'injustice; & il suit même de ce que nous avons dit dans la seconde Partie, que c'est la seule méthode qui soit rigoureusement juste. C'est donc seulement lorsque la probabilité réelle du droit de l'un des concurrens peut être regardée comme très-grande & inassignable, que le parti de donner la totalité peut être regardé comme le plus juste.

On peut cependant craindre que ce moyen n'expose à une injustice,

injustice , en engageant ceux des Juges qui favoriseroient l'une des deux Parties à voter en sa faveur. On pourroit croire en effet que dans des cas un peu douteux ils se décideroient avec moins de scrupule , dans l'idée qu'il ne résulteroit pas de leur opinion une injustice absolue. Cependant nous ne croyons pas qu'en général on gagne beaucoup à placer toujours les hommes entre deux extrêmes. C'est à peu-près comme si on prétendoit qu'il seroit favorable aux accusés innocens d'établir la peine de mort plutôt qu'une peine plus légère , sous prétexte qu'alors les Juges mettent plus d'exactitude & de scrupule dans leurs jugemens.

Nous pensons donc que cette méthode devroit être préférée : & en effet, si on suppose un Tribunal dans lequel la probabilité de chaque voix soit $\frac{2}{10}$, qu'on exige une pluralité de trois voix pour une véritable décision , & qu'on établisse un jugement d'équité pour les cas où la pluralité n'est que d'une voix , on pourra , en supposant la probabilité réelle égale à $\frac{999}{1000}$, n'avoir qu'un risque moindre que $\frac{1}{365}$ d'avoir un jugement faux , la pluralité étant alors de trois voix seulement. Lorsqu'on aura recours à une Cour d'équité, la probabilité, regardée comme insuffisante, sera moindre qu'un neuvième; & si le nombre des Votans est 25 , on aura une assurance $\frac{35999}{36000}$ que la décision sera en faveur d'une opinion dont la probabilité sera au-dessus de la limite $\frac{999}{1000}$. Ce dernier nombre exprime ici la limite au-dessous de laquelle on doit chercher à se procurer une assurance que la probabilité réelle de l'opinion adoptée ne doit pas tomber.

On voit par-là que cette méthode évite suffisamment l'injustice , puisque cette injustice ne peut être évaluée tout au plus qu'à la $\frac{1}{365}$ partie de l'objet contesté; quantité

*

presque toujours trop petite pour y avoir égard. Au reste, on n'auroit dans un cas semblable qu'à admettre même un jugement d'équité dans le cas d'une pluralité de trois voix, & alors l'injustice cesseroit absolument d'être à craindre. L'on peut observer enfin qu'avec des Loix simples, ces cas, même d'une pluralité de trois seulement, seroient si rares, qu'il y auroit très-peu de jugemens où il seroit nécessaire de recourir au Tribunal d'équité.

2.^d Exemple.

Tribunal
pour les causes
criminelles.

II. Le second exemple est celui d'un Tribunal qui prononce entre deux propositions, dont l'une ne doit être admise que lorsque l'on a une assurance suffisante qu'elle est vraie; de manière que si cette assurance n'a pas lieu, on n'adopte pas cette opinion dans la pratique, quoiqu'elle soit la plus probable. C'est ce qui a lieu, par exemple, dans le jugement d'un accusé qui doit être puni, non lorsqu'il est probable qu'il a commis le crime, mais seulement lorsqu'il est prouvé qu'il est coupable. C'est aussi ce qui est absolument nécessaire toutes les fois qu'il est question de prononcer sur les droits d'un homme, & non entre les droits opposés de deux hommes. Nous avons discuté ci-dessus plusieurs autres circonstances, où l'on peut également exiger, pour admettre une opinion dans la pratique, qu'elle ne soit pas au-dessous d'un certain degré de probabilité, & où il faut se conformer à l'opinion contraire, quoique moins probable, lorsque la probabilité de la première est au-dessous de ces limites. *Voyez ci-dessus page xvij.*

Nous considérerons ici particulièrement le jugement d'un accusé.

Nous avons observé dans la quatrième Partie, que la méthode d'exiger dans ce cas l'unanimité entre les voix, non-

Seulement diminueoit la probabilité moyenne, mais introduisoit même de l'incertitude dans les décisions, & pouvoit exposer à condamner dans des cas où l'on seroit bien éloigné d'avoir l'assurance nécessaire que le crime est prouvé, comme à renvoyer un coupable avec une probabilité très-grande qu'il n'est pas innocent.

Toute incertitude, tout danger de cette espèce, qui n'est pas une suite nécessaire de la nature des choses, & qui naît de la forme même de la décision, deviendroit une véritable injustice, & suffit pour faire rejeter cette manière de former les jugemens, si on peut par d'autres formes éviter ce danger & cette incertitude. Or, c'est ce qui arrive dans cette occasion, où, quoique tous les Votans, hors un, aient commencé par adopter une opinion, la forme prescrit d'adopter l'opinion qui n'a eu qu'un suffrage, si le Votant qui l'a donné ramène tous les autres à son avis; & nous avons trouvé que dans ce cas on doit craindre d'avoir une très-grande probabilité qu'un accusé est coupable, quoiqu'il soit déclaré innocent, & une probabilité insuffisante du crime, quoique l'accusé soit déclaré coupable.

D'ailleurs l'objet le plus essentiel, est d'éviter la condamnation d'un innocent, & c'est même cette raison qui a sur-tout mérité à cette forme de jugement, usitée en Angleterre, les nombreux partisans qu'elle a en Europe. Or, il est aisé de se procurer, par une autre forme, une assurance aussi grande à cet égard. Par exemple, si on exige une pluralité de huit voix dans un Tribunal formé par des hommes instruits, exercés à la discussion, & qui se soient disposés par leurs études à cette fonction importante, on pourra se répondre sans doute d'avoir une assurance de ne pas condamner un

innocent égale à celle que donne le jugement unanime de douze Jurés pris au hafard, même en fupposant que cette unanimité a lieu dès la première votation, ou que la néceffité de revenir à l'unanimité n'ait pas diminué la probabilité des voix. En effet, c'est fupposer feulement que l'avis unanime de deux hommes éclairés, équivaut à l'avis unanime de trois hommes pris au hafard, fupposition qui ne peut paroître exagérée.

Probabilité de huit voix pour condamner.

Nous fuppoferons donc avant tout qu'on exige une pluralité de huit voix pour condamner.

1.^{re} condition. Le produit de la probabilité réelle, par la probabilité que celle de chaque voix ne tombera pas au-deffous d'une certaine limite, & par la probabilité, dans le cas de la moindre pluralité, doit donner une assurance fuffifante.

Cela pofé, puifque nous avons fixé l'affurance de ne pas condamner un innocent à $\frac{144767}{144768}$ dans le cas le plus défavorable, il faut que le produit de la probabilité réelle que peut avoir un fait de l'efpèce de ceux qu'on examine; multiplié par la probabilité que la voix d'aucun des Votans ne tombera pas au-deffous d'une certaine limite, & enfuite, par la probabilité qui réfulte de la pluralité de huit voix, dont on fait la probabilité égale à cette même limite, il faut, dis-je, que ce produit ne foit pas au-deffous de $\frac{144767}{144768}$, c'est-à-dire, en fupposant ces probabilités égales, que chacune foit environ $\frac{222222}{1000000}$.

La fupposition que la probabilité de chaque voix eft $\frac{2}{10}$, fatisfera à cette condition.

2.^{de} condition. Assurance fuffifante qu'un innocent ne fera pas condamné pendant une génération entière.

Pour fatisfaire à la feconde condition, qui exige que l'on ait une assurance fuffifante que dans un certain nombre de jugemens il n'y aura pas un innocent condamné, on peut demander que ce même produit, élevé à la puiffance 1000, ne foit pas au-deffous de $\frac{1822}{1900}$ que nous avons donné pour limite à cette assurance. Or, on fatisferoit encore à cette condition, en faifant la probabilité de chaque voix égale à

$\frac{2}{10}$: & en supposant que les deux autres probabilités sont égales à celle qui naît de cette pluralité de huit voix.

Il ne reste plus qu'à s'assurer la probabilité de ne pas laisser échapper des coupables. Pour remplir cette condition, nous ferons en sorte, 1.^o que la probabilité qu'il n'échappera point un coupable dans le cours d'une génération, soit $\frac{927}{1000}$; 2.^o que dans chaque jugement on ait la probabilité $\frac{9999}{10000}$ d'avoir un jugement vrai à la pluralité de huit voix au moins, & le risque $\frac{1}{144768}$ seulement de n'avoir pas de décision. Nous ne multiplions pas ces valeurs par la probabilité réelle du fait, parce que le renvoi d'un coupable dont le délit seroit au-dessous de cette probabilité, ne doit pas être regardé comme devant encourager au crime. Nous ne multiplions pas non plus cette probabilité par celle que la voix d'aucun Votant ne tombera au-dessous de la limite assignée, parce que comme il est question ici d'une décision rendue en général à une pluralité quelconque, c'est la probabilité moyenne, & non la limite inférieure de la probabilité, qui doit être considérée. On remplira ces deux conditions, en supposant comme ci-dessus, la pluralité exigée de huit voix, la probabilité de chacune de $\frac{2}{10}$, & en portant à 30 le nombre des Votans.

3.^o Condition
Assurance
suffisante de ne
pas laisser
échapper
un coupable.

— On pourroit aussi chercher à remplir également cette condition, que la pluralité de six voix, dans le cas où cette pluralité seroit contre l'accusé, ne donnât pas une probabilité du crime qui pût, ou produire un exemple effrayant, ou faire craindre qu'on ne laissât dans la société un homme dangereux.

Examen
du cas
où un accusé
seroit renvoyé
avec
une pluralité
de six voix
contre lui,

On ne doit pas regarder cette condition comme essentielle : en effet, quand elle seroit impossible à remplir, la Justice n'en exigeroit pas moins de ne pas condamner un accusé

tant que le crime ne seroit pas prouvé, & il ne peut y avoir d'injustice à renvoyer un accusé toutes les fois que la probabilité de son crime, quelque grande qu'elle soit, n'atteint la limite à laquelle on a trouvé que doit commencer une véritable assurance. Cependant il seroit à désirer, comme nous l'avons déjà dit, que, même dans le petit nombre de cas où l'on renverroit l'accusé, parce qu'on n'a pas contre lui une probabilité suffisante, la probabilité fût incomparablement plus petite que l'assurance exigée. Mais on ne peut obtenir cette condition, à moins que la probabilité de chaque voix ne soit très-grande, & c'est uniquement du choix des Votans que dépend la possibilité d'y satisfaire.

Si cette possibilité n'existe pas, du moins la forme que nous proposons ici exposeroit encore à un danger moindre que celle qui exige l'unanimité, & la probabilité de ce danger seroit même très-petite : elle n'est en effet dans cet exemple que $\frac{1}{144768}$ pour chaque jugement.

Au reste, les inconvéniens qui peuvent naître du défaut de cette condition, sont peut-être moindres qu'ils ne le paroissent au premier coup-d'œil. En effet, si ces exemples d'impunité sont très-rares, on ne peut guère les regarder comme un encouragement au crime. Tout homme qui auroit vu un grand nombre de coupables punis, & qui en verroit un seul échapper à la condamnation, en seroit peu frappé, & le plus souvent même confondroit cet exemple avec celui de l'impunité, produite par le défaut de preuves ; exemple dangereux, mais que la forme des décisions ne peut prévenir.

Quant à la seconde espèce de danger, la défiance qu'inspire nécessairement tout homme renvoyé par un jugement ; auquel il n'a manqué pour le condamner que la pluralité

suffisante, deviendra un préservatif contre le mal qu'il pourroit faire : il ne lui resteroit d'autre parti à prendre qu'une conduite réservée, ou le métier de brigand. Mais dans une société bien policée ce métier ne peut guère exister ; & ceux qui seront tentés de s'y livrer, doivent être réprimés avant d'avoir fait beaucoup de mal.

Si donc on peut supposer à chaque voix une probabilité au-dessus de $\frac{9}{10}$, de manière que la probabilité qu'elle ne tombe pas au-dessous de cette limite soit à peu-près $\frac{999998}{1000000}$, en exigeant une pluralité de huit voix, & formant un Tribunal de trente Votans, on remplira d'une manière suffisante toutes ces conditions qu'on doit exiger d'un Tribunal destiné à prononcer sur la vérité d'une accusation. Le seul inconvénient qu'on éprouveroit alors, seroit la nécessité de former un Tribunal très-nombreux si on vouloit admettre des récusations non motivées, comme la Justice paroît l'exiger, & n'être forcé cependant que dans des cas très-rares d'appeler des Étrangers pour compléter le Tribunal.

Composition
du Tribunal.

Nous nous bornerons à faire observer de plus, que suivant ce que nous avons dit dans la quatrième Partie, sur la nécessité d'éviter toute espèce d'influence, il faut non-seulement, relativement aux choix des Votans & aux récusations, prendre toutes les précautions qui peuvent diminuer les dangers de toute influence particulière, mais même empêcher l'influence plus dangereuse qui peut, dans certains cas ou pour certaines personnes, agir sur le Tribunal entier : de manière qu'après être parvenu, par le choix des Membres & par les récusations, à rendre insensible l'effet de la prévention, de l'intérêt, ou des préjugés de chaque particulier, il faut faire en sorte que l'assemblée, considérée collectivement, n'ait ni préjugé de Corps, ni aucun

Nécessité
d'éviter
les effets de
l'influence.

autre intérêt que celui d'être juste. La Justice exige rigoureusement cette précaution, puisque toute cause d'erreur qui n'est pas inévitable, qui n'est pas une suite de l'incertitude attachée aux jugemens humains, est l'ouvrage de celui qui l'a introduite dans les jugemens, & doit être regardée comme une véritable injustice. En effet, puisque la société ne peut avoir le droit d'exposer aucun individu à un risque qui n'est ni nécessaire, ni même utile, c'est porter atteinte à la sûreté d'un citoyen, que de le soumettre par la loi à un danger qu'il étoit possible de lui épargner.

Il faut donc que si un Tribunal perpétuel est chargé de ces jugemens, il soit strictement borné à cette seule fonction; & , s'il est plus avantageux que ce Tribunal soit un Corps, il faut qu'il le soit le moins qu'il est possible: mais, dans des pays où certains préjugés populaires ont encore de la force; où ce qu'on appelle *peuple*, a certaines opinions particulières; il n'est pas moins indispensable d'éviter de confier à des Juges pris au hasard, la décision des affaires sur lesquelles ces préjugés ou ces opinions peuvent influer.

3.^o Exemple.
Élections.

III. Avant d'examiner la forme des élections, il est nécessaire de rechercher d'abord s'il est avantageux ou non de prononcer, par une première décision, si chaque candidat est digne d'être élu.

Utilité
d'un premier
jugement
sur l'éligibilité
des Sujets.

Cette première décision rendroit beaucoup plus simple l'élection qui en doit être la suite, quelque forme que l'on croye devoir préférer.

On pourroit demander s'il vaut mieux, ou confier cette décision à ceux qui doivent élire, ou en charger une autre assemblée que celle qui fait l'élection. Pour résoudre cette question, il faut observer que l'on peut confier cette première décision,

décision , ou à une assemblée qui diffère seulement de la première , parce qu'elle est moins nombreuse , & qu'elle n'est pas composée de la même classe de Votans , comme lorsque l'on confie le droit de présenter pour une élection à un Corps , & qu'on en charge un autre de choisir entre ceux qui ont été présentés comme éligibles. Mais si un pareil usage peut être utile pour certaines vues politiques , on voit qu'il ne peut avoir aucune utilité relativement à l'objet que l'on se propose ici , celui d'assurer la vérité des décisions. En effet , il est aisé de voir que le choix entre les candidats exige plus de sagacité & de lumières que la simple décision sur leur capacité. Ce seroit donc au contraire à l'assemblée la plus nombreuse , la moins éclairée par conséquent , qu'il faudroit confier la décision de l'éligibilité , & remettre le choix à une assemblée moins nombreuse & plus éclairée.

En supposant que la même assemblée formât la première décision , & fût aussi chargée du choix , le seul inconvénient à craindre , seroit la faculté que cette forme pourroit donner à une cabale nombreuse pour exclure précisément celui des candidats qui a le plus de mérite ; mais il est aisé de voir que dans ce cas , quelque forme que l'on prenne , une cabale qui réunit plus de la moitié des voix , fût-elle même partagée sur l'objet de son choix , aura toujours la possibilité d'exclure celui qu'elle voudra ; seulement dans le cas de la méthode d'élire ordinaire , en supposant que deux cabales divisées sur l'objet de leur choix , tendent à exclure un troisième candidat , & que ce candidat soit le meilleur , il lui suffira d'avoir plus d'un tiers des voix pour être élu , tandis qu'il seroit déclaré non éligible , à moins d'en avoir plus de la moitié ; mais ce motif ne peut être allégué ici , parce que la forme ordinaire

d'élection, qui d'ailleurs est vicieuse, ne paroît avoir quelque avantage dans ce cas, que parce qu'on suppose la pluralité corrompue, & votant contre la vérité; qu'alors la décision, prise à la pluralité, devient vicieuse par elle-même, & qu'en général l'objet qu'on doit se proposer dans une forme de décision, est de faire en sorte que l'avis de la pluralité soit conforme à la vérité, & ait une probabilité suffisante, & non d'éviter de suivre cet avis, parce qu'il peut être contraire à la vérité. Tout moyen qui fait éviter l'avis de la pluralité lorsqu'il est faux, tend à le faire rejeter quand il est vrai.

Forme
de l'élection.

Nous supposerons d'abord que l'on suit la méthode proposée dans la première Partie, c'est-à-dire, que chacun donnant une liste des candidats, suivant l'ordre qu'il leur attribue, donne par ce moyen son avis sur toutes les propositions qu'on peut former en comparant ces candidats deux à deux.

Qu'elle peut
conduire
à deux espèces
de résultats.

Cela posé, nous avons vu qu'il y avoit des cas où le système des décisions à la pluralité des voix sur toutes ces propositions, conduisoit à des résultats contradictoires: mais on peut considérer ces résultats sous deux points de vue: on peut vouloir ou qu'il n'y ait aucune contradiction dans tout ce système, en sorte qu'il en résulte la vérité du vœu de la pluralité sur l'ordre de mérite de tous les concurrens, ou bien qu'il n'y ait point de contradiction dans la partie du système qui suffit pour décider la supériorité d'un candidat sur tous les autres. Supposons en effet quatre candidats, *A, B, C, D*, & que le système des décisions rendues à la pluralité, qui, dans ce cas, est formé de six propositions, soit composé des six décisions.

1. *A* vaut mieux que *B*.
2. *A* vaut mieux que *C*.
3. *A* vaut mieux que *D*.
4. *B* vaut mieux que *C*.
5. *D* vaut mieux que *B*.
6. *C* vaut mieux que *D*.

Il est aisé de voir que ce système, pris dans son entier, renferme un résultat contradictoire, puisque les propositions 4 & 5 conduisent à la conclusion *D* vaut mieux que *C*; conclusion qui est contradictoire avec la sixième proposition.

Mais si on ne considère que les propositions, qui sont nécessaires pour décider la supériorité d'un candidat sur tous les autres, alors il suffit d'admettre les trois premières propositions, auxquelles aucune des trois autres n'est contradictoire.

De même, si l'on suppose que l'on ait cinq candidats, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, & que le système des dix propositions adoptées à la pluralité, soit :

1. *A* vaut mieux que *B*.
2. *A* vaut mieux que *C*.
3. *A* vaut mieux que *D*.
4. *A* vaut mieux que *E*.
5. *B* vaut mieux que *C*.
6. *B* vaut mieux que *D*.
7. *B* vaut mieux que *E*.
8. *C* vaut mieux que *D*.
9. *E* vaut mieux que *C*.
10. *D* vaut mieux que *E*.

on aura, en considérant tout le système, un résultat contradictoire, puisque les propositions 8 & 9 donnent la conclusion

y *z*

E vaut mieux que *D*, conclusion contradictoire à la dixième proposition.

Mais les sept premières, qui donnent le premier rang à *A* & le second à *B*, peuvent être admises sans qu'il en résulte aucune contradiction ni entr'elles ni avec aucune des trois autres.

De même, si au lieu de la septième proposition on avoit eu celle-ci, *E* vaut mieux que *B*, le système entier auroit renfermé deux contradictions, puisque la conclusion tirée des propositions 6 & 7, auroit été encore en contradiction avec la proposition 10.

Mais le système des quatre premières propositions, qui suffisent pour déterminer la préférence en faveur de *A*, n'offrirait encore aucune contradiction, & il y auroit une décision réelle relativement à cet objet seul.

On voit donc que, selon qu'on voudra choisir le candidat le plus digne, ou les deux, les trois candidats les plus dignes, ou enfin avoir l'ordre de tous les candidats proposés, il suffira que le système n'implique point contradiction pour le premier, pour les deux, pour les trois premiers candidats, ou bien il faudra qu'il ne renferme aucune contradiction.

Nous ne considérons ici que les deux cas extrêmes, celui où l'on ne cherche à connoître que le candidat qui mérite la préférence sur tous, & celui où l'on a intérêt de connoître l'ordre de tous les candidats. Les cas intermédiaires se déduisent facilement de ceux-ci.

Conditions
qu'il faut
chercher à se
procurer.
1.° Probabilité
suffisante
d'avoir un
système de

Dans chacune des deux questions il y a trois points à considérer; 1.° la probabilité d'avoir un système qui ne renferme aucune contradiction; 2.° la probabilité que ce système, s'il a lieu, ne sera formé que de propositions vraies; 3.° enfin

la probabilité absolue d'avoir un système uniquement formé de propositions vraies.

On trouvera d'abord que dans tous les cas, plus le nombre des candidats augmente, plus la probabilité d'avoir une décision, ou d'avoir une décision vraie, diminue, mais aussi qu'elles augmentent avec le nombre des Votans; en sorte que si la probabilité de la vérité d'une seule décision a l'unité pour limite, l'unité sera aussi la limite de ces probabilités.

On trouvera ensuite qu'en supposant la probabilité d'une décision sur une seule proposition égale à $\frac{19999}{20000}$, on aura une probabilité $\frac{1899}{1900}$ * d'obtenir pour dix candidats une votation conforme à la vérité, sur la préférence qu'un d'entre eux mérite sur tous les autres.

La probabilité d'avoir une décision sera un peu plus forte; & si on ne demande qu'une probabilité $\frac{1899}{1900}$ d'avoir fait un choix conforme à la vérité, dans le cas où on obtient un système qui ne renferme point de contradictions, on aura cette probabilité égale à $\frac{1899}{1900}$, pourvu que celle d'une seule décision soit à peu-près $\frac{1901}{1902}$.

Dans le cas où l'on considère la vérité du système relativement à l'ordre de tous les candidats, pour le même nombre de dix candidats, il faudra que le risque de l'erreur d'une seule décision soit au-dessous de $\frac{1}{100000}$, si on veut avoir une probabilité $\frac{1899}{1900}$ d'avoir un système dont toutes les propositions soient vraies, c'est-à-dire, d'avoir le véritable ordre entre les candidats. Mais si on se contente de la probabilité $\frac{1899}{1900}$

propositions qui ne renferment pas de contradictions.
2.° Probabilité suffisante que si on a rempli cette première condition, toutes les propositions de ce système seront vraies.
3.° Probabilité d'avoir un système formé de propositions vraies.

Moyens de les remplir;

* Nous avons choisi ce nombre, parce qu'il représente un danger qu'on regarde comme nul pour sa propre vie pendant l'espace d'une année.

d'avoir une décision vraie toutes les fois que l'on a une décision, il suffira que ce même risque ne soit que $\frac{3}{1000000}$.

Comme nous avons ici considéré la probabilité d'une décision en général, il est nécessaire d'examiner le cas où elles sont rendues à la plus petite pluralité possible. Dans ce cas, si on suppose $\frac{9}{10}$, par exemple, la probabilité de chaque voix, on trouvera que pour dix candidats, il suffira d'exiger une pluralité de quatre voix pour avoir, même dans le cas le plus défavorable, la probabilité $\frac{99}{100}$ d'avoir fait un bon choix, & il est aisé de voir que dans cette même hypothèse on pourra se procurer la probabilité exigée ci-dessus pour une décision en général dans les différens cas, sans être obligé de supposer très-grand le nombre des Votans.

Il résulte donc de cette théorie & de l'application faite à cet exemple :

1.° Qu'on peut pour cette forme d'élection (si le nombre des candidats n'est pas très-grand) s'assurer d'avoir un système non contradictoire & une probabilité suffisante de la vérité de toutes les propositions de ce système; sans faire aucune supposition qui paroisse trop s'écarter de la Nature.

2.° Que comme cette probabilité augmente avec le nombre des Votans, on pourra établir l'usage d'en appeler de nouveaux dans les cas où la votation des premiers conduiroit à un système contradictoire, & par ce moyen l'on aura une probabilité toujours croissante d'obtenir une véritable décision.

Du parti qu'on peut prendre si la décision ne donne point un résultat possible.

Inconvénient qui résulte de ce moyen.

Si l'on étoit obligé de choisir, quoique le résultat de la décision formât un système de propositions, dont quelques-unes seroient contradictoires entr'elles, on pourroit suivre le moyen indiqué dans la première Partie. Mais dans ce cas la probabilité que le candidat qui obtient la préférence est le

meilleur, est toujours au-dessous de $\frac{1}{2}$, ainsi que pour tous les autres candidats, quoique l'on puisse avoir une probabilité au-dessus de $\frac{1}{2}$ que ce candidat doit être regardé comme le meilleur plutôt qu'aucun des autres en particulier. Cette conclusion, qui paroît d'abord contradictoire, ne l'est pas réellement.

Supposons en effet six candidats seulement, & que la probabilité en faveur de celui qui obtient la préférence, soit $\frac{5}{12}$, & pour les autres $\frac{2}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, il est clair que la probabilité de la bonté du choix sera $\frac{5}{12}$ plus petit que $\frac{1}{2}$, quoiqu'il y ait une probabilité $\frac{5}{7}$ ou $\frac{5}{6}$ que ce candidat mérite plutôt d'être regardé comme le meilleur que chacun des autres pris séparément.

On peut faire une objection contre la méthode que nous employons ici. Supposons en effet trois candidats *A, B, C*; & qu'un Votant les ait rangés suivant l'ordre *A, B, C*, d'où résultent les trois propositions:

Réponse à une objection contre la manière dont on a envisagé ici le problème.

A vaut mieux que *B*.

A vaut mieux que *C*.

B vaut mieux que *C*.

Nous regardons ces trois propositions comme également probables; cependant on pourroit croire que la proposition *A* vaut mieux que *C* est plus probable que les deux autres, parce que la différence entre *A* & *C* est plus grande, & que d'ailleurs elle peut être prouvée à la fois par la comparaison de *A* avec *C*, & parce qu'elle est une conséquence des deux propositions

A vaut mieux que *B*.

B vaut mieux que *C*.

Mais nous observerons, 1.^o que la grandeur de la différence

n'influe pas nécessairement dans la probabilité, à moins que l'une de ces différences ne soit incertaine, ou presque insensible. Or, l'on sent qu'il est question ici de la probabilité en général, & non ce qu'elle peut être dans certaines circonstances.

2.^o Que si la comparaison ne se fait que pour une seule qualité des Votans, la conclusion *A* vaut mieux *C*, qu'on tire des propositions *A* vaut mieux que *B*, *B* vaut mieux que *C*, n'ajoute rien à la probabilité de la proposition trouvée, en comparant immédiatement *A* avec *C*.

3.^o Que si au contraire l'on compare plusieurs qualités, il est possible que les deux propositions

A vaut mieux que *B*,

B vaut mieux que *C*,

signifient seulement que *A* vaut mieux que *B*, relativement à une seule de ces qualités, & que *B* vaut mieux que *C*, relativement à cette même qualité, quoique *B* pût être inférieur pour une autre qui est jugée moins importante: alors la conclusion *A* vaut mieux que *C*, qu'on tireroit de ces deux propositions, renfermeroit de plus cette préférence entre ces deux qualités, qui par-là deviendroit probable, mais elle ne donneroit aucune probabilité de plus sur la préférence que *A* mérite sur *C*, relativement à cette qualité, & aucune qu'il la mérite par rapport à l'autre qualité.

4.^o Enfin, puisqu'il n'y a aucune raison absolue de croire que la proposition *A* vaut mieux que *C* soit plus probable que *A* vaut mieux que *B*, lorsque *B* vaut mieux que *C*, il paroît plus naturel de juger ces propositions d'après le degré de pluralité qu'elles ont obtenue, que d'après l'hypothèse précédente: ce qui est d'autant plus vrai, que la conséquence *A* vaut mieux que *C*, qui dérive des propositions *A* vaut mieux

que

que *B*, *B* vaut mieux que *C*, n'en est une véritable conséquence qu'autant que les mêmes Votans ont prononcé ces deux propositions. En effet, si un Votant a prononcé *A* vaut moins que *B* & *B* vaut mieux que *C*, il résulte de sa voix une probabilité pour *B* vaut mieux que *C*, mais il n'en peut résulter une pour *A* vaut mieux que *C*.

Réflexions
sur une
autre méthode

Un Géomètre célèbre, qui a observé avant nous les inconvéniens des élections ordinaires, a proposé une méthode, qui consiste à faire donner à chaque Votant l'ordre dans lequel il place les candidats; à donner ensuite à chaque voix en faveur du premier, l'unité pour valeur, par exemple; à chaque voix en faveur du second une valeur au-dessous de l'unité; une valeur encore plus petite à chaque voix en faveur du troisième, & ainsi de suite, & de choisir ensuite celui des candidats pour qui la somme de ces valeurs, prises pour tous les Votans, seroit la plus grande.

Cette méthode a l'avantage d'être très-simple, & l'on pourroit sans doute, en déterminant la loi des décroissemens de ces valeurs, éviter en grande partie l'inconvénient qu'a la méthode ordinaire, de donner pour la décision de la pluralité une décision qui y est réellement contraire; mais cette méthode n'est pas rigoureusement à l'abri de cet inconvénient. En effet, supposons qu'il y ait trois candidats seulement, *A*, *B*, *C*, & 81 Votans, & chacun ayant nommé les candidats suivant l'ordre de mérite, que trente voix adoptent l'ordre *A*, *B*, *C*, une l'ordre *A*, *C*, *B*, 10 l'ordre *C*, *A*, *B*, 29 l'ordre *B*, *A*, *C*, 10 l'ordre *B*, *C*, *A*, & une voix l'ordre *C*, *B*, *A*.

Nous aurons pour la proposition *A* vaut mieux que *B*, 41 voix contre 40; pour *A* vaut mieux que *C*, 60 voix

contre 21 ; pour la proposition *B* vaut mieux que *C*, 69 voix contre 12, & par conséquent une décision en faveur de *A*. Or, dans ce même cas, si on compare *A* & *B* par la méthode que nous examinons ici, nous trouverons que tous deux sont placés onze fois au dernier rang, ainsi il n'en résulte aucune valeur ni pour l'un ni pour l'autre : que *A* est placé trente-une fois au premier rang, & *B* trente-neuf fois, ce qui, en supposant égale à l'unité la valeur qui résulte de chaque voix en faveur de *B*, donne 8 pour *B* : mais *A* est trente-neuf fois à la seconde place, & *B* n'y est que trente-une : donc la valeur de *A* surpassera, par cette raison, celle de *B* de huit fois la valeur attachée à cette seconde place. Or, cette valeur est plus petite que l'unité, & *B* surpasse *A* de huit unités : donc par le résultat de ce calcul, *B* surpasse *A*. Or, cette conclusion est contraire au vœu de la pluralité, puisque la proposition *A* vaut mieux que *B* à 41 voix contre 40.

Si l'on considère seulement ces deux propositions,

A vaut mieux que *B*,

A vaut mieux que *C*,

la première aura 41 voix contre 40, la seconde 60 voix contre 21, & par conséquent si la probabilité de chaque voix est seulement $\frac{1}{2}$, la probabilité que *A* doit obtenir le premier rang sera au-dessus, non-seulement de la même probabilité pour *B* & pour *C*, mais même au-dessus de $\frac{1}{2}$.

Ainsi, en préférant *B* au lieu de *A*, on préféreroit celui pour lequel la probabilité du mérite, non-seulement est au-dessous de celle d'un autre, mais une probabilité au-dessous de $\frac{1}{2}$ à une probabilité qui est au-dessus.

On peut observer encore que cette méthode donne toujours un résultat, tandis que les propositions qui ont la pluralité

peuvent former un système qui renferme des propositions contradictoires.

On peut encore observer que si on a cinq candidats, par exemple, deux dignes de la place & trois qui en soient indignes, & qu'un nombre d'Électeurs moindre que la moitié forme une cabale, elle peut dans cette méthode faire tomber le choix sur un des trois mauvais candidats, si le reste des électeurs se partage entre les deux bons: au lieu que dans la méthode que j'ai cru devoir préférer, l'un des deux bons est nécessairement élu. Mais les combinaisons où cet inconvénient a lieu sont en petit nombre, & celles où la méthode ordinaire est défectueuse, sont très-communes.

Quoique le Géomètre célèbre auquel on doit cette méthode, n'ait rien publié sur cet objet, j'ai cru devoir le citer ici *, 1.^o parce qu'il est le premier qui ait observé que la méthode commune de faire les élections étoit défectueuse; 2.^o parce que celle qu'il a proposé d'y substituer est très-ingénieuse, qu'elle seroit très-simple dans la pratique. D'ailleurs, quoiqu'elle ne soit pas exempte des défauts qui doivent faire rejeter la méthode ordinaire, cependant ces défauts y sont beaucoup moins sensibles: il est même très-probable qu'il arriveroit très-rarement qu'elle induisît en erreur sur la véritable décision de la pluralité.

IV. Nous examinons dans le quatrième exemple les décisions rendues par des assemblées très-nombreuses, & composées de manière, qu'à mesure que le nombre des Votans augmente, on soit obligé d'y en admettre dont la probabilité est très-petite.

4.^o expérience. Assemblées très-nombreuses, où la probabilité des voix diminue à mesure que le nombre des Votans augmente.

* Cet Ouvrage étoit imprimé en entier avant que j'eusse connoissance de cette méthode, si ce n'est pour en avoir entendu parler à quelques personnes. Elle a été publiée depuis. *Mém. de l'Acad. 1781.*

Nous nous sommes arrêtés à une hypothèse qui paroît assez naturelle, celle de supposer que le nombre des Votans qui ont une certaine probabilité, est proportionnelle à la probabilité qu'ils se tromperont; mais que cette loi n'a lieu que depuis la probabilité 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$. En effet, dans cette hypothèse on n'aura point de Votant qui ne se trompe jamais; & si on en a un qui ne se trompe, par exemple, qu'une fois sur cent, on en aura cinquante qui se tromperont une fois sur deux, dix qui se tromperont une fois sur dix jugemens.

Impossibilité
de remplir
dans ce cas
toutes les
conditions
nécessaires
pour la sûreté
des décisions.

En suivant cette hypothèse, on trouvera que lorsque le nombre total des Votans est un très-grand nombre, on pourra s'assurer encore de remplir la condition exigée pour la sûreté des décisions, à la vérité pourvu que l'on ait égard à la probabilité moyenne. Cette conclusion est d'autant plus naturelle, qu'il paroît que la limite devrait être placée un peu au-dessus de $\frac{1}{2}$. Mais cette condition ne suffit pas, & il faudroit avoir une assurance suffisante que la probabilité qui résulte de la pluralité ne sera pas au-dessous de la limite qui lui est assignée. Or, dans le cas d'une assemblée très-nombreuse, dans laquelle les voix peuvent tomber jusqu'à $\frac{1}{2}$ environ, & où celles qui ont le moins de probabilité sont en plus grand nombre, cette dernière condition deviendra souvent impossible à remplir, sans exiger une pluralité beaucoup trop grande pour qu'il soit possible de remplir en même-temps les autres conditions. Il en sera de même de la condition qui exigeroit une très-grande probabilité qu'aucune voix ne tombera au-dessous de la limite qu'elle doit atteindre pour donner à la décision rendue à une certaine pluralité une assurance suffisante.

On ne peut donc guère se flatter de remplir les conditions

exigées ni dans cette hypothèse ni dans aucune de celles qui peuvent paroître se rapprocher de la Nature, tant que l'on aura une assemblée très-nombreuse où la pluralité de la voix d'un très-grand nombre de Votans est fort petite.

Mais on peut observer que dans la plupart des objets soumis à la décision d'une assemblée, les mêmes Votans, dont les voix ont une si petite probabilité, peuvent avoir assez de lumières, non pas sans doute pour prononcer avec quelque probabilité quel homme entre un grand nombre a le plus de mérite, mais pour ne choisir comme le plus éclairé qu'un de ceux dont la voix auroit une assez grande probabilité : ainsi une assemblée nombreuse, composée de Votans qui ne seroient pas très-éclairés, ne pourroit être employée utilement que pour choisir les Membres d'une assemblée moins nombreuse, à laquelle la décision des autres objets seroit ensuite confiée, & l'on parviendroit alors facilement à remplir pour cette dernière décision toutes les conditions qu'exigent la justice & l'intérêt général. Si l'on songe sur-tout que presque jamais il ne s'agit dans les décisions d'une proposition simple, rarement même d'une décision isolée, mais d'un système de décisions liées entr'elles, dont une seule décision fautive peut déranger l'harmonie, on verra que cette dernière forme est la seule qui puisse laisser quelque espérance de remplir les conditions dont l'observation est nécessaire.

Moyens
d'y remédier.

Ce que nous avons dit des inconvéniens d'une assemblée trop nombreuse, s'applique à plus forte raison au cas où la probabilité de la voix d'un certain nombre de Votans tombe au-dessous de $\frac{1}{2}$; mais il faut observer dans ce dernier cas qu'on ne peut même espérer de remédier à cet inconvénient, en chargeant cette assemblée nombreuse du choix de ceux auxquels la décision sera enfin remise.

Des cas où
la probabilité
de la décision
est au-dessous
de $\frac{1}{2}$.

En effet, lorsque la probabilité de la voix d'un Votant tombe au-dessous de $\frac{1}{2}$, il doit y avoir une raison pour laquelle il prononce moins bien que ne feroit le hasard; & cette raison ne peut être prise que dans les préjugés auxquels ce Votant est soumis. Or, il est vraisemblable que ce même Votant donnera la préférence aux hommes qui partagent ces préjugés, c'est-à-dire, à des hommes dont, pour un grand nombre de décisions, la probabilité est au-dessous de $\frac{1}{2}$.

Conséquences
qui
en résultent.

Ainsi, pourvu que dans une société il y ait un grand nombre d'hommes éclairés & sans préjugés, & pourvu que le droit du grand nombre qui n'a pas assez de lumières, se borne à choisir ceux qu'il juge les plus instruits & les plus sages, & auxquels en conséquence les citoyens remettent le droit de prononcer sur les objets qu'eux-mêmes ne seroient pas en état de décider, on peut parvenir à une assurance suffisante d'avoir des décisions conformes à la vérité & à la raison.

Mais il n'en est pas de même si ceux qui, dans l'opinion publique, passent pour être éclairés, sont soumis à des préjugés. Pour tous les objets sur l'examen desquels ces préjugés peuvent influer, non-seulement l'élection ne peut donner aucune assurance d'avoir des Votans exempts de préjugés, & dont la voix ait une probabilité suffisante, mais au contraire elle ne sera qu'un moyen d'avoir une assurance que ceux à qui les décisions seront confiées, soumis eux-mêmes à ces préjugés, auront une probabilité au-dessous de $\frac{1}{2}$; en sorte qu'il y auroit de l'avantage dans ce cas à s'en rapporter à un petit nombre d'hommes pris au hasard dans la classe de ceux à qui l'on doit supposer de l'instruction.

Nous sommes donc encore ramenés ici à une conclusion semblable à celle de la première Partie, c'est que la forme

qu'on peut donner aux assemblées qui prononcent sur une loi ou sur quelques autres objets que ce soit, ne peut procurer aucun moyen d'avoir l'assurance que l'on doit chercher à l'obtenir, à moins qu'on ne puisse s'assurer de former ces assemblées d'hommes éclairés.

Nous trouvons de plus que si les hommes qui passent pour instruits, partagent les opinions populaires, on ne peut remplir cette dernière condition. Ainsi l'on ne peut regarder les décisions à la pluralité des voix comme propres à faire connoître ce qui est vrai & utile, que dans le cas où une grande partie de la société a des lumières, & où les hommes qui sont instruits, qui ont cultivé leur esprit & exercé leur raison, ne sont pas soumis à des préjugés. Alors, en effet, il suffit que la direction des affaires soit confiée à ceux qui, dans l'opinion commune, passent pour être capables & avoir des lumières, & l'on peut en avoir l'assurance dans quelques constitutions, & une assez grande espérance dans presque toutes.

C O N C L U S I O N.

O N a dû remarquer sans doute, en lisant cet Ouvrage, que je n'ai fait qu'ébaucher la solution de plusieurs questions importantes, & qu'on doit le regarder comme un simple essai, moins propre à éclairer ceux qui le liront, qu'à inspirer le desir de voir se multiplier les applications du Calcul à ces mêmes questions *. Je n'ai point cru donner un bon Ouvrage,

* Le premier Mathématicien qui ait imaginé d'appliquer le Calcul à des questions politiques, est le célèbre Jean de Witt, Grand-Pensionnaire de Hollande : sa conduite sage & courageuse dans cette place importante, ses vertus, son patriotisme, sa fin malheureuse, ont rendu son nom cher à tous ceux qui aiment leur patrie & que touche la vertu. Il y eut de plus

mais seulement un Ouvrage propre à en faire naître de meilleurs. Étendre les découvertes importantes, & les mettre à la portée du plus grand nombre, essayer de diriger les vues & les travaux des Savans vers un but qu'on croit utile, telle doit être l'ambition de la plupart des Auteurs. Trop peu d'hommes peuvent prétendre à la gloire de contribuer, par des vérités nouvelles, au bonheur de leurs semblables.

Utilité de
l'application
du Calcul aux
questions
politiques.

En voyant que sur presque tous les points, le Calcul ne donne que ce que la raison auroit du moins fait soupçonner, on pourroit être tenté de le regarder comme inutile: mais il est aisé d'observer, 1.^o que le Calcul a du moins l'avantage de rendre la marche de la raison plus certaine, de lui offrir des armes plus fortes contre les subtilités & les sophismes; 2.^o que le Calcul devient nécessaire toutes les fois que la vérité ou la fausseté des opinions dépend d'une certaine précision dans les valeurs. Par exemple, toutes les fois que la conclusion d'un raisonnement restera la même, pourvu qu'une certaine probabilité soit plus grande qu'une autre, la raison seule pourra nous conduire dans un grand nombre de questions à cette conclusion: mais si on doit avoir des conclusions opposées, suivant que la valeur de la probabilité sera

grands noms dans le siècle dernier, & peut-être n'en pourroit-on citer aucun de plus respectable.

Jean de Witt avoit été le Disciple de Descartes, & l'un de ses meilleurs Disciples. Avant d'être Grand-Pensionnaire, il avoit publié un Ouvrage sur les Courbes, où l'on trouve des vues ingénieuses & nouvelles: ce fut lui qui essaya le premier de fixer le taux des Rentes viagères, d'après les probabilités de la vie, données par des Tables de mortalité. Il eut sur la Politique, sur les véritables intérêts des Nations, sur la liberté du Commerce, des idées fort supérieures à celles de son siècle; & l'on peut dire que sa mort prématurée fut un malheur pour l'Europe comme pour sa patrie.

contenue

contenue, ou ne le fera pas, dans des limites plus étroites, on voit aisément que la raison seule ne peut conduire d'une manière certaine à celle de ces deux conclusions que l'on doit préférer. La raison suffit tant qu'on n'a besoin que d'une observation vague des évènements : le Calcul devient nécessaire aussi-tôt que la vérité dépend d'observations exactes & précises.

Ces raisons que nous avons exposées déjà au commencement de ce Discours, ne sont pas les seules. Il n'y a personne qui n'ait observé sur lui-même qu'il a changé d'opinion sur certains objets, suivant l'âge, les circonstances, les évènements, sans pouvoir dire cependant que ce changement ait été fondé sur de nouveaux motifs, & sans pouvoir y assigner d'autre cause que l'impression plus ou moins forte des mêmes objets. Or, si au lieu de juger par cette impression qui multiplie ou exagère une partie des objets, tandis qu'elle atténue ou empêche de voir les autres, on pouvoit les compter ou les évaluer par le Calcul, notre raison cesseroit d'être l'esclave de nos impressions.

Cette dernière considération est d'autant plus importante, que souvent notre opinion décide non-seulement de nos intérêts, mais de ceux des autres hommes; que dans ce cas il ne suffit pas pour être juste de croire une opinion, mais qu'il faut avoir de plus des motifs de la croire, & que ces motifs puissent être regardés comme de véritables preuves. Ainsi l'on ne doit point regarder comme indifférens les moyens d'évaluer, toutes les fois qu'il est possible, les degrés de la probabilité qui détermine nos décisions, & d'assurer par cette méthode la justice de nos jugemens & de nos actions.

Nous oserons ajouter que l'application du Calcul à la discussion d'un très-grand nombre de questions qui intéressent

les hommes, seroit un des meilleurs moyens de leur faire sentir le prix des lumières. Le nombre de ceux qui doutent de leur utilité, ou qui prétendent qu'il seroit dangereux de les répandre, est bien petit de nos jours, si on veut ne compter que ceux qui sont de bonne foi dans une opinion si avilissante pour la Nature humaine.

On fait trop aujourd'hui que l'homme ignorant n'a d'autre intérêt que celui de son indépendance. La force peut l'enchaîner, la servitude peut l'abrutir, la superstition peut le conduire; mais s'il rompt ses chaînes, s'il sort de sa stupide indifférence, si son guide l'égare, alors son instinct reparoît dans toute sa force, & il devient plus terrible que le Sauvage même; semblable à ces animaux féroces que l'homme a soumis, & qui échappés de ses fers, reprennent toute leur furie, & n'ont perdu que l'espèce de générosité qu'ils devoient à leur indépendance.

L'homme éclairé au contraire, en connoissant ses droits, apprend à en connoître aussi les limites; il sait quand il doit faire à son propre bonheur ou à celui des autres, le sacrifice de ses volontés, & quelquefois même celui de ses véritables droits. En connoissant toute l'étendue de ses devoirs, il apprend que le respect pour le bien-être, pour le repos de s autres est un des plus importants & des plus sacrés: il voit plus d'une source de bonheur, plus d'un moyen de faire le bien se présenter à lui, & il choisira ce qui est le plus facile, ce qu'il peut s'assurer d'obtenir à moins de frais.

Mais les lumières ne peuvent-elles pas éblouir les hommes au lieu de les éclairer? la vérité peut-elle être le prix des premiers efforts de l'esprit humain? Ne peut-il pas arriver que l'on substitue à des erreurs grossières des erreurs plus

subtiles & plus dangereuses, parce qu'elles seront plus difficiles à détruire ? L'enthousiasme, qui porte à l'extrême les opinions fondées sur des préjugés, n'exagèrera-t-il point aussi les demi-vérités que la raison fera découvrir ? L'esprit humain en sera-t-il moins exposé à s'égarer, parce que l'espace qu'il s'est ouvert est plus étendu ?

Telles sont les objections que dans un siècle éclairé on peut encore opposer à l'utilité du progrès des lumières ; & lorsque la Philosophie s'unit seulement à l'Éloquence & aux Lettres, ces objections doivent paroître spécieuses, peut-être même ne sont-elles pas sans quelque fondement : mais elles perdent toute leur force lorsque la Philosophie s'unit aux Sciences, & sur-tout aux Sciences de Calcul. Alors obligée d'en suivre la marche toujours certaine & mesurée, elle n'auroit à craindre ni l'enthousiasme ni les écarts. Accoutumée à des résultats précis, elle sentiroit toute l'incertitude qu'un résultat vague porte nécessairement avec lui, & le danger de s'abandonner aux conséquences qui semblent en devoir être la suite, & qui deviennent de plus en plus incertaines à mesure qu'elles s'en éloignent.

La précision des résultats, & leur certitude, marquerait une limite bien prononcée entre les opinions spécieuses, qui ne sont que les aperçus d'un premier coup-d'œil, & celles qui méritent d'être mises au rang des vérités qu'on doit suivre dans la pratique. On auroit le double avantage que ceux qui cherchent les lumières utiles, en auroient de plus sûres & risqueroient moins de s'égarer, tandis que ceux qui en craignent les effets, ne pourroient plus y opposer avec autant d'avantage les sophismes & les préjugés. Cette lutte éternelle entre l'erreur & la vérité seroit plus paisible, & le succès dépendroit moins du hasard ou de l'adresse des combattans.

Enfin cette application des Sciences à la Philosophie, est un moyen non-seulement d'étendre les lumières, de les rendre plus sûres, mais d'en multiplier aussi l'utilité, puisqu'elle ne peut manquer de s'étendre successivement à un nombre plus ou moins grand d'objets nouveaux, de questions importantes, qui paroîtroient peut-être aujourd'hui bien éloignées de pouvoir être résolues par de pareilles méthodes. Or, en multipliant les moyens de faire le bien, en les étendant sur un plus grand nombre d'objets, on apprendroit aux hommes à se passer plus tranquillement des avantages dont ils voient qu'il faudroit acheter trop cher une espérance incertaine. En ouvrant ainsi un champ plus vaste aux esprits que domine l'amour du bien, on assure l'utilité de leurs efforts, on empêche que leur ardeur ne puisse être dangereuse, & c'est peut-être le moyen le plus sûr de concilier deux choses qui presque par-tout ont été séparées jusqu'ici; l'activité pour le bien commun, & le repos.

Étendue
de ces
applications.

On se tromperoit en effet si on regardoit ces applications comme nécessairement bornées à un petit nombre d'objets. La connoissance précise de tout ce qui regarde la durée de la vie des hommes, de l'influence qu'ont sur cette durée le climat, les habitudes, la nourriture, la manière de vivre, les différentes professions, les Loix même & les gouvernemens, une connoissance non moins exacte de tous les détails relatifs aux productions de la terre & à la consommation des hommes, une évaluation non arbitraire de l'utilité réelle des travaux publics, des établissemens nationaux, des effets salutaires ou funestes d'une grande partie des Loix d'administration, la méthode de s'assurer, par le Calcul, de la précision des résultats, d'en déduire des conséquences certaines, de connoître par ce

moyen la vérité ou la fausseté d'un grand nombre d'opinions, les ressources qu'on peut tirer de ces applications pour pénétrer plus avant dans la connoissance de l'homme physique ou de l'homme moral; tous ces objets ont à la fois la plus grande importance & la plus grande étendue. On est bien loin d'avoir épuisé en ce genre les connoissances qui semblent s'offrir les premières; & lorsqu'elles seront épuisées, pourquoi, dans cette partie des Sciences comme dans toutes les autres, ne s'offriroit-il pas alors devant nous un champ bien plus vaste encore que celui qui auroit été déjà parcouru?

Ici, comme dans les Sciences physiques, il y a peut-être une infinité d'objets qui se refuseront toujours au Calcul, mais on peut se répondre aussi que dans l'un & l'autre genre, le nombre de ceux auxquels le Calcul peut s'appliquer, est également inépuisable.

On a fait sans doute des applications ridicules du Calcul à des questions politiques; & combien n'en a-t-on pas fait d'aussi ridicules dans toutes les parties de la Physique?

Mais c'est trop nous arrêter à prouver une vérité qu'aucun homme qui aura étudié également la Philosophie & les sciences du Calcul, ne pourra jamais révoquer en doute.

Nous terminerons ce Discours par une réflexion qui peut être utile. On a vu ci-dessus que toute la certitude que nous pouvons atteindre, est fondée sur un penchant naturel à regarder comme une chose constante ce que nous avons vu se répéter un très-grand nombre de fois. Ce même penchant naturel ne doit-il pas nous porter également à croire la constance & la réalité des choses que nous entendons répéter sans contradiction? Ne serions-nous pas à cet égard dans le cas d'un homme auquel l'on auroit fait sentir deux boules,

*Réflexion
sur la cause
des erreurs
& des préjugés.*

en en plaçant une feule entre deux doigts croisés , & qui , s'il ne réfléchissoit pas sur les circonstances de ce phénomène , se croiroit certain de l'existence de deux boules ?

L'obscurité , l'incompréhensibilité même des idées que les mots prononcés devant nous font naître dans notre esprit , n'affoiblit pas ce penchant dans ceux qui n'ont pas acquis l'habitude de se former des idées précises. Un Astronome qui calcule une éclipse , peut n'avoir pas la conscience de la vérité de la théorie sur laquelle la méthode qu'il emploie est appuyée ; il n'est pas nécessaire qu'il ait dans le moment même une idée nette & précise de ce que c'est qu'un logarithme , par exemple , quoiqu'il emploie les logarithmes. Si donc il diffère de celui qui croit une proposition qu'il n'entend point , mais dont il a été frappé , c'est que l'Astronome se rappelle qu'il a fait autrefois , d'après une démonstration qui lui a paru certaine , ce qu'il fait aujourd'hui machinalement , & que la croyance de l'autre a toujours été également machinale. L'homme à préjugé ressemble donc parfaitement à un Arithméticien , à qui on auroit fait apprendre par cœur une méthode de calculer les éclipses & la théorie de cette méthode sans les lui expliquer , & qui calculeroit des éclipses par routine. Il est aisé de voir que cet homme ne s'aviferoit pas de douter de la vérité de ces propositions qu'il n'entend pas , & d'après lesquelles il calcule , & il y croiroit même très-fermement. Les Quadrateurs sont un autre exemple de la même vérité. Ils ne croiroient pas la proposition absurde à laquelle ils sont si opiniâtement attachés , s'ils avoient une idée nette des termes de cette proposition. Ce penchant à croire ce qu'on a cru , qui a la même origine que le penchant à croire constant ce qu'on a vu se répéter uni formément

peut donc s'étendre réellement sur les choses les plus incompréhensibles.

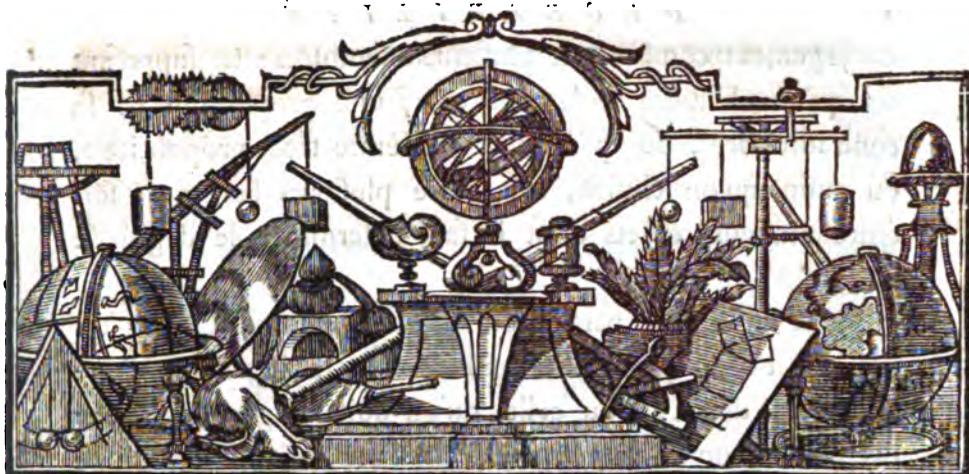
La Raïson & le Calcul nous disent que la probabilité augmente de plus en plus avec le nombre des observations constantes qui sont le fondement de notre croyance ; mais la force du penchant naturel, qui nous porte à croire, ne dépend-elle pas au moins autant de la force de l'impression que ces objets font sur nous ! Alors si la raison ne vient pas à notre secours, nos opinions seront réellement l'ouvrage de notre sensibilité & de nos passions. Or, l'observation semble prouver que ce penchant à croire constant & réel ce qui est arrivé constamment, dépend uniquement d'une impression purement passive, & non du raisonnement, puisque le raisonnement ne peut nous fournir aucune raison de croire que ce penchant ne nous trompe pas.

Cette manière d'expliquer la source de nos erreurs & de notre opiniâtreté, peut conduire à des conséquences utiles sur les moyens d'arracher à leur funeste influence les deux classes de l'humanité qu'il est le plus important de préserver de l'erreur, & qui y sont le plus exposées ; les enfans & le peuple.

Tels sont les résultats des questions que nous avons discutées dans cet Essai, & des réflexions auxquelles ces résultats nous ont conduits. Puisse cet Ouvrage être de quelque utilité ; & puissent ceux qui daigneront le lire, juger que je n'ai point profané la mémoire d'un grand homme, en lui consacrant ce foible hommage & en osant parler au Public de l'amitié qui nous unissoit !



ESSAI



ESSAI

SUR

L'APPLICATION DE L'ANALYSE

À LA PROBABILITÉ DES DÉCISIONS

Rendues à la pluralité des voix.

CET Ouvrage sera divisé en cinq parties.

Dans la première, on suppose connue la probabilité du jugement de chaque Votant, & on cherche la probabilité de la décision rendue à la pluralité des voix dans un grand nombre d'hypothèses : d'abord en ne considérant qu'une seule assemblée qui ne vote qu'une fois; ensuite, en supposant que la même assemblée revienne aux voix jusqu'à ce que l'on ait obtenu la pluralité exigée; en faisant dépendre la décision,

A

du jugement combiné de plusieurs assemblées ; en supposant ou qu'on délibère seulement entre une proposition & la contradictoire , ou qu'on délibère entre trois propositions , ou enfin qu'on choisit , soit entre plusieurs hommes , soit entre plusieurs objets dont il faut déterminer le degré de mérite.

Dans la seconde partie, on supposera au contraire qu'on connoît ou la probabilité qui résulte du jugement d'une assemblée donnée, ou celle qu'on doit exiger dans une décision , & on s'occupera de déterminer , soit la probabilité du suffrage de chaque Votant , soit l'hypothèse de pluralité qu'il faut choisir.

Dans la troisième , on cherchera une méthode pour s'assurer à *posteriori* du degré de probabilité d'un suffrage ou de la décision d'une assemblée , & pour déterminer les degrés de probabilité que doivent avoir les différentes espèces de décisions.

Dans la quatrième, on donnera le moyen de faire entrer dans le calcul l'influence d'un des Votans sur les autres , la mauvaise-foi qu'on peut leur supposer , l'inégalité de lumières entre les Votans & les autres circonstances auxquelles il est nécessaire d'avoir égard pour rendre la théorie applicable & utile.

La cinquième renfermera l'application des principes précédens à quelques exemples.

PREMIÈRE PARTIE.

Nous supposerons d'abord que tous ceux qui donnent leurs voix, ont une égale sagacité, une égale justesse d'esprit dont ils ont fait également usage, qu'ils sont tous animés d'un égal esprit de justice, enfin que chacun d'eux a voté d'après lui-même, comme il arriveroit si chacun prononçoit séparément son avis, ou, ce qui revient au même, que dans la discussion chacun n'a eu sur l'opinion d'aucun autre une influence plus grande que celle qu'il en a reçue lui-même.

Nous nous proposons d'examiner dans la suite, comment on peut faire entrer dans le calcul la différence de sagacité ou de justesse d'esprit des Votans, les effets de la partialité & l'influence d'un des Votans sur les autres.

Nous supposerons en général que v représente le nombre de fois que l'opinion d'un des Votans doit être conforme à la vérité, & e le nombre de fois qu'elle doit être contraire à la vérité sur un nombre $v + e$ de décisions; & pour abrégé, nous supposerons $v + e = 1$ en général. Cela posé, regardant v & e comme des quantités connues, nous chercherons d'abord la probabilité qui en résulte en faveur de la vérité pour un nombre quelconque de Votans dans les différentes hypothèses de pluralité que l'on peut choisir.

PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

Le nombre des Votans est $2q + 1$, & l'on cherche la probabilité de la pluralité d'une seule voix.

A ij

Soit la probabilité qu'il y aura au moins une seule voix de plus en faveur de la vérité, exprimée par V^q , & la probabilité qu'il y aura au moins une seule voix de plus en faveur de l'erreur, exprimée par E^q . nous aurons

$$V^q = v^{2q+1} + \frac{2q+1}{1} v^{2q} e + \frac{2q+1}{2} v^{2q-1} e^2 \dots + \frac{2q+1}{q} v^{q+1} e^q$$

$$\& E^q = e^{2q+1} + \frac{2q+1}{1} e^{2q} v + \frac{2q+1}{2} e^{2q-1} v^2 \dots + \frac{2q+1}{q} e^{q+1} v^q$$

$\frac{2q+1}{q}$ désigne ici le coefficient de $v^{q+1} e^q$ dans $(v + e)^{2q+1}$,

& en général $\frac{n}{m}$ désignera le coefficient de $v^{n-m} e^m$ dans $(v + e)^n$; cette notation sera conservée dans tout cet Ouvrage.

L'on aura ici $V + E = 1$. Mais il sera facile de mettre la fonction V^q sous une forme plus commode. Pour cela, supposons q augmenté d'une unité, nous avons évidemment,

$$V^{q+1} = v^{2q+3} + \frac{2q+3}{1} v^{2q+2} e + \frac{2q+3}{2} v^{2q+1} e^2 \dots$$

$$+ \frac{2q+3}{q+1} v^{q+2} e^{q+1}. \text{ Comparant cette valeur}$$

avec celle de V^q , & multipliant celle-ci par $(v + e)^2 = 1$, ce qui n'en change pas la valeur, nous aurons

$$V^q = v^{2q+3} + \frac{2q+1}{1} v^{2q+2} e + \frac{2q+1}{2} v^{2q+1} e^2 \dots + \frac{2q+1}{q-1} v^{q+2} e^{q-2}$$

$$+ 2 \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot \frac{2q+1}{1} \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot \frac{2q+1}{q-2}$$

$$\qquad \qquad \qquad + 1 \qquad \qquad \qquad + \frac{2q+1}{q-3}$$

$$+ \frac{2q+1}{q} v^{q+3} e^q$$

$$+ 2 \cdot \frac{2q+1}{q-1} \qquad + 2 \cdot \frac{2q+1}{q} v^{q+2} e^{q+1}$$

$$+ \frac{2q+1}{q-2} \qquad + \frac{2q+1}{q-1} \qquad + \frac{2q+1}{q} v^{q+2} e^{q+2};$$

or il aisé de voir qu'en général $\frac{2q+1}{q'} + 2 \cdot \frac{2q+1}{q'-1} + \frac{2q+1}{q'-2}$ est le coefficient de $v^{2q+3} - q' e^{q'}$ dans $(v + e)^{2q+1} \cdot (v + e)^2$, & par conséquent est égal à $\frac{2q+3}{q}$. Substituant donc cette valeur dans les coefficients de la valeur que nous venons de trouver pour (V^q) , & mettant à la place de $2 \cdot \frac{2q+1}{q} + \frac{2q+1}{q-1}$ la valeur $\frac{2q+3}{q+1} - \frac{2q+1}{q+1}$, nous aurons

$$V^q = v^{2q+3} + \frac{2q+3}{1} v^{2q+2} e + \frac{2q+3}{2} v^{2q+1} \cdot e^2 \dots$$

$$+ \frac{2q+3}{q+1} v^{q+2} e^{q+1} - \frac{2q+1}{q+1} v^{q+2} e^{q+1}$$

$$+ \frac{2q+1}{q} v^{q+1} \cdot e^{q+2};$$

d'où nous tirerons

$$V^{q+1} - V^q = \frac{2q+1}{q+1} v^{q+2} \cdot e^{q+1} - \frac{2q+1}{q} v^{q+1} e^{q+2},$$

& à cause de

$$\frac{2q+1}{q+1} = \frac{2q+1}{q}; \quad V^{q+1} - V^q = \frac{2q+1}{q} v^{q+1} \cdot e^{q+1} \times (v - e),$$

formule d'où l'on tirera

$$V^q = v + (v - e) \times [ve + (\frac{1}{1}) v^2 e^2 + (\frac{2}{2}) v^3 e^3 + (\frac{7}{3}) v^4 e^4 \dots$$

$$+ \frac{2q-1}{q-1} v^q e^q].$$

Si maintenant nous appelons Q le dernier terme de V^q , &

Q' le dernier terme de V^{q+1} , nous aurons $Q = \frac{2q-1}{q-1} v^q e^q$.

$$Q' = \frac{2q+1}{q} v^{q+1} \cdot e^{q+1}, \text{ d'où } Q' = Q \cdot \frac{2q+1 \cdot 2q}{q+1 \cdot q}$$

$$ve = Q \cdot \frac{2q+2q}{q+q} ve; \text{ mais à cause de } v + e = 1.$$

$ve < \frac{1}{4}$ & $\frac{1q^2 + 2q}{q^2 + 1} < 4$; donc $Q' < Q$; donc la série qui représente V^q , est une série convergente quels que soient v & q ; mais lorsque q est grand, v & e restant les mêmes, le rapport de Q à Q' approche beaucoup de $4ve$; en sorte que si ve n'est pas fort différent d'un quart, la série devient très-peu convergente après un certain nombre de termes.

Ainsi, par exemple, lorsque $v > e$, la probabilité pour que la décision soit conforme à la vérité, augmentera sans cesse, en augmentant le nombre des Votans; mais si v n'est pas très-grand par rapport à e , & que par conséquent $4ve$ diffère peu de l'unité, ces accroissemens dans la valeur de v^q seront très-lents; au lieu que la convergence sera très-prompte si $4ve$ est une petite fraction.

Si nous cherchons maintenant la valeur de E^q , nous trouverons par la même méthode,

$$E^q = e + (e - v) [ve + \binom{q}{1} v^2 e^2 \dots + \frac{2q-1}{q-1} v^q e^q];$$

d'où il résulte, 1.^o $V^q + E^q = 1$, comme cela doit être; 2.^o E^q diminuant toujours lorsque $v > e$.

Si au contraire $e > v$, V^q ira toujours en diminuant lorsque q augmente, & E^q augmentera de manière que les accroissemens de l'un de ces termes seront toujours égaux aux décroissemens de l'autre.

Cette première observation nous conduit d'abord à cette conséquence, que plus le nombre des Votans sera grand, plus il y a de probabilité que leur décision sera contraire à la vérité lorsque $e > v$, c'est-à-dire lorsqu'il y a probabilité que chacun en particulier se trompera; & si q est très-grand, cette probabilité pourra devenir très-grande, quoique la différence entre v & e soit très-petite.

Or cette hypothèse de $e > v$ n'est point absurde; il y a un grand nombre de questions importantes compliquées, ou soumises à l'empire des préjugés & des passions, sur lesquelles il est probable qu'un homme peu instruit prendra une opinion

erronée. Il y a donc un grand nombre de points sur lesquels il arrivera que plus on multiplierá le nombre des Votans, plus il y aura lieu de craindre d'obtenir, à la pluralité, une décision contraire à la vérité; en sorte qu'une constitution purement démocratique sera la plus mauvaise de toutes pour tous les objets sur lesquels le peuple ne connoitra point la vérité.

Le seul moyen de remédier à cet inconvénient, sans nuire au droit du peuple, seroit, lorsqu'il est question de faire une loi sur quelqu'un de ces objets, d'accorder à un corps d'hommes éclairés la prérogative de proposer la loi, & de donner à cette loi la sanction dont elle a besoin, en demandant à l'assemblée populaire, non si la loi est utile ou dangereuse, mais s'il ne s'y trouve rien de contraire à la justice, aux premiers droits des hommes; encore ce remède ne peut-il être utile qu'en supposant dans chaque Votant de la bonne foi, la plus grande confiance en ses chefs, & une connoissance assez nette des principes de la justice, pour que de vaines subtilités ne puissent pas l'ébranler. Une démocratie pure ne peut donc être bonne que pour un peuple très-instruit, c'est-à-dire, tel qu'il n'en a encore existé aucun, du moins parmi les grands peuples.

Dans tout autre cas la forme démocratique ne doit embrasser que les objets sur lesquels les hommes non instruits peuvent prononcer en connoissance de cause, comme ceux qui intéressent la sûreté personnelle, ceux où un intérêt personnel direct & évident, peut dicter le jugement. La démocratie seroit encore désavantageuse dans les pays où l'utilité publique exigeroit de grandes réformes dans les principes de la législation, de l'administration, du commerce. Ce que nous disons ici doit s'entendre également des assemblées très-nombreuses, & il seroit facile d'en donner des exemples.

Reprenons maintenant la formule

$$V^q = v + (v - e) \left[ve + \left(\frac{1}{1}\right) (ve)^2 + \dots + \frac{2q-1}{q-1} \cdot (ve)^q \right].$$

Il est aisé de voir que le coefficient d'un terme $(ve)^q$,

se formera en multipliant celui du terme précédent par $\frac{(2q-1) \cdot 2}{q}$; si nous considérons maintenant la formule

$(1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$, nous trouverons que les coefficients de cette série suivent la même loi, en sorte que le coefficient de z^q , sera égal au coefficient de z^{q-1} , multiplié par $\frac{(2q-1) \cdot 2}{q}$. Faisant donc $v e = z$, nous aurons notre série $z + (\frac{1}{1}) z^2 + \dots + \frac{2q-1}{q} z^q$, répondant

terme à terme à ceux de la série $a + b (1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$. a & b ne contenant point z ; en effet, puisque le second terme de notre série est donné par le premier, il suffit de produire l'égalité pour les coefficients de $v e^0$ & de $v e$ pour que tous les termes soient égaux chacun à chacun.

Mais le coefficient de $v e^0$ est 0 dans notre formule, condition qui donne $a + b = 0$; celui de $v e$ est 1, ce qui donne $2b = 1$; donc $b = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{2}$, & notre formule répondra terme à terme à la fonction $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$ réduite en série.

Donc lorsque $q = \frac{1}{2}$, notre formule sera égale à $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 4z)^{-\frac{1}{2}}$; donc nous aurons $V^q = v + (v - e) \times [-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 4ve)^{-\frac{1}{2}}]$; & réduisant cette fonction en une fonction de e seulement, c'est-à-dire, y faisant $v = 1 - e$, elle deviendra

$$1 - e + (1 - 2e) \times [-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1 - 4e + 4ee)^{-\frac{1}{2}}] = 1,$$

$$\text{à cause de } (1 - 4e + e^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-2e},$$

$$\text{\& de } -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-2e} = \frac{e}{1-2e}.$$

Ainsi, non-seulement la série qui représente V^q est toujours croissante, & de plus en plus convergente, mais même elle

approche

approche continuellement de l'unité qui est la véritable limite; d'où il résulte que lorsque $v > e$ on peut, en multipliant le nombre des Votans, avoir une probabilité aussi grande que l'on voudra, que la décision sera conforme à la vérité.

Reprenons encore notre série.

$$ve + \left(\frac{1}{2}\right) (ve)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) (ve)^3 \dots + \frac{2q-1}{q-1} (ve)^q;$$

& mettant $e - e^2$ à la place de ve , cherchons à la réduire en série par rapport à e .

Si $q = 1$, elle sera $e - e^2$; si $q = 2$, elle deviendra $e + 2e^2 - 6e^3 + 3e^4$; si $q = 3$, elle deviendra $e + 2e^2 + 4e^3 - 27e^4 + 30e^5 - 10e^6$; & en général $e + 2e^2 + 4e^3 + 8e^4 \dots = e \frac{1}{1-2e}$

lorsque q est $\frac{1}{2}$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus. En effet, il est aisé de voir que le coefficient d'une puissance quelconque q' de e jusqu'à q exclusivement, sera

$$\frac{2q-1}{q-1} - \frac{q-1}{1} \frac{2q-3}{q-2} + \frac{q-2}{2} \frac{2q-5}{q-3} - \frac{q-3}{3} \frac{2q-7}{q-4} \dots = 2^{q'-1},$$

& les termes supérieurs à q seront exprimés de la même manière, moins les coefficients des termes du même degré que fourniraient les termes $\frac{2q+1}{q} (ve)^{q+1}$, $\frac{2q+3}{q+1} (ve)^{q+2}$; ce qui

conduit au même résultat par une route plus directe. Comme nous avons ici $V^q + E^q = 1$, il est clair que lorsque $V^{\frac{1}{2}} = 1$, $E^{\frac{1}{2}} = 0$, & que par conséquent lorsque $v < e$, $V^{\frac{1}{2}}$ devient aussi zéro; & comme V^q est fonction de v comme E^q l'est de e , il est clair que lorsque $v = e$, $V^q = E^q$, ce qui donne $V^q = \frac{1}{2}$, $E^q = \frac{1}{2}$, quel que soit q , & par conséquent $V^{\frac{1}{2}} = E^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; mais si l'on veut déduire cette conclusion des formules en ζ ci-dessus, on peut rencontrer quelques difficultés qu'il ne sera pas inutile de développer

B

ici. 1.° la formule $(1 - 4ev)^{-\frac{1}{2}}$ doit rester la même, soit que $v > e$ ou $e > v$; ainsi on aura dans le premier cas, où $e < v$ $(1 - 4ev)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-2e}$, ou $\frac{1}{2v-1}$; donc lorsque $e > v$, elle doit devenir $\frac{1}{2e-1}$; donc la valeur de $V^{\frac{1}{2}}$, dans ce cas, deviendra 0. Il en est de même de la série en e ci-dessus; il est clair qu'elle est $\frac{1}{1-2e}$, mais $e < v$; donc lorsque $e > v$, elle devient $\frac{1}{1-2v} = \frac{1}{2e-1}$. 2.° Lorsque $v = e$, il est clair que c'est le point où la valeur de V^q passe de la valeur 1 à la valeur 0; supposons donc ici v augmenté de ∂v , e diminué de ∂v par conséquent, & que V^q devienne $V^q + \partial V^q$; si on suppose v diminué de ∂v , & e par conséquent augmenté de ∂v , V^q deviendra $V^q - \partial V^q$; mais par l'hypothèse $V^q + \partial V^q = 1$, & $V^q - \partial V^q = 0$; donc $\partial V^q = \frac{1}{2}$, & $V^q = \frac{1}{2}$.

Les formules ci-dessus V^q & E^q représentent les probabilités d'une décision conforme ou contraire à la vérité, lorsque cette question n'est pas encore décidée; mais si elle l'est, & que la pluralité à laquelle elle a été rendue soit connue, on peut demander quelle est la probabilité de la décision pour un homme intéressé à la question, & qui n'a que ce moyen de la juger.

Supposons donc le nombre des Votans $2q + 1$ comme ci-dessus, & que l'on sache que la pluralité ait été de q' , en sorte que $2q + 1 - z = z + q'$, & par conséquent $2z = 2q + 1 - q'$, $z = q + \frac{1-q'}{2}$; ainsi comme z est un nombre entier, il faut que q' soit impair, ou $= 2q'' + 1$; on aura dans ce cas le nombre des combinaisons en faveur de la vérité, exprimé par $\frac{2q+1}{q-q''} v^{q+q''+1} e^{q-q''}$, & en faveur de l'erreur par $\frac{2q+1}{q-q''} v^{q-q''} e^{q+q''+1}$. Le nombre

des combinaifons totales fera donc $\frac{2q+1}{q-q''} v^{q-q''} e^{q-q''} (v^{2q''+1} + e^{2q''+1})$,

en forte que la probabilité pour la vérité, fera

$\frac{v^{2q''+1}}{v^{2q''+1} + e^{2q''+1}}$, & pour l'erreur $\frac{e^{2q''+1}}{v^{2q''+1} + e^{2q''+1}}$, quantités

indépendantes de la valeur de q ; en forte que la probabilité en faveur de la vérité d'une décision, lorsque la pluralité qu'elle a eue est connue, est indépendante du nombre des Votans, & dépend de cette pluralité seule.

Si $q'' = 0$, alors la probabilité en faveur de la vérité sera exprimée par $\frac{v}{v+e}$, c'est-à-dire précisément la même que s'il n'y avoit qu'un Votant.

Donc toutes les fois que l'on aura une assemblée qui pourra prononcer, même à la pluralité d'une seule voix, il sera possible que la décision n'ait que cette pluralité, & alors la probabilité que ceux qui n'auront pu examiner cette décision, auront en faveur de la vérité, ne sera exprimée que par $\frac{v}{v+e}$; précisément comme celle que l'on auroit eue si le jugement avoit été abandonné à un seul homme.

Cela posé, il nous paroît que l'on doit distinguer deux cas, celui où il est absolument nécessaire de prononcer, & celui où il n'est pas nécessaire qu'il y ait une décision; celui où les inconvéniens d'une décision fautive sont égaux des deux côtés, & celui où ces inconvéniens sont inégaux; enfin celui où il faut exécuter la décision rendue à la pluralité, & celui où il ne faut l'exécuter que lorsqu'elle a une très-grande probabilité en sa faveur.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de décider si une telle propriété appartiendra à un homme ou à un autre; il est clair en général qu'elle doit appartenir à l'un des deux, & qu'ainsi il faut prononcer. Il est clair que si le Tribunal qui l'adjuge se trompe, il n'y a, quel que soit celui des deux qui obtienne la propriété, qu'un inconvénient égal des deux côtés,

celui de donner un bien à un homme qui n'y a point de droit ; il est clair encore que comme il faut que le bien ait un possesseur, il est nécessaire que la décision du Tribunal soit exécutée.

Supposons qu'il s'agisse de déclarer qu'un accusé est coupable ou qu'il ne l'est pas, sans doute il est nécessaire de prononcer ; mais l'inconvénient d'absoudre un coupable est plus petit que celui de punir un innocent ; mais la décision qui déclare un homme coupable, ne peut être exécutée avec justice que lorsqu'il y a une très-grande probabilité qu'elle est conforme à la vérité.

Il peut donc être juste, dans le premier cas, d'établir que les jugemens à la pluralité d'une seule voix, seront valides, mais il seroit injuste de l'établir dans le second cas.

Ce que nous venons de dire peut s'appliquer à différens cas des loix civiles. Par exemple, la loi qui admet la prescription, est une sauvegarde nécessaire de la propriété ; mais si elle n'étoit établie que pour assurer la tranquillité des possesseurs actuels, ce fondement ne suffiroit pas pour rendre cette loi juste ; & une loi n'est utile que lorsqu'elle est juste. La prescription ne peut être censée juste que d'après ce principe, qu'au bout d'un certain espace de temps, il devient plus probable que les titres légitimes de la possession aient été perdus, qu'il ne l'est que le légitime possesseur ait laissé une jouissance libre à un usurpateur. Il paroît donc également injuste, ou de ne donner aucune force à la prescription, ou, quelque longue qu'elle soit, de lui donner l'avantage sur toute espèce de titre. Il est peut-être impossible même de fixer absolument, par une loi précise, les cas où la prescription peut être attaquée ; mais la justice exige que le possesseur ne soit dépouillé que lorsqu'il y a une très-grande probabilité que sa possession est illégitime. Il seroit donc injuste d'admettre, pour le déposséder, des décisions rendues à la pluralité d'une seule voix.

Il en fera de même des décisions d'un corps législatif. On sent que lorsqu'il s'agit de donner la sanction à une loi, on peut

se contenter de la pluralité simple, si l'effet de cette loi n'est que de rendre aux hommes un exercice plus étendu de leurs droits naturels, mais qu'il seroit injuste de se contenter de cette pluralité s'il s'agissoit de restreindre ces mêmes droits: en effet, dans ce dernier cas l'inconvénient n'est pas égal des deux côtés, & un homme ne peut consentir à sacrifier de ses droits sans une très-grande probabilité que ce sacrifice est nécessaire.

S'il s'agit de changemens dans la constitution, alors il n'est nécessaire de faire ces changemens que lorsque les abus à réformer sont frappans; ainsi il n'est nécessaire que la décision soit exécutée que dans le cas où il y a une grande probabilité qu'elle est conforme à la vérité, cette grande probabilité est la seule source de la sécurité de ceux qui n'ont point part à l'assemblée, qui ne sont point à portée de juger la vérité de ses décisions, ou même de ceux qui ont été d'un avis contraire à celui de la pluralité.

Cette très-grande probabilité qu'une décision est juste, est le seul motif raisonnable que puisse avoir un homme de consentir à se soumettre à la volonté d'un autre homme, dans les cas où cette volonté sera contraire à son opinion ou à son intérêt.

Il est nécessaire d'ailleurs de faire attention dans toutes les circonstances à ce *minimum* de pluralité. En effet, il ne suffit point, pour la sûreté, d'avoir une très-grande probabilité que l'on ne sera pas jugé d'après un jugement dont la probabilité soit très-petite, il faut faire en sorte que cette probabilité soit toujours très-grande dans chaque jugement particulier.

Les réflexions précédentes suffisent pour montrer qu'il y a un grand nombre de cas où la pluralité d'une voix est insuffisante, & où l'on doit en exiger une plus considérable. Alors si la pluralité est moindre que celle qui est exigée, la décision se trouve être conforme à l'avis de la minorité.

Cette manière de décider n'est point absurde, d'après ce

que nous avons dit. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de juger si un homme est coupable ou non d'un crime; qu'il y ait onze voix pour le déclarer coupable & dix pour le déclarer innocent; alors le jugement qui l'absout prononce non qu'il n'est pas coupable, puisqu'il résulte de ce jugement une probabilité contre lui, mais que cette probabilité n'est pas assez grande pour qu'il doive être traité comme coupable: ce n'est pas un de ces cas où entre deux opinions il faut préférer la plus probable, mais un de ceux où l'on ne doit agir d'après une des deux opinions que lorsqu'elle est très-probable.

Nous allons donc examiner maintenant d'autres hypothèses de pluralité.

S E C O N D E H Y P O T H È S E.

Nous conserverons ici les mêmes dénominations; le nombre des Votans sera toujours $2q + 1$, & nous chercherons, pour les cas où l'on exige une pluralité de 3, 5, 7, $2q' + 1$ voix; 1.° la probabilité que cette pluralité ne sera pas en faveur de l'erreur; 2.° la probabilité qu'elle sera en faveur de la vérité, & réciproquement.

Si la pluralité doit être de trois voix, V exprimant la probabilité que la décision ne sera pas contraire à la vérité, on aura

$$V^q = v^{2q+1} + \frac{2q+1}{1} v^{2q} e + \frac{2q+1}{2} v^{2q-1} e^2 \dots + \frac{2q+1}{q+1} v^q e^{q+1};$$

& supposant que q est augmenté d'une unité,

$$V^{q+1} = v^{2q+3} + \frac{2q+3}{1} v^{2q+2} e \dots + \frac{2q+3}{q+2} v^{q+1} e^{q+2};$$

& multipliant V^q par $(v + e)^2 = 1$, & retranchant cette valeur de V^{q+1} , nous en tirerons

$$\begin{aligned} V^{q+1} - V^q &= \frac{2q+1}{q+2} v^{q+1} e^{q+2} - \frac{2q+1}{q+1} v^q e^{q+3} = \frac{2q+1}{q+1} v^q e^{q+3} \left(\frac{q}{q+2} v - e \right) \\ &= \frac{2q+1}{q} v^q e^{q+2} \cdot \left(\frac{q}{q+2} v - e \right); \text{ d'où nous tirerons} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V^q &= 1 + \left(\frac{1}{0}\right) e^0 (-e) + \left(\frac{3}{1}\right) v e^2 \left(\frac{1}{3} v - e\right) + \left(\frac{5}{2}\right) v^2 e^4 \cdot \left(\frac{2}{4} v - e\right) \\ &+ \left(\frac{7}{3}\right) v^3 e^6 \left(\frac{1}{3} v - e\right) \dots + \frac{2q-1}{q-1} v^{q-1} e^{q+1} \left(\frac{1}{q+1} v - e\right). \end{aligned}$$

Si la pluralité doit être de cinq voix, nous trouverons, en employant la même méthode,

$$\text{Pour } 5 \text{ voix } \left\{ \begin{aligned} V^{q+1} - V^q &= v^{q-1} \cdot e^{q+3} \cdot \frac{2q+1}{q-1} \left(\frac{q-1}{q+3} v - e \right) \\ V^q &= 1 + 0 + \left(\frac{1}{0}\right)e^2(-e) + \left(\frac{1}{1}\right)ve^3 \cdot \left(\frac{1}{2}v - e\right) \\ &\quad + \left(\frac{2}{2}\right)v^2e^6 \left(\frac{2}{6}v - e\right) \dots + \frac{2q-1}{q-2} v^{q-2} e^{q+2} \cdot \left(\frac{q-2}{q+2} v - e\right) \end{aligned} \right.$$

& ainsi de suite.

$$\text{Pour } 7 \text{ voix } \left\{ \begin{aligned} V^{q+1} - V^q &= v^{q-2} e^{q+4} \cdot \frac{2q+1}{q-2} \left(\frac{q-2}{q+4} v - e \right) \\ V^q &= 1 + 0 + 0 + \left(\frac{1}{0}\right)e^6(-e) + \left(\frac{2}{1}\right)ve^7 \left(\frac{1}{7}v - e\right) + \left(\frac{2}{2}\right)v^2e^8 \cdot \left(\frac{2}{8}v - e\right) \\ &\quad + \frac{2q-1}{q-3} v^{q-3} e^{q+3} \cdot \left(\frac{q-3}{q+3} v - e\right) \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

$$\text{Et en général pour } 2q'+1 \text{ voix, } \left\{ \begin{aligned} V^{q+1} - V^q &= v^{q-q'+1} e^{q+q'+1} \cdot \frac{2q+1}{q-q'+1} \left(\frac{q-q'+1}{q+q'+1} v - e \right) \\ V^q &= 1 + 0 + 0 \dots + \frac{2q'-1}{0} e^{2q'}(-e) + \frac{2q'+1}{1} e^{2q'+1} v \left(\frac{1}{2q'+1} v - e \right) \\ &\quad + \frac{2q'+3}{2} e^{2q'+2} v^2 \cdot \left(\frac{2}{2q'+2} v - e \right) \dots + \frac{2q-1}{q-q'} v^{q-q'} e^{q+q'} \left(\frac{q-q'}{q+q'} v - e \right) \end{aligned} \right.$$

Si maintenant nous examinons ces formules, nous trouverons ; 1.° que tant que $q < q'$, V^q sera toujours l'unité, ce qui est évident par soi-même, puisqu'il est clair que si, par exemple, une assemblée n'est composée que de cinq Votans, la pluralité de sept voix est impossible, & qu'ainsi il est sûr que la vérité ne sera point condamnée par une pluralité de sept voix.

2.° Que si $q = q'$, on a nécessairement un terme négatif, qui est toujours $e^{2q'+1}$. En effet, dans cette hypothèse, il n'y auroit qu'un cas où la vérité pût être condamnée à la pluralité de $2q' + 1$ ou $2q + 1$ voix, c'est celui où l'unanimité seroit pour l'erreur ; ainsi dans ce cas, $V^q = 1 - e^{2q'+1}$.

3.° Dans le cas où $q > q'$, on aura toujours à retrancher de 1 le terme $e^{2q'+1}$, & ensuite les termes multipliés

successivement par $\frac{1}{2q+1} v - e$, $\frac{2}{2q+2} v - e$, $\frac{3}{2q+3} v - e$, ...
 jusqu'à $\frac{q-q'}{q+q'} v - e$, tant que ces coefficients resteront négatifs.
 Or $v > e$, & q' étant un nombre donné, il est clair qu'on
 pourra toujours augmenter q , jusqu'à faire en sorte que
 $\frac{q-q'}{q+q'} v - e$ soit positif. La valeur de V^q , continuera
 donc toujours à décroître depuis la valeur de $1 - e^{2q'+1}$
 jusqu'au terme où les $\frac{q''}{2q'+q''} v - e$ commenceront à de-
 venir positifs, & elle augmentera ensuite; en sorte que la plus
 grande valeur de q , pour laquelle $\frac{q-q'}{q+q'} v - e$ est négatif,
 ou, ce qui revient au même, la plus grande valeur de
 $q < \frac{q'}{v-e}$ ou $\frac{q'}{1-2e}$ est celle pour laquelle V^q a la moindre
 valeur possible. Ainsi supposant, par exemple, qu'on
 exige une pluralité de sept voix, & que $e = \frac{1}{3}$, nous
 aurons $\frac{q'}{v-e} = 9$, & V^q le plus petit possible lorsque le
 nombre des Votans est 19. Soit dans la même hypothèse
 $e = \frac{1}{10}$, nous aurons $\frac{q'}{v-e} = \frac{30}{8}$, & la plus petite
 valeur de V^q répondra à $q = 3$; ainsi dans ce cas la série sera
 toujours croissante, & en multipliant le nombre des Votans,
 V^q deviendra toujours plus grand, tandis que dans la pre-
 mière hypothèse, 7 Votans donneront V^q plus grand que 9,
 9 que 11, 11 que 13, & ainsi de suite jusqu'à 19; & qu'il
 faudroit ensuite multiplier les Votans au-delà de 21 pour
 avoir V^q plus grand que dans le cas de 7 Votans.

Ainsi lorsque v , e & q' sont donnés, on voit que plus v & e
 approchent de l'égalité, plus le terme où la valeur de V^q est
 la plus petite s'éloigne; de manière qu'on ne peut espérer une
 probabilité

probabilité plus grande que celle qui résulte de l'unanimité, & par conséquent du cas où $q = q'$, à moins de prendre q très-grand.

4.° Appellant V_1^q, V_1^{q-1} les termes qu'il faut ajouter à V^{q-1} pour avoir V^q , & à V^{q-2} pour avoir V^{q-1} ; si on considère la série précédente, on trouvera

$$+ V_1^q = V_1^{q-1} \cdot ve \frac{2q-1 \cdot 2q-2}{q-d \cdot q+d-1} \left[\frac{(q-d)v - (q+d)e}{(q-d-1)v - (q+d-1)e} \right] \frac{q+d-1}{q+d}$$

$$= V_1^{q-1} \cdot ve \frac{2q-1 \cdot 2q-2}{q-d \cdot q+d} \frac{(q-d)v - (q+d)e}{(q-d-1)v - (q+d-1)e}$$

Or, en examinant cette formule, il est aisé de voir que plus q augmente, plus le terme $\frac{(q-d)v - (q+d)e}{(q-d-1)v - (q+d-1)e}$ approche de l'unité; que plus q augmente, plus le terme $\frac{2q-1 \cdot 2q-2}{(q-d)(q+d)}$ approche d'être égal à 4, ou moindre que 4; or ve est $<$ que $\frac{1}{4}$; donc on pourra toujours prendre q assez grand pour que la série devienne convergente. On trouvera également qu'entre les termes positifs, si on fait $V_1^q = V_1^{q-1} Q$, c'est pour les deux premiers termes que Q sera le plus grand, & qu'il décroîtra ensuite jusqu'à devenir moindre que 1; que pour les termes négatifs, à mesure que q augmente, Q diminuera également, & deviendra toujours $<$ 1 avant que les termes passent du négatif au positif.

5.° La valeur de V^q , lorsque q est $\frac{1}{2}$, peut être mise sous la forme

$$+ 1 - e^{2q'+1} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2q'+1}{1} ve + \frac{2q'+3}{2} (ve)^2 + \frac{2q'+5}{3} (ve)^3 \dots \dots \dots \\ - v^2 \cdot \left[1 + \frac{2q'+3}{1} ve + \frac{2q'+5}{2} (ve)^2 + \frac{2q'+7}{3} (ve)^3 \dots \dots \right] \end{array} \right\}$$

& nous trouverons que appellant ve, z , nous aurons la première série en ev ou z égale à $\frac{2^{2q'-1}}{[1 + \sqrt{1-4z}]^{2q'} \cdot -\sqrt{1-4z}}$, d'où nous tirerons pour valeur de V^q

$$1 - e^{2q'+1} \left[\frac{1}{(2v-1)v^{2q'-1}} - \frac{v^2}{(2v-1)v^{2q'+1}} \right] = 1e$$

C

Dans le cas où nous chercherions la valeur de E^q , nous aurions

$$E^q = 1 - v^{2q'+1} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2q'+1}{1} ve + \frac{2q'+3}{2} (ve)^2 + \frac{2q'+5}{3} (ve)^3 \dots \\ -e^2 \cdot \left[1 + \frac{2q'+3}{1} ve + \frac{2q'+5}{2} ve^2 + \frac{2q'+7}{3} (ve)^2 \dots \right] \end{array} \right\}$$

$$= 1 - v^{2q'+1} \cdot \left[\frac{1}{(2v-1)v^{2q'-1}} - \frac{e^2}{(2v-1) \cdot v^{2q'+1}} \right] = 1 - v^2 \cdot \frac{1 - \frac{e^2}{v^2}}{2v-1} = 0;$$

d'où il résulte que quel que soit q' , pourvu que $v > e$, plus on augmentera q , plus V^q approchera de l'unité; & que lorsque l'on aura $e > v$, alors V^q , qui devient ce qu'est ici E^q , approchera de 0 à mesure que l'on augmentera la grandeur de q .

La sommation directe de cette série seroit peut-être assez compliquée, mais voici une méthode indirecte très-simple; il est évident que puisque lorsque $q' = 0$, $V^q = 1$, on aura à plus forte raison $V^q = 1$ lorsque q' est un nombre entier. Donc si Z est la somme cherchée, on aura

$Z - v^2 (Z + \Delta Z) = 0$, en prenant q' pour variable, & $\Delta q' = 1$; résolvant cette équation, & déterminant l'arbitraire d'après la valeur connue de Z lorsque $q' = 0$, on aura la

valeur ci-dessus. De même on aura $Z - \frac{v^2 \int \frac{\partial Z}{\partial z} z^{q'} dz}{z^{q'+1}} = 0$, qui donnera encore la même valeur de Z .

Si l'on suppose $v = e$, les valeurs précédentes paroissent donner, l'une $V^q = 1$, & l'autre $E^q = 0$, quoique ces quantités deviennent alors la même chose & doivent être égales. Pour avoir donc la valeur de V^q dans ce cas, nous reprendrons la formule ci-dessus, qui devient, à cause de $v^2 = ev$,

$$1 - e^{2q'+1} \left[1 + 2q' \cdot ve + \frac{1}{2} 2q' \cdot \frac{2q'+3}{1} ev^2 + \frac{1}{3} 2q' \cdot \frac{2q'+5}{2} (ev)^3 \dots \right]$$

Or il est aisé de voir que la série précédente peut se mettre sous la forme

$$1 + 2q' \cdot \left[ve + \frac{1}{2} \frac{2q'+3}{1} ve^2 + \frac{1}{3} \frac{2q'+5}{2} (ve)^3 \dots \right]$$

$= 1 + 2q' \int \cdot [1 + \frac{2q'+3}{1} ve + \frac{2q'+5}{2} ve^2 \dots] \partial(ve)$,
 en supposant l'intégrale égale à zéro lorsque $ve = 0$.

Or, d'après ce que nous avons dit ci-dessus,

$$1 + \frac{2q'+3}{1} ve + \frac{2q'+5}{2} ve^2 \dots = \frac{2^{2q'+1}}{(1-4ev)^{\frac{1}{2}} [1+\sqrt{1-4ev}]^{2q'+1}}$$

$$\& \int [1 + \frac{2q'+3}{1} ve + \frac{2q'+5}{2} ve^2 \dots] \partial(ve) = \int \frac{2^{2q'+1} \partial(ev)}{(1-4ev)^{\frac{1}{2}} [1+\sqrt{1-4ev}]^{2q'+1}}$$

$$= \frac{2^{2q'}}{[1+\sqrt{1-4ev}]^{2q' \cdot 2q'}} + C; \& \text{ comme lorsque } ev = 0,$$

l'intégrale doit être 0, on aura $C = -\frac{1}{2^{2q'}}$, & par conséquent $V^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; d'où l'on voit qu'en général q' restant le même, on peut, en multipliant les Votans, approcher aussi près qu'on voudra de la certitude lorsque $v > e$, que lorsque $e > v$ au contraire, en multipliant le nombre des Votans, on diminue continuellement de la probabilité; que lorsque $v = e$, la probabilité diminue, mais seulement jusqu'à un certain terme, en sorte qu'elle se réduit à $\frac{1}{2}$. On auroit pu avoir également la valeur de $V^{\frac{1}{2}}$, en observant comme ci-dessus, que si on augmente dans son expression v d'une quantité ∂v , on a $V + \partial V = 1$; que si on diminue v d'une quantité ∂v , on a $V - \partial V = 0$, d'où $V = \frac{1}{2}$.

La quantité V^q est ici l'expression de la probabilité que la décision à la pluralité de $2q' + 1$ voix ne sera pas contraire à la vérité, & l'on voit qu'en augmentant $2q' + 1$, on peut, quelque petit que soit l'excès de v sur e , avoir une grande valeur de V^q , sans rendre $2q' + 1$ excessivement grand, mais cela ne suffit pas ici. En effet, il faut de plus avoir une grande probabilité que l'on aura une décision contraire à l'erreur & conforme à la vérité, c'est-à-dire qu'il faudra que E^q soit très-petit en même-temps que V^q sera très-grand; c'est ce qu'il sera toujours possible d'obtenir quel que soit q' , en rendant q très-grand, puisque nous avons trouvé pour $q = \frac{1}{2}$, $V^q = 1$, $E^q = 0$. Mais dans la pratique, q est nécessairement renfermé dans des limites étroites, &

nous avons vu que toutes les fois que soit $\frac{v}{2q'+1} - e$, soit un certain nombre de termes $\frac{v}{2q'+1} - e, \frac{v}{2q'+1} - e, \dots$ sont négatifs, on peut être obligé de prendre q très-grand pour avoir V^q plus grand que dans le cas de $q = q'$, tandis qu'au contraire E^q diminue continuellement, $1 - E^q$ étant toujours cependant plus petit que V^q . D'un autre côté il est aisé de voir que plus on augmentera q' , q restant le même, ainsi que v & e , plus aussi V^q augmentera, mais que E^q augmentera aussi; de manière qu'il faudra avoir q très-grand si q' l'est, pour que les deux conditions de V^q & de $1 - E^q$, tous deux très-grands, puissent être remplies tant que v ne sera pas beaucoup plus grand que e . Ainsi lorsque l'on suppose q donné ou restreint dans des limites nécessaires, on ne pourra souvent, en augmentant q' , remplir une des conditions qu'au détriment de l'autre, à moins que v ne soit beaucoup plus grand que e ; c'est-à-dire qu'à moins de multiplier le nombre des Votans, on ne pourra s'assurer de décisions conformes à la vérité si la probabilité que chacun d'eux trouvera la vérité, n'est pas déjà assez grande.

On auroit pu chercher immédiatement la probabilité que la décision en faveur de la vérité, l'emporteroit de $2q' + 1$. En effet, appelant V'^q cette probabilité, elle est

$$v^{2q'+1} + (2q' + 1)v^{2q'}e + \frac{2q'+1}{2}v^{2q-1}e^2 \dots + \frac{2q'+1}{q-q'}v^{q+q'+1}e^{q-q'}$$

$$V'^{q+1} = v^{2q+3} + (2q' + 3)v^{2q+2}e \dots + \frac{2q'+3}{q+1-q'}v^{q+q'+2}e^{q-q'+2} \dots$$

or multipliant V'^q par $(v + e)^2 = 1$, il devient égal à

$$V'^{q+1} + \frac{2q'+1}{q-q'}v^{q+q'+1}e^{q-q'+2} = \frac{2q'+1}{q-q'+1}v^{q+q'+2}e^{q-q'+2}$$

on aura $V'^{q+1} - V'^q = \left(\frac{2q'+1}{q-q'+1}v - \frac{2q'+1}{q-q'}e \right) v^{q+q'+1}e^{q-q'+2}$

$$= \frac{2q'+1}{q-q'}v^{q+q'+1}e^{q-q'+1} \left(\frac{q+q'+1}{q-q'+1}v - e \right);$$

d'où il résulte que le terme qu'il faut ajouter à V'^{q-1} pour avoir V'^q ,

$$\text{sera } \frac{2q-1}{q-q'+1}v^{q+q'}e^{q-q'} \left(\frac{q+q'}{q-q'}v - e \right)$$

& V'^q sera exprimé par la formule

$$v^{2q'+1} + v^{2q'+1}e \left(\frac{2q'+1}{1}v - e \right) + \frac{2q'+3}{1}v^{2q'+3}e^2 \left(\frac{2q'+2}{2}v - e \right) \\ + \frac{2q'+5}{2}v^{2q'+5}e^3 \left(\frac{2q'+3}{3}v - e \right) \dots + \frac{2+q}{q-q'-1}v^{q+q'}e^{q-q'} \left(\frac{q+q'}{q-q'}v - e \right) \\ \text{ou } v^{2q'+1} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{2q'+1}{1}ve + \frac{2q'+3}{2}(ve)^2 + \frac{2q'+5}{3}(ve)^3 \dots + \frac{2q'-1}{q-q'}(ve)^{q-q'} \\ - e^2 \left[1 + \frac{2q'+3}{1}ev \dots \dots \dots + \frac{2q'-1}{q-q'-1}(ev)^{q-q'-1} \right] \end{array} \right\}$$

La première formule indique que $V^{q'}$ va toujours en croissant après être resté zéro tant que $q < q'$, & on tirera de la seconde les mêmes résultats pour $q = \frac{1}{2}$ que ceux qu'on a tirés de la formule V^q ci-dessus, les séries y étant précisément de la même forme.

Nous avons vu ci-dessus qu'il falloit distinguer pour la probabilité, le cas de la décision à rendre & celui d'une décision déjà formée, & pour laquelle on connoît la pluralité à laquelle elle a été rendue, Dans ce dernier cas, supposons ici la décision rendue à la pluralité de r voix contre r' , & que $r - r' > = 2q' + 1$, nous aurons le nombre de combinaisons pour v , exprimé par $\frac{2q'+1}{r} v^r e^{r'}$, & celui des combinaisons pour e , exprimé par $\frac{2q'+1}{r'} v^{r'} e^r$, & comme

$$\frac{2q'+1}{r} = \frac{2q'+1}{r'} \text{ puisque } r + r' = 2q' + 1, \text{ la pro-}$$

$$\text{babilité pour } v, \text{ sera exprimée par } \frac{v^r e^{r'}}{v^r e^{r'} + v^{r'} e^r} = \frac{v^{r-r'}}{v^{r-r'} + e^{r-r'}}$$

$$\text{\& la probabilité pour } e, \text{ exprimée par } \frac{e^{r-r'}}{v^{r-r'} + e^{r-r'}}. \text{ Ainsi dans}$$

ce cas, la plus petite probabilité en faveur de v , celle qui a lieu lorsque $r - r' = 2q' + 1$, sera $\frac{v^{2q'+1}}{v^{2q'+1} + e^{2q'+1}}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{e^{2q'+1}}{v^{2q'+1}}}; \text{ d'où il résulte que, pour avoir dans tous}$$

les cas une grande probabilité que la décision n'a pas été contre v , il faudra que $\frac{e^{2q'+1}}{v^{2q'+1}}$ soit très-petit, ce qui

demande ou v beaucoup plus grand que e , ou $2q' + 1$ très-grand. Or nous venons de voir que $2q' + 1$ très-grand exigeoit, pour satisfaire aux autres conditions, que q fût aussi très-grand; donc comme q est assujetti en général à des limites assez étroites, il faudra, pour remplir les conditions, chercher à avoir v le plus grand possible par rapport à e .

Supposons maintenant la décision rendue à la pluralité de r contre r' , $r - r' < 2q' + 1$, les combinaisons en faveur de v seront toujours $\frac{2q'+1}{r} v^r e^{r'}$, & celles en faveur de e

$\frac{2q'+1}{r'} v^{r'} e^r$; la probabilité pour v , $\frac{v^{r-r'}}{v^{r-r'} + e^{r-r'}}$, celle pour e

$\frac{e^{r-r'}}{v^{r-r'} + e^{r-r'}}$. Comme la décision se prononce toujours dans cette hypothèse pour le parti qui a le moins d'inconvéniens (voyez ci-dessus pages 11 & suiv.), elle peut être conforme à la pluralité, ou ne pas y être conforme. Si la décision est conforme au vœu de la pluralité, dans ce cas la probabilité de la vérité

de la décision sera $\frac{v^{r-r'}}{v^{r-r'} + e^{r-r'}}$, & la plus petite possible

lorsque $r - r' = 1$, où elle devient $\frac{v}{v+e} = v$. Si la décision est contraire au vœu de la pluralité, alors la probabilité que la décision sera vraie, sera exprimée par

$\frac{e^{r-r'}}{v^{r-r'} + e^{r-r'}}$, & la plus petite possible lorsque $r - r' = 2q' - 1$,

où elle devient $\frac{e^{2q'-1}}{v^{2q'-1} + e^{2q'+1}}$; dans ce cas, la plus grande

probabilité que la décision est erronée, est donc

$\frac{v^{2q'-1}}{v^{2q'-1} + e^{2q'+1}} = \frac{v^{2q'-1}}{1 + \frac{e^{2q'+1}}{v^{2q'-1}}}$; mais il suit des principes dé-

veloppés ci-dessus, que nous avons supposé qu'une probabilité

$\frac{1}{1 + \frac{e^{2q'+1}}{v^{2q'+1}}}$ suffisoit pour admettre cette même décision que

nous rejetons lorsqu'elle n'a que la probabilité $\frac{1}{1 + \frac{e^{2q'-1}}{v^{2q'-1}}}$;

il faut donc que ces deux probabilités diffèrent d'une manière très-sensible, ce qui demande encore v beaucoup plus grand que e .

Supposons, par exemple, $2q + 1 = 13$, $2q' + 1 = 5$,
 $v = \frac{9}{10}$, $e = \frac{1}{10}$, nous aurons d'abord V^2 très-peu
différent de l'unité, $V^{13} > \frac{98}{100}$, $\frac{1}{1 + \frac{e^{2q'+1}}{v^{2q'+1}}} = \frac{59049}{59050}$,

$\frac{1}{1 + \frac{e^{2q'-1}}{v^{2q'-1}}} = \frac{729}{730}$, c'est-à-dire, que si nous supposons

un Tribunal de treize Juges, qu'on exige la pluralité de cinq au moins pour condamner un accusé, par exemple, & qu'on suppose que la probabilité que chacun décidera conformément à la vérité, soit $\frac{9}{10}$, on aura une probabilité presque égale à la certitude, qu'aucun innocent ne sera condamné, une probabilité environ $\frac{98}{100}$ qu'un coupable ne sera pas renvoyé ; la probabilité $\frac{729}{730}$ seulement qu'un homme renvoyé avec la pluralité de quatre voix contre lui, est vraiment coupable, & la probabilité $\frac{59049}{59050}$ que celui qui est condamné par la pluralité de cinq voix seulement, n'est pas innocent.

Si on suppose $2q + 1 = 3$ seulement, mais $v = \frac{99}{100}$,

alors on aura $\frac{1}{1 + \frac{e^{2q'+1}}{v^{2q'+1}}} = \frac{970299}{970300}$, $\frac{1}{1 + \frac{e^{2q'-1}}{v^{2q'-1}}} = \frac{99}{100}$; V'^q

différent à peine de l'unité, même lorsque le nombre des Votans n'est que 5, & $V'^q > \frac{99997}{100000}$ lorsque le nombre des Votans est 7.

Ce dernier exemple montre avec quelle facilité, lorsque v est très-grand par rapport à e , on peut remplir toutes les conditions que peuvent exiger la justice & l'intérêt public.

Concluons en général des formules précédentes, que toutes les fois qu'on voudra composer d'une manière avantageuse un Tribunal de cette espèce, il faudra, 1.^o déterminer la pluralité $2q' + 1$, en sorte que la probabilité

$\frac{1}{1 + \frac{e^{2q'+1}}{v^{2q'+1}}}$ soit assez grande pour être, même dans les

décisions les plus importantes, regardée comme suffisante pour former un jugement; 2.^o trouver, s'il est possible, des hommes assez éclairés pour que $\frac{1}{1 + \frac{e^{2q'-1}}{v^{2q'-1}}}$ ne soit pas fort

grand; 3.^o prendre q assez grand pour que la probabilité V'^q soit fort grande; 4.^o le prendre aussi assez grand pour que V^q donne une probabilité très-approchant de la certitude. Le dernier exemple remplit parfaitement toutes ces conditions; le premier les remplit aussi & donne une sûreté suffisante.

On voit de-là d'une manière évidente, que dans cette hypothèse, dans cette manière de former les décisions, il n'est pas toujours facile, ni même possible, de trouver dans le nombre de Votans, dans la grande pluralité qu'on peut exiger, des moyens de réunir les mêmes avantages qui s'offrent d'eux-mêmes lorsque ces Votans sont des hommes très-éclairés.

Nous allons passer maintenant au cas où le nombre des Votans est supposé pair.

TROISIÈME

TROISIÈME HYPOTHÈSE.

Le nombre des Votans est ici $2q$, & on exige la probabilité de 2, 4, 6..... $2q'$ voix.

Conservant toujours les mêmes dénominations, nous aurons ici,

pour 2 voix $V^q = v^{2q} + 2q \cdot v^{2q-1}e \dots + \frac{2q}{q} v^q e^q$

pour 4 voix $V^q = v^{2q} + 2q \cdot v^{2q-1}e \dots + \frac{2q}{q+1} v^{q-1} e^{q+1}$

.....
 pour $2q'$ voix $V^q = v^{2q} + 2q \cdot v^{2q-1}e \dots + \frac{2q}{q+q'-1} v^{q-q'+1} e^{q+q'-1}$

pour 2 voix $V^{q+1} - V^q = v^q e^{q+1} \frac{2q}{q} \left(\frac{q}{q+1} v - e \right)$

pour 4 voix $V^{q+1} - V^q = v^{q-1} e^{q+2} \frac{2q}{q+1} \left(\frac{q-1}{q+2} v - e \right)$

.....
 pour $2q'$ voix $V^{q+1} - V^q = v^{q-q'+1} e^{q+q'} \frac{2q}{q+q'-1} \left(\frac{q-q'+1}{q+q'} v - e \right)$

pour 2 voix $V^q = 1 - e^2 + \left(\frac{2}{1}\right) v e^2 \left(\frac{1}{2} v - e\right) + \left(\frac{4}{2}\right) v^2 e^3 \left(\frac{2}{3} v - e\right) + \left(\frac{6}{3}\right) v^3 e^4 \left(\frac{3}{4} v - e\right) \dots + \frac{2q-2}{q-1} v^{q-1} e^{q+1} \left(\frac{q-1}{q} v - e\right)$

pour 4 voix $V^q = 1 + 0 - e^4 + \left(\frac{4}{3}\right) v e^4 \left(\frac{1}{4} v - e\right) + \left(\frac{6}{4}\right) v^2 e^5 \left(\frac{2}{5} v - e\right) + \left(\frac{8}{5}\right) v^3 e^6 \left(\frac{3}{6} v - e\right) \dots + \frac{2q-2}{q} v^{q-2} e^{q+1} \left(\frac{q-2}{q+1} v - e\right)$

.....
 pour $2q'$ voix $V^q = 1 + 0 + 0 \dots - e^{2q'} + \frac{2q'}{2q'-1} v e^{2q'} \left(\frac{1}{2q'} v - e\right)$

$+ \frac{2q'+2}{2q'} v^2 e^{2q'+1} \left(\frac{2}{2q'+1} v - e\right) \dots + \frac{2q'-2}{q+q'-2} v^{q-q'} e^{q+q'-1} \left(\frac{q-q'}{q+q'-1} v - e\right)$,

ou $V^q = 1 + 0 + 0 \dots - e^{2q'} + \frac{2q'}{1} v e^{2q'} \left(\frac{1}{2q'} v - e\right) + \frac{2q'+2}{2} v^2 e^{2q'+1} \left(\frac{2}{2q'+1} v - e\right) \dots + \frac{2q'-2}{q-q'} v^{q-q'} e^{q+q'-1} \left(\frac{q-q'}{q+q'-1} v - e\right)$

D.

Dans le cas de $q = \frac{1}{2}$, la valeur de V sera représentée par la série

$$1 - e^{-2q'} \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{2q'}{1} ve + \frac{2q'+2}{2} (ve)^2 + \frac{2q'+4}{3} (ve)^3 \dots \dots \dots \\ &- v^2 \cdot [1 + \frac{2q'+2}{1} ve + \frac{2q'+4}{2} (ve)^2] \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

& par conséquent, à cause de $1 + \frac{2q'}{1} ve + \frac{2q'+2}{2} (ve)^2 + \dots$

$$= \frac{2^{2q'-2}}{[1 + \sqrt{(1-4ev)}]^{2q'-2} \sqrt{(1-4ev)}}, \text{ nous aurons}$$

$$V = 1 - e^{-2q'} \left[\frac{1}{(2v-1) \cdot v^{2q'-2}} - \frac{v^2}{(2v-1) \cdot v^{2q'}} \right] = 1,$$

$$E = 1 - v^{2q'} \left[\frac{1}{(2v-1) \cdot v^{2q'-2}} - \frac{e^2}{(2v-1) \cdot v^{2q'}} \right] = 0;$$

& dans le cas de $v = e$, $V = E = \frac{1}{2}$, comme par le cas de la pluralité impaire; en sorte que l'on aura exactement des conclusions absolument semblables à celles que l'on a trouvées pour le cas de la pluralité impaire.

On trouvera de même

pour 2 voix, $V'^q = v^2 + v^2 e(2v - e) \dots + \frac{2q-2}{q-2} v^q e^{q-2} (\frac{q}{q-1} v - e)$

pour 4 voix, $V'^q = v^4 + v^4 e(4v - e) \dots + \frac{2q-2}{q-3} v^{q+2} e^{q-2} (\frac{q+1}{q-2} v - e)$

.....
pour $2q'$ voix, $V'^q = v^{2q'} + v^{2q'} e(2q'v - e) \dots + \frac{2q-2}{q-q'-1} v^{q+q'-1} e^{q-q'} (\frac{q+q'-1}{q-q'} v - e)$

& dans le cas de $q = \frac{1}{2}$, $V'^q = 1$ si $v > e$, $V'^q = 0$ si $v < e$, $V'^q = \frac{1}{2}$ si $v = e$; & en général on tirera de ces formules les mêmes conclusions que celles qui ont été tirées des formules pour les nombres impairs.

La seule différence entre ces deux hypothèses, est que dans la première la pluralité est toujours exprimée par un nombre impair, & dans la seconde par un nombre pair. Il

en résulte dans celle-ci la possibilité du cas où il n'y a aucune décision ; ainsi cette troisième hypothèse répond exactement à la seconde, parce qu'elle renferme toujours la possibilité de ne pas avoir la pluralité exigée.

Lorsque le nombre des Votans n'est pas fixé par une loi, & qu'il peut être pair ou impair, il résulte de la comparaison de ces deux hypothèses, des conséquences importantes, que nous discuterons dans la seconde & dans la quatrième Partie de cet Ouvrage.

Au lieu de demander seulement la pluralité d'un nombre déterminé de voix, on peut demander la pluralité d'une certaine partie aliquote du nombre total, & ces hypothèses peuvent se varier à l'infini.

Par exemple, soit $3q$ le nombre des Votans, on peut exiger une pluralité de q , de $q + 1$ voix, ou plus généralement de $q + q'$ voix. Il en sera de même pour les nombres $3q + 1$, $3q + 2$ de Votans.

Et généralement si le nombre de Votans est exprimé par $(m + n) \cdot q + q'$, q' étant $< m + n$, on pourra demander en général une pluralité de $nq + q'$ voix. Nous allons examiner quelques-unes de ces hypothèses.

QUATRIÈME HYPOTHÈSE.

Le nombre des Votans est $3q$, ou $3q + 1$, ou $3q + 2$, & la pluralité est q , $q + 1$, $q + q'$.

Soit d'abord q la pluralité. En conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, & marquant par (0), (1), (2) les équations appartenantes aux hypothèses de $3q$, $3q + 1$, $3q + 2$ Votans, nous aurons les formules suivantes.

$$(0) V^q = v^{3q} + 3q v^{3q-1} e \dots \dots \dots + \frac{3q}{2q-1} v^{q+1} e^{2q-1}$$

$$(1) V^q = v^{3q+1} + (3q+1) \cdot v^{3q} e \dots \dots \dots + \frac{3q+1}{2q} v^{q+1} e^{2q}$$

$$(2) V^q = v^{3q+2} + (3q+2) \cdot v^{3q+1} \dots \dots \dots + \frac{3q+2}{2q} v^{q+2} e^{2q}$$

D ij

Maintenant, pour comparer V^{q+1} avec V^q dans le premier cas, nous partons de la supposition, que $V^q \cdot (v + e)^3 = V^q$, & que $\frac{3q+3}{r} = \frac{3q}{r} \left(\frac{2}{0}\right) + \frac{3q}{r-1} \left(\frac{1}{1}\right) + \frac{3q}{r-2} \left(\frac{2}{2}\right) + \frac{3q}{r-3} \left(\frac{3}{3}\right)$. En effet, il est aisé de voir que dans $(v + e)^{3q+3} = (v + e)^{3q} (v + e)^3$, le coefficient $\frac{3q+3}{r}$ de $v^{3q+3} e^r$ ne peut être formé que par ces termes.

Cela posé, il est clair que l'on aura, 1.° $\frac{3q+3}{2q+1} = \frac{3q}{2q+1} + \frac{3q}{2q} 3 + \frac{3q}{2q-1} 3 + \frac{3q}{2q-2}$, & il sera aisé de voir que les deux premiers termes de cette fonction n'entrent pas dans (o) $V^q \cdot (v + e)^3$. 2.° $\frac{3q+3}{2q} = \frac{3q}{2q} + \frac{3q}{2q-1} 3 + \frac{3q}{2q-2} 3 + \frac{3q}{2q-3}$; & il est clair que le premier terme $\frac{3q}{2q}$ n'entrera point dans (o) $V^q \cdot (v + e)^3$. 3.° que le terme $\frac{3q}{2q-1} v^{q+1} e^{2q+2}$, qui se trouve dans (o) $V^q \cdot (v + e)^3$, n'entre pas dans (o) V^{q+1} . Nous aurons donc (o) $V^{q+1} - V^q = \frac{3q}{2q+1} v^{q+2} e^{2q+3} + \frac{3q}{2q} 3 v^{q+2} e^{2q+3} + \frac{3q}{2q} v^{q+3} e^{2q} - \frac{3q}{2q-1} v^{q+1} e^{2q+2}$, où $V^{q+1} - V^q = \frac{3q}{2q} v^{q+1} e^{2q} [v^2 + (3 + \frac{q}{2q+1}) ev - \frac{2q}{q+1} e^2] = \frac{3q}{q} v^{q+1} e^{2q} [v^2 + (3 + \frac{q}{2q+1}) \cdot ve - \frac{2q}{q+1} e^2]$, d'où nous tirerons (o) $V^q = v(v^2 + 3ve) + 3v^2 e^2 [v^2 + (3 + \frac{1}{3}) \cdot ve - \frac{2}{3} e^2] + (\frac{6}{2}) v^3 e^4 [v^2 + (3 + \frac{2}{3}) \cdot ve - \frac{4}{3} e^2] \dots + \frac{3q-3}{q-1} v^q e^{2q-2} [v^2 + (3 + \frac{q-1}{2q-1}) ve - \frac{2q-2}{q} e^2]$. Nous aurons donc, 1.° V^q toujours croissant lorsque $v > e$.

puisque $3ve > \frac{2q-2}{q}e^2$, & qu'ainsi les termes à ajouter pour former V^q sont tous positifs; 2.° cette série fera toujours convergente. En effet, appelant V_1^q & V_1^{q-1} les termes qu'il faut ajouter à V^{q-1} pour avoir V^q , & à V^{q-2} pour avoir V^{q-1} , nous avons

$$V_1^q = V_1^{q-1}Q = V_1^{q-1} \cdot e^2 v \cdot \frac{(3q-3) \cdot (3q-4) \cdot (3q-5)}{(q-1) \cdot (2q-1) \cdot (2q-2)} \cdot \frac{v^2 + (3 + \frac{q-1}{2q-1}) \cdot ve - \frac{2q-2}{q} e^2}{v^2 + (3 + \frac{q-2}{2q-3}) \cdot ve - \frac{2q-4}{q-1} e^2};$$

d'où il est aisé de tirer $e^2 v < \frac{1}{8} \cdot \frac{(3q-3) \cdot (3q-4) \cdot (3q-5)}{(q-1) \cdot (2q-1) \cdot (2q-2)} < \frac{27}{4}$;

& quant au dernier facteur de Q , on voit qu'il sera toujours

plus petit que $\frac{3 + \frac{q-1}{2q-1}}{3 + \frac{q-2}{2q-3}} < \frac{10}{9}$, & par conséquent $Q < \frac{30}{32}$;

3.° si $e > v$, nous trouverons d'abord que la différence entre

deux termes successifs $v^2 + (3 + \frac{q-1}{2q-1}) \cdot ve - \frac{2q-2}{q} e^2$,

& $v^2 + (3 + \frac{q-2}{2q-3}) \cdot ve - \frac{2q-4}{q-1} e^2$, est $(\frac{q-2}{2q-3} - \frac{q-1}{2q-1})ve$

$- (\frac{2q-4}{q-1} - \frac{2q-2}{q})e^2 = e[\frac{2}{q \cdot (q-1)}e - \frac{1}{(2q-1) \cdot (2q-3)}v]$,

quantité toujours positive dans l'hypothèse. Donc puisque ce terme est toujours de plus en plus petit, s'il est négatif pour une valeur de q , il le sera pour toutes les autres; & s'il ne l'est pas pour $q = \frac{1}{6}$, il sera toujours positif. Supposons donc $q = \frac{1}{6}$, il deviendra $v^2 + (3 + \frac{1}{2}) \cdot ve - 2e^2$ dont la limite est $v = \frac{1}{2}e$; tant que v sera plus grand, tous les termes seront positifs, mais si v est plus petit, ils deviendront négatifs à un certain terme, & continueront de l'être ensuite.

Prenons ensuite le cas, où même le second terme devient négatif, nous trouverons pour cela que $v^2 + \frac{10}{3}ev - e^2$

doit être négatif, ce qui n'arrivera que lorsque $v < \frac{\sqrt{(136)-10}}{6}e$.

Nous aurons donc, dans le cas où $v = > \frac{1}{3}$, la probabilité

augmentant sans cesse à mesure que q , c'est-à-dire le nombre des Votans augmente, & la probabilité diminuant toujours à mesure que q augmente, lorsque $v < \frac{\sqrt{136-10}}{\sqrt{136-4}}$, si ce n'est que dans le cas de l'égalité, la probabilité est la même pour $q = 1$, & $q = 2$. Pour les valeurs de v , contenues entre ces limites, la probabilité augmentera en augmentant le nombre des Votans pendant un certain espace, & diminuera ensuite.

Nous pouvons donc en tirer cette conséquence, que tant que la probabilité de la vérité pour chaque Votant ne sera pas au-dessous de $\frac{1}{3}$, alors plus on multiplierá le nombre des Votans, plus la probabilité que la vérité ne sera pas condamnée augmentera. Si au contraire cette probabilité de la décision de chaque Votant est au-dessous de $\frac{\sqrt{136-10}}{\sqrt{136-4}}$, ou au-dessous de 0,2168 à peu-près, alors plus on augmente le nombre des Votans, plus la probabilité que la vérité ne sera pas condamnée diminue; en sorte que le nombre de trois Votans est le plus favorable. Pour les cas intermédiaires, la dernière valeur de q , où ce terme est positif, est celle pour laquelle la probabilité de la vérité de la décision est la plus favorable. Soit donc fait $\frac{v}{c} = \epsilon$, nous aurons pour le nombre le plus favorable, la plus grande valeur de q , pour laquelle $\epsilon^2 + (3 + \frac{q-1}{2q-1})\epsilon - \frac{2q-2}{q}$, ou $q^2 \cdot (2\epsilon^2 + 7\epsilon - 4) - q \cdot (\epsilon^2 + 4\epsilon - 6) - 2 > 0$. Soit, par exemple, $\epsilon = \frac{1}{3}$, il faudra que $41q - 13q^2 - 18 > 0$, & 2 est la plus grande valeur de q qui répond à cette condition, Soit $\epsilon = \frac{4}{10}$, il faudra que $424q - 88q^2 - 200 > 0$, & nous trouverons que la plus grande valeur de q est 4, & ainsi de suite. Le premier cas donne $v = \frac{1}{4}$, & le second $v = \frac{2}{7}$. On trouvera de même, si une valeur de q est supposée connue, pour quelle valeur de v il peut y avoir du désa-

vantage à augmenter q au-delà de ce terme. Soit, par exemple, $q=100$, nous aurons $\epsilon^2 \cdot (2q^2 - q) + \epsilon \cdot (7q^2 - 4q) - (4q^2 - 6q + 2) > 0$, & dans cet exemple $\epsilon^2 \cdot 19900 + \epsilon \cdot 69600 - 39402 > 0$; d'où l'on voit que, pour qu'il n'y ait pas de désavantage à augmenter le nombre des Votans, il faut que ϵ soit $\frac{496}{1000}$ à peu-près, & v à peu-près $\frac{496}{1496}$, quantité qui diffère très-peu de $\frac{1}{3}$.

Dans le second des deux cas ci-dessus, ou (1) $V^q = v^{3q+1} + (3q+1) \cdot v^{2q}e \dots + \frac{3q+1}{2q} v^{q+1} e^{2q}$, si nous comparons $V^q \cdot (v+e)^3$ à $V^{q+1} = v^{3q+4} + (3q+4) \cdot v^{3q+3}e \dots + \frac{3q+4}{2q+2} v^{q+2} e^{2q+2}$, nous trouverons, 1.^o que, à cause de $\frac{3q+4}{2q+2} = \frac{3q+1}{2q+2} + 3 \frac{3q+1}{2q+1} + 3 \frac{3q+1}{2q} + \frac{3q+1}{2q-1}$, dont les deux premiers termes ne se trouvent pas dans $V^q \cdot (v+e)^3$, & de $\frac{3q+4}{2q+1} = \frac{3q+1}{2q+1} + 3 \frac{3q+1}{2q} + 3 \frac{3q+1}{2q-1} + \frac{3q+1}{2q-2}$, dont le premier terme ne se trouve pas non plus dans $V^q \cdot (v+e)^3$; V^{q+1} surpassera V^q des trois termes $\frac{3q+1}{2q+2} v^{q+2} e^{2q+2} + 3 \frac{3q+1}{2q+1} v^{q+2} e^{2q+2} + \frac{3q+4}{2q+1} v^{q+3} e^{2q+1}$; 2.^o que le terme $\frac{3q+1}{2q} v^{q+1} e^{2q+3}$ qui se trouve dans $V^q \cdot (v+e)^3$, ne se trouve pas non plus dans V^{q+1} , & qu'ainsi on aura $V^{q+1} - V^q = \frac{3q+1}{2q+2} v^{q+2} e^{2q+2} + 3 \frac{3q+1}{2q+1} v^{q+2} e^{2q+2} + \frac{3q+1}{2q+1} v^{q+3} e^{2q+1} - \frac{3q+1}{2q} v^{q+1} e^{2q+3}$, ou (1) $V^{q+1} - V^q = \frac{3q+1}{2q+1} v^{q+1} e^{2q+1} [v^2 + (3 + \frac{q}{2q+2}) \cdot ve - \frac{2q+1}{q+1} e^2]$, & par conséquent

$$(1) V^q = v + ve(v^2 + 3ev - e^2) + \left(\frac{1}{4}\right)v^2e^2 \\ [v^2 + (3 + \frac{1}{4}) \cdot ev - \frac{1}{2}e^2] \dots \dots + \frac{3q-2}{q-1} v^q e^{2q-2} \\ [v^2 + (3 + \frac{q-1}{2q}) \cdot ev - \frac{2q-1}{q} \cdot e^2] \text{ à cause de } \\ \frac{3q-2}{2q-1} = \frac{3q-2}{q-1}.$$

Si maintenant nous examinons cette série, nous trouverons que, si $v > e$, tous les termes seront positifs à cause de $3ev > \frac{2q-1}{q}e^2$; nous aurons de plus, comme ci-dessus,

$$V_1^q = V_1^{q-1} \times \frac{3q-2 \cdot 3q-3 \cdot 3q-4}{q-1 \cdot 2q-1 \cdot 2q-2} v e^2 \cdot \frac{v^2 + (3 + \frac{q-1}{2q}) \cdot ev - \frac{2q-1}{q} e^2}{v^2 + (3 + \frac{q-2}{2q-2}) \cdot ev - \frac{2q-3}{q-1} e^2}.$$

Or il est aisé de voir que le premier facteur est plus petit que $\frac{2q}{4}$, $ve^2 < \frac{1}{8}$, & le troisième terme $< \frac{1}{12}$; donc, comme ci-dessus, la série sera toujours convergente. Supposons maintenant $v < e$,

il est aisé de voir que $v^2 + (3 + \frac{q-1}{2q})ev - \frac{2q-1}{q}e^2$ diminuera à mesure que q augmentera; & que faisant $q = \frac{1}{0}$, il deviendra $v^2 + \frac{7}{2}ve - 2e^2$, comme ci-dessus, ce qui donne la même conclusion. Prenant ensuite le premier de ces termes $v^2 + 3ev - e^2$, nous trouverons qu'il devient négatif lorsque $v < \frac{\sqrt{13}-3}{\sqrt{13}-1}$, ce qui conduit aux mêmes conclusions que ci-dessus, excepté que la limite est différente, & à peu-près 0,2322. On peut faire ici les mêmes réflexions que ci-dessus; nous ne nous arrêterons pas à les développer. Passons enfin à la troisième hypothèse.

Nous aurons

$$\left\{ \begin{aligned} (2) V^q &= v^{3q+2} + (3q+2) \cdot v^{3q+1} e \dots + \frac{3q+2}{2q} v^{q+2} e^{2q} \\ (2) V^{q+1} &= v^{3q+3} + (3q+5) \cdot v^{3q+4} e \dots + \frac{3q+5}{2q+2} v^{q+3} e^{2q+2} \end{aligned} \right.$$

Maintenant, si nous comparons $V^q \cdot (v+e)^3$ à V^{q+1} , nous trouverons,

trouverons, 1.° que, à cause de $\frac{3q+5}{2q+2} = \frac{3q+2}{2q-1} + 3 \frac{3q+2}{2q}$
 $+ 3 \frac{3q+2}{2q+1} + \frac{3q+2}{2q+2}$, les deux derniers termes contenus
 dans V^{q+1} , ne se trouveront pas dans $V^q \cdot (v + e)^3$; que de
 même, à cause de $\frac{3q+5}{2q+1} = \frac{3q+2}{2q-2} + 3 \frac{3q+2}{2q-1} + 3 \frac{3q+2}{2q}$
 $+ \frac{3q+2}{2q+1}$, ce dernier terme se trouvera dans V^{q+1} , & ne
 se trouvera pas dans $V^q \cdot (v + e)^3$; 2.° que le terme
 $\frac{3q+2}{2q} v^{q+2} e^{2q+3}$, qui se trouve dans $V^q \cdot (v + e)^3$, ne se
 trouve pas dans V^{q+1} . Nous aurons donc

$$(2) V^{q+1} - V^q = \frac{3q+2}{2q+2} v^{q+3} e^{2q+2} + 3 \frac{3q+2}{2q+1} v^{q+3} e^{2q+2}$$

$$+ \frac{3q+2}{2q+1} v^{q+4} e^{2q+1} - \frac{3q+2}{2q} v^{q+2} e^{2q+3}, \text{ ou } (2) V^{q+1} - V^q$$

$$= \frac{3q+2}{2q+1} v^{q+2} e^{2q+1} \left[v^2 + \left(3 + \frac{q+1}{2q+2}\right) ev - \frac{2q+1}{q+2} e^2 \right];$$

d'où nous tirerons (2) $V^q = v^2 + 2v^2 e \left(v^2 + \frac{7}{2} ve - \frac{1}{2} e^2 \right)$
 $+ \left(\frac{5}{2} \right) v^3 e^2 \left(v^2 + \frac{7}{2} ve - e^2 \right) \dots + \frac{3q-1}{q} v^{q+1} e^{2q-1}$
 $\left(v^2 + \frac{7}{2} ev - \frac{2q-1}{q+1} e^2 \right)$. Nous trouverons ici, comme
 ci-dessus, & par les mêmes raisons, 1.° lorsque $v < e$, tous
 les termes positifs & la série toujours croissante & convergente;
 2.° lorsque $e > v$, le terme en $v^2 + \frac{7}{2} v - \frac{2q-1}{q+1} e^2$
 toujours croissant lorsqu'une fois il est devenu négatif.

Soit $q = \frac{1}{2}$, alors nous aurons, comme ci-dessus,
 $v^2 + \frac{7}{2} ve - 2e^2 < 0$ pour la limite du cas où ce
 terme peut devenir négatif, ce qui donne encore $v = \frac{1}{2} e$;
 nous aurons de plus $v^2 + \frac{7}{2} ve - \frac{1}{2} e^2 > 0$; ou faisant
 $\frac{v}{e} = \epsilon$, $\epsilon^2 + \frac{7}{2} \epsilon - \frac{1}{2} > 0$, ou $\epsilon > \frac{-7+\sqrt{57}}{4}$, ou
 $v > \frac{\sqrt{57}-7}{\sqrt{57}-3}$ pour limite du cas où tous les termes sont

E

négatifs. Nous observerons enfin que dans chacun des trois cas, lorsque la série parvient à des termes négatifs, elle est toujours convergente par rapport à ces termes, comme par rapport aux termes positifs.

Si nous examinons maintenant ces séries dans le cas de $q = \frac{1}{2}$, nous trouverons pour le premier cas,

$$(o) V^{\frac{1}{2}} = v(v^2 + 3ve) + 3v^2e^2[v^2 + (3 + \frac{1}{3})ev - e^2] \dots + \frac{3q-3}{q-1} v^q e^{2q-2} [v^2 + (3 + \frac{q-1}{2q-1})ev - \frac{2q-2}{q} e^2] \dots$$

ce terme en q n'étant ici que pour conserver la forme du terme général; d'où

$$V^{\frac{1}{2}} = (v^3 + 3v^2e) [1 + 3ve^2 + (\frac{6}{2})(ve^2)^2 \dots + \frac{3q}{q}(ve^2)^q \dots] + v^2e [ve^2 + 6(ve^2)^2 \dots + \frac{3q}{q-1}(ve^2)^q \dots] - ve^2 [3ve^2 + (\frac{6}{2})(ve^2)^2 \dots + \frac{3q}{q+1}(ve^2)^q \dots]$$

Or appelant ve^2, z , & la première série Z , il est aisé

de voir que la seconde sera $\frac{\int \frac{\partial Z}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$, & la troisième $\frac{2 \int \frac{\partial Z}{\partial z} z^{\frac{3}{2}} dz}{z}$, & qu'ainsi $V^{\frac{1}{2}} = (v^3 + 3v^2e) Z + v^2e \frac{\int \frac{\partial Z}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{2z^{\frac{1}{2}}} - ve^2 \frac{\int \frac{\partial Z}{\partial z} z^{\frac{3}{2}} dz}{z}$.

Mais lorsque $v > e$, nous aurons ici $V^{\frac{1}{2}} = 1$. Donc on aura l'équation

$$(v^3 + 3v^2e)Z + v^2e \frac{\int \frac{\partial Z}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{2z^{\frac{1}{2}}} - ve^2 \frac{\int \frac{\partial Z}{\partial z} z^{\frac{3}{2}} dz}{z} = 1;$$

équation de laquelle on tirera Z en v ou en e , par une équation du second ordre.

Nous trouverons de même,

$$(1) V^{\frac{1}{2}} = v + ve(v^2 + 3ev - e^2) + \left(\frac{4}{1}\right)v^2e^3[v^2 + (3 + \frac{1}{4}).ev - \frac{1}{2}e^2].. \\ + \frac{3q-2}{q-1} v^q e^{2q-1} [v^2 + (3 + \frac{q-1}{2q}).ev - \frac{2q-1}{q} e^2].....$$

(ce terme en q n'étant ici que pour montrer la forme du terme général), & cette équation devient

$$(1) V^{\frac{1}{2}} = v + (v^3e + 3v^2e^2) \cdot [1 + \left(\frac{4}{1}\right)ve^2 \dots + \frac{3q+1}{q} v^q e^{2q} \dots] \\ + v^2e^2 [ve^2 \dots \dots \dots + \frac{3q+1}{q-1} v^q e^{2q} \dots] \\ - ve^3 [1 + \left(\frac{4}{2}\right)ve^2 \dots + \frac{3q+1}{q+1} v^q e^{2q} \dots]$$

Or appelant ici $v e^2$, z , & la première série Z' , il est

clair que la seconde sera $\frac{\frac{1}{2} \int \frac{\partial Z'}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{z}$, & la troisième

$$\frac{\int \frac{\partial (Z' z^{\frac{1}{2}})}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{z}; \text{ \& comme nous devons avoir } (1) V^{\frac{1}{2}} = 1$$

lorsque $v > e$, nous aurons l'équation

$$(v^3e + 3v^2e^2) \cdot Z' + \frac{1}{2} v^2e^2 \frac{\int \frac{\partial Z'}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{z} - 2ve^3 \frac{\int \frac{\partial (Z' z^{\frac{1}{2}})}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{z}$$

= 1 - $v = e$, ce qui donne Z' en v , e , ou z , par une équation du second ordre.

Enfin, à cause de (2) $V^{\frac{1}{2}} = v^2 + 2v^2e$

$$[v^2 + (3 + \frac{1}{2}).ve - \frac{1}{2}e^2] + \left(\frac{5}{2}\right).v^3e^3(v^2 + \frac{7}{2}ev - e^2)... \\ + \frac{3q-1}{q} v^{q+1} e^{2q-1} (v^2 + \frac{7}{2}ve - \frac{2q-1}{q+1} e^2)..... \\ = v^2 + (v^4e + \frac{7}{2}v^3e^2) \cdot [2 + \left(\frac{5}{2}\right)ve^2 \dots + \frac{3q+2}{q+1} (ve^2)^q \dots] \\ - v^2e^3 [1 + \left(\frac{5}{2}\right)ve^2 \dots + \frac{3q+2}{q+1} (ve^2)^q \dots]$$

E ij

$$= v^2 + (2v^4e + 7v^3e^2) \cdot [1 + 5ve^2 \dots + \frac{3q+2}{q} (ve^2)^q \dots] \\ - v^2e^2 [1 + (\frac{1}{2})ve^2 \dots + \frac{3q+2}{q+2} (ve^2)^q]; \text{ \&}$$

faisant $ve^2 = z$, & la première série Z'' , nous aurons

$$(2) V^{\frac{1}{2}} = v^2 + (v^4e + 7v^3e^2) \cdot Z'' - 4v^2e^2 \frac{\int \frac{\partial (Z'' z^{\frac{1}{2}})}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{z^2};$$

d'où, à cause de (2) $V^{\frac{1}{2}} = 1$ lorsque $v > e$, $(v^4e + 7v^3e^2) Z''$

$$- 4v^2e^2 \frac{\int \frac{\partial (Z'' z^{\frac{1}{2}})}{\partial z} z^{\frac{1}{2}} dz}{z^2} = 2ve + e^2, \text{ ce qui donne}$$

Z'' par une équation du premier ordre.

Nous ne nous arrêtons point à chercher à résoudre ces équations, pour en tirer ensuite, en changeant v en e , les valeurs inconnues jusqu'ici de $V^{\frac{1}{2}}$, lorsque $v < e$. Outre que leur intégration peut être très-difficile, ou même impossible, en termes finis, comme les autres hypothèses conduisent à des équations encore plus élevées, cette méthode, qui est la plus directe, deviendrait trop compliquée dans l'état actuel de l'analyse, & nous en allons suivre une plus indirecte, mais plus simple.

Nous observerons pour cela que nous savons d'avance que ces valeurs de $V^{\frac{1}{2}}$ sont égales à 1 depuis $v = 1$ jusqu'à $v = \frac{1}{2}$. Cela posé, ayant pris la valeur de chaque série en z , celles des v & e , qui entrent dans la valeur de $V^{\frac{1}{2}}$ aussi en z , il en résulte que cette fonction doit être égale à 1 plus une fonction de z , dont les termes se détruisent, & qu'ainsi $V^{\frac{1}{2}}$ sera toujours 1 tant que l'on pourra prendre pour v la même racine de l'équation $v \cdot (1 - v)^2 = z$. En examinant cette équation, on verra, 1.^o que z , depuis $v = 0$ jusqu'à $v = \frac{1}{3}$, va toujours en croissant depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \frac{4}{27}$; que depuis $v = \frac{1}{3}$ jusqu'à $v = 1$, z va en décroissant depuis

$z = \frac{4}{27}$ jusqu'à $z = 0$; 2.° que des trois racines de l'équation $v \cdot (1 - v)^2 = z$, une ne peut servir à la question; & que des deux autres, l'une répond toujours à $v > \frac{1}{3}$, l'autre à $v < \frac{1}{3}$; 3.° que par conséquent, pour les mêmes valeurs de z , depuis 0 jusqu'à $\frac{4}{27}$, il y aura deux valeurs de $V^{\frac{1}{6}}$, l'une depuis $v = 1$ jusqu'à $v = \frac{1}{3}$, l'autre depuis $v = \frac{1}{3}$ jusqu'à $v = 0$; 4.° Enfin, que réduisant en série par rapport à z , on trouvera la première de ces valeurs = 1, & l'autre = 0, ce qu'on trouveroit également pour la première de ce qui a été observé ci-dessus; & pour la seconde, de ce que $V^{\frac{1}{6}}$, réduit en série par rapport à v ou à e , ne contient pas ces quantités, & par conséquent est indépendant de leurs valeurs, & qu'il est 0 pour $v = 0$; 5.° que dans le cas de $v = \frac{1}{3}$, où $V^{\frac{1}{6}}$ passe de la valeur 1 à la valeur 0, on aura, mettant $v + \partial v$ au lieu de v , $V^{\frac{1}{6}} + \frac{\partial V^{\frac{1}{6}}}{\partial v} \partial v = 1$, & $V^{\frac{1}{6}} - \frac{\partial V^{\frac{1}{6}}}{\partial v} \partial v = 0$, d'où $V^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$.

Nous chercherons maintenant dans les trois hypothèses ci-dessus, les quantités V'^q , c'est-à-dire, la probabilité que la décision sera en faveur de v avec la pluralité de q voix; il est clair que nous aurons

$$(0) V'^q = v^{3q} + 3qv^{3q-1}e \dots + \frac{3q}{q} v^{2q} e^q$$

$$(1) V'^q = v^{3q+1} + (3q+1) \cdot v^{3q} e \dots + \frac{3q+1}{q} v^{2q+1} e^q$$

$$(2) V'^q = v^{3q+2} + (3q+2) \cdot v^{3q+1} e \dots + \frac{3q+2}{q+1} v^{2q+1} e^{q+1};$$

d'où nous tirerons

$$(0) V'^{q+1} - V'^q = v^{3q+3} + (3q+3) v^{3q+2} e \dots + \frac{3q+3}{q+1} v^{2q+2} e^{q+1} - (v^{3q} + 3qv^{3q-1}e \dots + \frac{3q}{q} v^{2q} e^q) (v+e)^3$$

Or, 1.° $\frac{3q+3}{q+1} = \frac{3q}{q+1} + 3 \frac{3q}{q} + 3 \frac{3q}{q-1} + \frac{3q}{q-2}$,

dont le premier terme ne se trouve point dans $V'^q \cdot (v+c)^3$;

2.° les termes $\frac{3q}{q} v^{2q} e^{q+3}$, $3 \frac{3q}{q} v^{2q+1} e^{q+2}$, $\frac{3q}{q-1} v^{2q+1} e^{q+2}$ ne se trouvent point dans V^{q+1} ; nous aurons donc

$$(o) V^{q+1} - V^{q+1} = \frac{3q}{q+1} v^{2q+2} e^{q+1} - 3 \frac{3q}{q} v^{2q+1} e^{q+2} \\ - \frac{3q}{q-1} v^{2q+1} e^{q+2} - \frac{3q}{q} v^{2q} e^{q+3} = \frac{3q}{q} \\ \left(\frac{2q}{q+1} v^2 - 3ve - \frac{q}{2q+1} ve - e^2 \right) v^{2q} e^{q+1}$$

$$(o) V^{q+1} = v^3 + 3v^2e + 3v^2e^2 \left[v^2 - \left(3 + \frac{1}{3} \right) ve - e^2 \right] \dots \\ + \frac{3q-3}{q-1} v^{2q-2} e^q \left[\frac{2q-2}{q} v^2 - \left(3 + \frac{q-1}{2q-1} \right) ve - e^2 \right]$$

En examinant cette formule, nous trouverons, 1.° qu'elle sera composée toute entière de termes négatifs tant que $v < \frac{2}{3}$, & qu'ainsi la probabilité d'avoir une décision conforme à la vérité, diminuera dans cette hypothèse à mesure que l'on augmentera le nombre des Votans; 2.° que pour que tous les termes soient positifs, il faudra que $v > \frac{10 + \sqrt{136}}{16 + \sqrt{136}}$,

c'est-à-dire à peu-près $\frac{7831}{10000}$. Ainsi tant que v sera supérieur

à cette limite, plus on augmentera q , plus la probabilité d'obtenir une décision conforme à la vérité, à la pluralité demandée, augmentera aussi; & dans le cas où v est entre ces deux limites, on aura d'abord, jusqu'à un certain point, la probabilité diminuant lorsque q augmente; & au-delà de ce terme, la probabilité augmentera en même-temps que q , mais plus lentement qu'elle n'a diminué; en sorte que pour avoir ici une aussi grande probabilité avec un grand nombre de Votans qu'avec trois seulement, on pourra être obligé de prendre un grand nombre de termes.

Nous trouverons de même (1) $V^{q+1} - V^{q+1} = v^{3q+4} \dots$

$$+ \frac{3q+4}{q+1} v^{2q+3} e^{q+1} - (v^{3q+1} \dots + \frac{3q+1}{q} v^{2q+1} e^q) (v+e)^3,$$

& nous observerons, 1.° que $\frac{3q+4}{q+1} = \frac{3q+1}{q+1} + 3 \frac{3q+1}{q}$

+ $3 \frac{3q+1}{q-1} + \frac{3q+1}{q-2}$, dont le premier terme ne se trouve point dans $V'^q \cdot (v + e)^3$; 2.° les termes $\frac{3q+1}{q} v^{2q+1} e^{q+3}$, $3 \frac{3q+1}{q} v^{2q+2} e^{q+2}$, & $\frac{3q+1}{q-1} v^{2q+2} e^{q+2}$ se trouvent dans $V'^q \cdot (v + e)^3$, & ne se trouvent point dans V'^{q+1} . Nous aurons donc (1) $V'^{q+1} - V'^q = \frac{3q+1}{q+1} v^{2q+3} e^{q+1} - [3 \frac{3q+1}{q} + \frac{3q+1}{q-1}] v^{2q+2} e^{q+2} - \frac{3q+1}{q} v^{2q+1} e^{q+3} = \frac{3q+1}{q} v^{2q+1} e^{q+1} [\frac{2q+1}{q+1} v^2 + (3 + \frac{q}{2q+2}) ve - e^2]$, & (1) $V^q = v + ve (v^2 - 3ev - e^2) + (\frac{1}{1}) v^3 e^2 [\frac{3}{2} v^2 - (3 + \frac{1}{4}) \cdot ve - e^2] \dots \dots \dots + \frac{3q-2}{q-1} v^{2q-1} e^q [\frac{2q-1}{q} v^2 - (3 + \frac{q-1}{2q}) \cdot ev - e^2]$.

En examinant cette formule, nous trouverons, 1.° comme ci-dessus, que tous les termes seront négatifs, quel que soit q , tant que $v = < \frac{2}{3}$; 2.° que, pour qu'ils soient tous positifs, il faudra au contraire que $v = > \frac{\sqrt{(13)} + 3}{\sqrt{(13)} + 5}$, d'où l'on tirera les mêmes conclusions que ci-dessus.

On trouvera de même

$$(2) V'^{q+1} - V'^q = \frac{3q+2}{2q+1} v^{2q+1} e^{q+2} [\frac{2q+1}{q+2} v^2 - (3 + \frac{q+1}{2q+2}) \cdot ev - e^2],$$

$$\& V'^q = v^2 + 2ve + 2e^2v (\frac{1}{2}v^2 - \frac{7}{2}ve - e^2) \dots \dots \dots + \frac{3q-1}{q} v^{2q-1} e^{q+1} (\frac{2q-1}{q+1} v^2 - \frac{7}{2}ev - e^2),$$

d'où nous concluons, 1.° que tous les termes seront négatifs tant que $v = < \frac{2}{3}$; 2.° qu'ils ne pourront être tous positifs, à moins que l'on n'ait $v = > \frac{7+\sqrt{57}}{9+\sqrt{57}}$, d'où l'on tirera les mêmes conclusions que ci-dessus. Lorsque $q = \frac{1}{6}$, on aura (0) $V'^{\frac{1}{6}}$, (1) $V'^{\frac{1}{6}}$, (2) $V'^{\frac{1}{6}}$ égaux à 1 lorsque $v > \frac{2}{3}$, à

zéro lorsque $v < \frac{2}{3}$, & à $\frac{1}{3}$ lorsque $v = \frac{2}{3}$, ce qui se déduit de $V'^q + E^q = 1$, $V^q + E'^q = 1$.

Il résulte de ces équations, que dans ces trois hypothèses, si l'on veut non-seulement parvenir à obtenir une valeur de V^q très-approchant de l'unité, mais même avoir une valeur de V'^q qui puisse en approcher aussi, il faudra que $v > \frac{2}{3}$, & que si on veut avoir pour V^q & V'^q à la fois des valeurs convergentes, de manière à n'avoir pas besoin de faire q très-grand, il faudra avoir v au-dessus des limites que nous avons marquées ci-dessus.

Il suit de ce que nous venons de dire, 1.^o que tant que $v > \frac{1}{3}$, on aura V^q d'autant plus grand que q augmentera, & qu'ainsi dans cette hypothèse, plus le nombre des Votans sera grand, plus il y aura de probabilité que la décision ne sera pas contraire à la vérité; 2.^o que lorsque $v < \frac{2}{3}$, V'^q diminuera à mesure que q augmentera; & qu'ainsi dans le cas où v est entre $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{3}$, si l'on a un grand nombre de Votans, il arrivera que si l'on a une grande probabilité de n'avoir pas une décision contraire à la vérité, on en aura une très-petite d'avoir une décision conforme à la vérité, & qui sera même plus petite que celle d'avoir une décision en faveur de l'erreur tant que $v < \frac{2}{3}$, de manière que le seul avantage de la vérité, est de n'avoir pas de décision contraire lorsqu'elle se trouve appartenir au cas pour lequel on exige cette pluralité. Par exemple, s'il s'agit d'un jugement, plus on multipliera le nombre des Votans en ce cas, plus il sera probable qu'un innocent ne sera pas condamné; mais aussi plus il devient probable, & en plus grande proportion, qu'un coupable ne sera point puni. Ainsi les inconvéniens des assemblées nombreuses, formées d'hommes à préjugés, deviennent moindres sous cette forme: elles décideront moins; mais tant que la probabilité de la vérité du jugement de chacun ne sera pas au-dessous de $\frac{1}{3}$, il y aura du moins la probabilité que la décision ne sera pas contraire à la vérité. Cependant pour que cette forme convînt à une assemblée nombreuse, composée d'hommes peu éclairés, il faudroit que du moins

$v > \frac{2}{3}$.

$v > \frac{2}{3}$. Dans ce cas elle peut être avantageuse, puisqu'on peut réunir & une probabilité très-grande qu'il ne se formera point de décision contraire à la vérité, & une probabilité assez grande qu'il y aura une décision; & que s'il y en a une, elle sera pour la vérité; en effet, cette dernière probabilité est exprimée ici par $\frac{V'^1}{V'^1 + E'^1}$, & dès que $v > e$, $V'^1 > E'^1$.

Lorsque la décision est formée, si l'on cherche la probabilité que le jugement porté est conforme à la vérité, & qu'on ignore à quelle pluralité il a été rendu, on aura cette probabilité exprimée encore par $\frac{V'^1}{V'^1 + E'^1}$; si on connoît cette pluralité, & qu'elle soit $q' >$ ou $= q$, elle sera $\frac{v^q}{v^q + e^q}$, & la moindre qu'il sera possible quand $q' = q$, & qu'elle devient $\frac{v^q}{v^q + e^q}$.

Quoique nous regardions ici les quantités v & e comme constantes par rapport aux mêmes hommes, on fait que cette supposition n'est pas exacte; il y a non-seulement des questions, mais des classes de questions, pour lesquelles ils n'ont ni la même sagacité ni la même justesse. Si donc on confie à la même assemblée le jugement de différentes questions, pourvu que v ne soit pas $=$ ou $< \frac{1}{3}$, on aura, si le nombre des Votans est très-grand, une grande probabilité que la décision ne sera pas contraire à la vérité; une probabilité encore grande qu'elle y sera plutôt conforme tant que v sera entre 1 & $\frac{2}{3}$, & enfin plus de probabilité que la décision sera en faveur de la vérité qu'en faveur de l'erreur, tant que $v > e$. Ainsi, par exemple, pourvu que les préjugés ne fassent point tomber v jusqu'à $\frac{1}{3}$, il sera très-probable qu'il n'y aura point de décision, & très-probable, s'il y en a une, qu'elle sera en faveur de la vérité s'ils ne font pas tomber v jusqu'à $\frac{1}{2}$.

CINQUIÈME HYPOTHÈSE.

Si le nombre des Votans est toujours $3q$, $3q + 1$;

$3q + 2$, & que la pluralité soit $q + q'$, ou plutôt $q + 2q'$ dans le premier & le troisième cas, & $q + 2q' + 1$ dans le second, parce que le nombre à ajouter à q ne peut être que pair dans le premier & le troisième cas, & impair dans le second; nous aurons

$$(o) V^q = v^{3q} \dots + \frac{3q}{2q+q'-1} v^{q-q'+1} e^{2q+q'-1}$$

$$(1) V^q = v^{3q+2} \dots + \frac{3q+1}{2q+q'} v^{q-q'+2} e^{2q+q'}$$

$$(2) V^q = v^{3q+2} \dots + \frac{3q+2}{2q+q'} v^{q-q'+2} e^{2q+q'}$$

$$(o) V^{q+1} = v^{3q+3} \dots + \frac{3q+3}{2q+q'+1} v^{q-q'+2} e^{2q+q'+2}$$

$$(o) V^{q+1} - V^q = v^{3q+3} \dots + \frac{3q+3}{2q+q'+1} v^{q-q'+2} e^{2q+q'+2} \dots - (v^{3q} \dots + \frac{3q}{2q+q'-1} v^{q-q'+1} e^{2q+q'-1}) (v+e)^3.$$

Mais, 1.^o $\frac{3q+3}{2q+q'+1} = \frac{3q}{2q+q'+1} + 3 \frac{3q}{2q+q'} + 3 \frac{3q}{2q+q'-1} + \frac{3q}{2q+q'-2}$, & les deux premiers termes ne se trouvent point dans $V^q \cdot (v+e)^3$; 2.^o le terme $\frac{3q+3}{2q+q'} = \frac{3q}{2q+q'}$ + $3 \frac{3q}{2q+q'-1} + 3 \frac{3q}{2q+q'-2} + \frac{3q}{2q+q'-3}$, dont le premier terme ne se trouve point dans $V^q \cdot (v+e)^3$; 2.^o le terme $\frac{3q}{2q+q'-1} v^{q-q'+2} e^{2q+q'+2}$, qui se trouve dans $V^q \cdot (v+e)^3$, ne se trouve pas dans V^{q+1} . Nous aurons donc

$$(o) V^{q+1} - V^q = \left(\frac{3q}{2q+q'+1} + 3 \frac{3q}{2q+q'} \right) v^{q-q'+2} e^{2q+q'+2} + \frac{3q}{2q+q'} v^{q-q'+2} e^{2q+q'+2} - \frac{3q}{2q+q'-1} v^{q-q'+1} e^{2q+q'+2} + \dots = \frac{3q}{2q+q'} \left[v^2 + \left(3 + \frac{q-q'}{2q+q'+1} \right) \cdot ev - \frac{2q+q'}{q-q'+1} e^2 \right] v^{q-q'+1} e^{2q+q'}$$

où l'on peut mettre $\frac{3q}{q-q'}$ au lieu de $\frac{3q}{2q+q'}$. On aura donc

$$(o) V^q = 1 \dots - e^{3q'} + (v^2 + 3ve - \frac{3q'}{1} e^2) v e^{3q'} \\ + (3q' + 3) [v^2 + (3 + \frac{1}{3q'+3}) . ev - \frac{3q'+2}{2} e^2] v^2 e^{3q'+2} \dots \\ + \frac{3q-3}{q-q-1} [v^2 + (3 + \frac{q-q-1}{2q+q-1}) . ev - \frac{2q+q-2}{q-q} e^2] v^{q-q'} e^{2q+q'-2}.$$

Si nous examinons en général les conséquences de cette hypothèse, nous trouverons que le coefficient de ev , augmentant continuellement, tandis que celui de e^2 diminue à mesure que q devient plus grand, tous les termes ne peuvent rester négatifs que dans le cas où ce facteur est négatif, q étant $\frac{1}{2}$. Or quand $q = \frac{1}{2}$, ce facteur devient $v^2 + \frac{3}{2}ve - 2e^2$, précisément comme ci-dessus, ce qui donne pour limite $v = \frac{1}{3}$; pour l'autre limite, c'est-à-dire, celle où ce terme est toujours positif, nous supposons $v^2 + 3ve - 3q'e^2 = 0$, ce qui donne $\frac{v}{e} = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 3q'}$; & à cause de $e = 1 - v$, $v = \frac{\sqrt{\frac{9}{4} + 3q'} - \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4} + 3q'} - \frac{1}{2}}$. Ainsi il faudra que v

soit entre 1 & cette valeur, pour qu'en augmentant le nombre des Votans depuis le point où la pluralité exigée se confond avec l'unanimité, la probabilité aille toujours en augmentant. Entre cette valeur & $v = \frac{1}{3}$, elle ira toujours en diminuant jusqu'à un point où elle commencera à croître avec le nombre des Votans; au-dessous de $\frac{1}{3}$ elle sera toujours décroissante.

On trouvera de même (1) $V^{q+1} - V^q = v^{3q+4} \dots$

$$+ \frac{3q+4}{2q+q'+2} v^{q+2} - q' e^{2q+q'+2} - (v^{3q} \dots + \frac{3q+1}{2q+q'} v^{q+1} - q' e^{2q+q'}) \cdot (v+e)^3,$$

Or, 1.° les deux termes $\frac{3q+1}{2q+q'+2}$ & $3 \frac{3q+1}{2q+q'+1}$, qui entrent

dans la valeur de $\frac{3q+4}{2q+q'+2}$, ne se trouvent pas dans

(1) $V^q \cdot (v+e)^3$; 2.° le terme $\frac{3q+1}{2q+q'+1}$, qui entre dans

la valeur de $\frac{3q+4}{2q+q'+1}$, ne se trouve pas dans (1) $V^q \cdot (v+e)^3$;

3.° réciproquement le terme $\frac{3q+1}{2q+q'} v^{q+1} - q' e^{2q+q'+3}$, qui se trouve dans (1) $V^q \cdot (v + e)^3$, n'est pas dans (1) V^{q+2} . Nous aurons donc

$$\begin{aligned} (1) V^{q+2} - V^q &= \left(\frac{3q+1}{2q+q'+2} + 3 \frac{3q+1}{2q+q'+1} \right) v^{q+2} - q' e^{2q+q'+2} \\ &+ \frac{3q+1}{2q+q'+1} v^{q+3} - q' e^{2q+q'+1} - \frac{3q+1}{2q+q'} v^{q+1} - q' e^{2q+q'+3} \\ &= \frac{3q+1}{2q+q'+1} v^{q+1} - q' e^{2q+q'+1} \left[v^2 + \left(3 + \frac{q-q'}{2q+q'+2} \right) . ev - \frac{2q+q'+1}{q-q'+1} e^2 \right] \\ (1) V^q &= 1 \dots - e^{3q'+1} + \left[v^2 + 3 ev - (3q' + 1) . e^2 \right] v e^{3q'+2} \\ &+ (3q' + 4) . \left[v^2 + \left(3 + \frac{1}{3q'+4} \right) . ev - \frac{3q'+3}{2} e^2 \right] v^2 e^{3q'+3} \dots \\ &+ \frac{3q-2}{q-q'-1} v^{q-q'} e^{2q+q'-1} \left[v^2 + \left(3 + \frac{q-q'-1}{2q+q'} ev - \frac{2q+q'-1}{q-q'} e^2 \right) \right]; \end{aligned}$$

d'où nous tirerons les mêmes conclusions que ci-dessus, à cela près que la limite, au-dessus de laquelle tous les termes sont positifs, & où la probabilité augmente toujours avec la pluralité, sera $\frac{\sqrt{(\frac{1}{2} + 3q' + 1)} - \frac{1}{2}}{\sqrt{(\frac{1}{2} + 3q' + 1)} - \frac{1}{2}}$.

Nous trouverons enfin (2) $V^{q+2} - V^q = v^{3q'+5} \dots \dots \dots$

$$+ \frac{3q+5}{2q+q'+2} v^{q-q'+3} e^{2q+q'+2} - (v^{3q'+3} \dots + \frac{3q+2}{2q+q'} v^{q-q'+2} e^{2q+q'}) \cdot (v + e)^3$$

Or, 1.° le terme $\frac{3q+5}{2q+q'+2}$ contient les termes $\frac{3q+2}{2q+q'+2}$ & $3 \frac{3q+2}{2q+q'+1}$, qui ne sont point dans $V^q \cdot (v + e)^3$; 2.° le terme $\frac{3q+5}{2q+q'+1}$ contient $\frac{3q+2}{2q+q'+1}$, qui ne se trouve point dans $V^q \cdot (v + e)^3$; 3.° réciproquement le terme $\frac{3q+2}{2q+q'}$ $v^{q-q'+2} e^{2q+q'+3}$, qui est dans $V^q \cdot (v + e)^3$, ne se trouve point dans V^{q+2} . Nous aurons donc

$$\begin{aligned} (2) V^{q+2} - V^q &= \left(\frac{3q+2}{2q+q'+2} + 3 \frac{3q+2}{2q+q'+1} \right) v^{q-q'+3} e^{2q+q'+2} \\ &+ \frac{3q+2}{2q+q'+1} v^{q-q'+2} e^{2q+q'+1} - \frac{3q+2}{2q+q'} v^{q-q'+2} e^{2q+q'+3} \end{aligned}$$

$$= \frac{3q+1}{2q+q'+1} v^{q-q'+2} e^{2q+q'+1} [v^2 + (3 + \frac{q-q'+1}{2q+q'+2}) ev - \frac{2q+q'+1}{q-q'+2} e^2];$$

d'où (2) $V^q = 1 \dots - e^{3q'-1} + [v^2 + 3ev - (3q'-1) \cdot e^2] v e^{3q'-2}$

$$+ (3q' + 2) [v^2 + (3 + \frac{1}{3q'+2}) ev - \frac{3q'+1}{2} e^2] v^2 e^{3q'+1} \dots$$

$$+ \frac{3q-1}{q-q'} v^{q-q'+1} e^{2q+q'-1} [v^2 + (3 + \frac{q-q'}{2q+q'}) ev - \frac{2q+q'-1}{q-q'+1} e^2].$$

Nous aurons encore ici les mêmes limites, excepté que nous aurons pour le point où tous les termes sont positifs,

$$v < \frac{\sqrt{(\frac{1}{3} + 3q' - 1) - \frac{1}{3}}}{\sqrt{(\frac{1}{3} + 3q' - 1) - \frac{1}{3}}}.$$

Si l'on cherche les valeurs de (0) $V^{\frac{1}{3}}$, (1) $V^{\frac{1}{3}}$, (2) $V^{\frac{1}{3}}$, on les trouvera 1 pour $v > \frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ pour $v = \frac{1}{3}$, 0 pour $v < \frac{1}{3}$.

Cherchons maintenant (0) V'^q , (1) V'^q , (2) V'^q , nous aurons

$$(0) V'^q = v^{3q} \dots + \frac{3q}{q-q'} v^{2q+q'} e^{q-q'}$$

$$(1) V'^q = v^{3q+1} \dots + \frac{3q+1}{q-q'} v^{2q+q'+1} e^{q-q'}$$

$$(2) V'^q = v^{3q+2} \dots + \frac{3q+2}{q-q'+1} v^{2q+q'+2} e^{q-q'+1}$$

d'où, puisque le terme $\frac{3q}{q+1-q'} v^{2q+q'+2} e^{q+1-q'}$ entre dans

V'^{q+1} sans entrer dans V'^q , & que les termes $3 \frac{3q}{q-q'} v^{2q+q'+1} e^{q+2-q'}$,

$\frac{3q}{q-q'} v^{2q+q'} e^{q+3-q'}$, & $\frac{3q}{q-q'-1} v^{2q+q'+1} e^{q+2-q'}$, entrent

dans V'^q $(v + e)^3$ sans entrer dans V'^{q+1} ,

$$(0) V'^{q+1} - V'^q = v^{3q+3} \dots + \frac{3q+3}{q+1-q'} v^{2q+q'+2} e^{q+1-q'}$$

$$- (v^{3q} \dots + \frac{3q}{q-q'} v^{2q+q'} e^{q-q'}) (v + e)^3$$

$$= \frac{3q}{q+1-q'} v^{2q+q'+2} e^{q+1-q'} - 3 \frac{3q}{q-q'} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+2}$$

$$- \frac{3q}{q-q'} v^{2q+q'} e^{q-q'+3} - \frac{3q}{q-q'-1} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+2}$$

$$= \frac{3q}{q-q'} \left[\frac{2q+q'}{q+1-q'} v^2 - \left(3 + \frac{q-q'}{2q+q'+1} \right) ev - e^2 \right] v^{2q+q'} e^{q-q'+1},$$

& par conséquent

$$(0) V^{q'} = v^{3q'} + (3q'v^2 - 3ev - e^2)v^{3q'}e + (3q' + 3) \dots$$

$$\left[\frac{3q'+2}{2} v^2 - \left(3 + \frac{1}{3q'+3} \right) ev - e^2 \right] v^{3q'+2} e^2 \dots \dots$$

$$+ \frac{3q-3}{q-q'-1} \left[\frac{2q+q'-2}{q-q'} v^2 - \left(3 + \frac{q-q'-1}{2q+q'-1} \right) ev - e^2 \right] v^{2q+q'-2} e^{q-q'}$$

Nous trouverons, en examinant cette formule, que tant que $v > \frac{2}{3}$, la probabilité ira toujours en augmentant en même-temps que le nombre des Votans; mais si $v < \frac{2}{3}$, la probabilité, après avoir augmenté avec le nombre des Votans, diminuera ensuite, & la limite des valeurs de v , pour lesquelles elle commencera à diminuer dès les premiers termes,

$$\text{fera } v < \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{4q'^2} + \frac{1}{3q'}\right)} + \frac{1}{2q'}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4q'^2} + \frac{1}{3q'}\right)} + \frac{1}{2q'+1}}. \text{ Nous aurons de même}$$

$$(1) V^{q'} = v^{3q'+1} \dots \dots \dots + \frac{3q+1}{q-q'} v^{2q+q'+1} e^{q-q'}$$

$$(1) V^{q'+1} - V^{q'} = v^{3q'+2} \dots \dots + \frac{3q+2}{q-q'+1} v^{2q+q'+2} e^{q-q'+1}$$

$$- (v^{3q'+1} \dots \dots + \frac{3q+1}{q-q'} v^{2q+q'+1} e^{q-q'}) (v + e)^3,$$

& nous trouverons, 1.° que le terme $\frac{3q+1}{q-q'+1}$ qui entre dans $V^{q'+1}$, n'entre point dans $V^{q'}$. $(v + e)^3$; 2.° que

réciiproquement les termes $\frac{3q+1}{q-q'}$ $v^{2q+q'+1} e^{q-q'+1}$,

3. $\frac{3q+1}{q-q'}$ $v^{2q+q'+2} e^{q-q'+2}$, & $\frac{3q+1}{q-q'-1}$ $v^{2q+q'+2} e^{q-q'+2}$

qui entrent dans $V^{q'}$ $(v + e)^3$, n'entrent point dans $V^{q'+1}$;

nous aurons donc $V^{q'+1} - V^{q'} = \frac{3q+1}{q-q'+1} v^{2q+q'+2} e^{q-q'+2}$

$$- \left(3 + \frac{3q+1}{q-q'} + \frac{3q+1}{q-q'-1} \right) v^{2q+q'+2} e^{q-q'+2}$$

$$= \frac{3q+1}{q-q'} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+3} = \frac{3q+1}{q-q'} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+2}$$

[$\frac{2q+q'+1}{q-q'+1} v^2 - (3 + \frac{q-q'}{2q+q'+2}) ev - e^2$], d'où nous tirerons

$$(1) V^{1q} = v^{3q'+1} + v^{3q'+1} e [(3q' + 1) \cdot v^2 - 3ev - e^2] \\ + (3q' + 4) v^{3q'+3} e^2 [\frac{3q'+3}{2} v^2 - (3 + \frac{1}{3q'+4}) ev - e^2] \\ + \frac{3q-2}{q-q'-1} v^{2q+q'-1} e^{q-q'} [\frac{2q+q'-1}{q-q'} v^2 - (3 + \frac{q-q'-1}{2q+q'}) ve - e^2]$$

ce qui donne les limites $\frac{2}{3}$ comme ci-dessus,

$$\& v < \frac{\sqrt{[\frac{9}{4 \cdot (3q'+1)^2} + \frac{1}{3q'+1}] + \frac{3}{2 \cdot (3q'+1)}}}{\sqrt{[\frac{9}{4 \cdot (3q'+1)^2} + \frac{1}{3q'+1}] + \frac{3}{2 \cdot (3q'+1)} + 1}}$$

Enfin nous aurons (2) $V^{1q} = v^{3q+2} \dots + \frac{3q+2}{q-q'+1} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+2}$

$$V^{1q+1} - V^{1q} = v^{3q+5} \dots + \frac{3q+5}{q-q'+2} v^{2q+q'+3} e^{q-q'+2}$$

$$= (v^{3q+2} \dots + \frac{3q+2}{q-q'+1} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+1}) (v+e)^3,$$

& nous trouverons, 1.° que le terme $\frac{3q+2}{q-q'+2}$ ne se trouve

pas dans $V^{1q} \cdot (v+e)^3$; 2.° que réciproquement les termes,

$$\frac{3q+2}{q-q'+1} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+2}, \quad 3 \frac{3q+2}{q-q'+1} v^{2q+q'+2} e^{q-q'+3},$$

& $\frac{3q+2}{q-q'} v^{2q+q'+2} e^{q-q'+3}$, ne se trouvent point dans V^{1q+1} .

Nous aurons donc (2) $V^{1q+1} - V^{1q} = \frac{3q+2}{q-q'+2} v^{2q+q'+3} e^{q-q'+2}$

$$= (\frac{3q+2}{q-q'+1} 3 + \frac{3q+2}{q-q'}) v^{2q+q'+2} e^{q-q'+2}$$

$$= \frac{3q+2}{q-q'+1} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+2} = \frac{3q+2}{q-q'+1} v^{2q+q'+1} e^{q-q'+2}$$

$$[\frac{2q+q'+1}{q-q'+2} v^2 - (3 + \frac{q-q'+1}{2q+q'+2}) ev - e^2]$$

d'où (2) $V^{1q} = v^{3q'-1} + v^{3q'-1} e [(3q'-1) \cdot v^2 - 3ve - e^2]$

$$+ (3q' + 1^2) \cdot v^{3q'+1} e^2 \left[\frac{3q'+1}{2} v^2 - \left(3 + \frac{1}{3q'+1} \right) e v - e^2 \right] \dots$$

$$+ \frac{3q-1}{q-q'} v^{2q+q'-1} e^{q-q'+1} \left[\frac{2q+q'-1}{q-q'+1} v^2 - \left(3 + \frac{q-q'}{2q+q'} \right) e v - e^2 \right],$$

ce qui nous donnera, comme ci-dessus, pour limites de v , $\frac{2}{3}$, &

$$\frac{\sqrt{\left[\frac{9}{4 \cdot (3q'-1)^2} + \frac{1}{3q'-1} \right]} + \frac{3}{2 \cdot (3q'-1)}}{\sqrt{\left[\frac{9}{4 \cdot (3q'-1)^2} + \frac{1}{3q'-1} \right]} + \frac{3}{2 \cdot (3q'-1)} + 1}, \text{ \& nous au-}$$

rons, comme ci-dessus, (o) V'^q , (1) V'^q , (2) V'^q égaux à 1, $\frac{1}{2}$ & 0, suivant que $v > = < \frac{2}{3}$, ce qui nous conduit aux mêmes conclusions que pour la quatrième hypothèse, soit pour le cas où la décision n'est pas prononcée, soit pour celui où l'on fait qu'elle a été prononcée sans que la pluralité soit connue, soit enfin pour le cas où la pluralité de la décision est connue. Nous passerons maintenant à l'examen d'un cas plus général.

S I X I È M E H Y P O T H È S E.

Nous supposons que le nombre des Votans est $m q + n q + q'$, & que la pluralité exigée est $n q + q''$; dans ce cas, q'' est une quantité constante, ainsi que q' . Cela posé, nous aurons

$$V^1 = v^{mq+nq+q'} \dots + \left(\frac{mq+nq+q'}{mq+nq+q'+q''-1} \right) v^{\frac{mq+q'-q''+1}{2}} e^{\frac{mq+nq+q'+q''-1}{2}}$$

en ayant soin ici de prendre pour l'exposant de v , le nombre entier au-dessus de ce nombre fractionnaire; & pour l'exposant de e , le nombre entier au-dessous; de-là nous tirerons

$$V^{1+1} = v^{mq+nq+m+n+q'} \dots$$

$$+ \left[\frac{(m+n) \cdot (q+1) + q'}{mq+m+n+mq+m+n-q+q'+q''-1} \right] v^{\frac{mq+m+q'-q''+1}{2}} e^{\frac{mq+m+n+mq+m+n+q'+q''-1}{2}}$$

& nous chercherons de même la différence entre V^{1+1} & V^1 .

$V^q . (v + e)^{m+n} = V^q$, & nous observerons qu'appelant $\frac{P}{r}$ le coefficient du dernier terme de V^q , & $\frac{P+P'}{r+r'}$ le coefficient du dernier terme de V^{q+1} , d'où $m+n = p'$, nous aurons, 1.° $\frac{P+P'}{r+r'} = \frac{P}{r+r'} + p' \frac{P}{r+r'-1} + \frac{P'}{2} \frac{P}{r+r'-2} + \frac{P'}{3} \frac{P}{r+r'-3} \dots + \frac{P'}{p'} \frac{P}{r+r'-p'}$, puisque le premier membre est le coefficient de $v^{p+p'-r-r'} e^{r+r'}$ dans $(v + e)^{p+p'}$, & le second le coefficient du même terme dans $(v + e)^p . (v + e)^{p'}$. Mais il est évident que l'on n'a de cette valeur dans $V^q . (v + e)^{p'}$, que $\frac{P}{r} \frac{P'}{r'}$ + $\frac{P}{r-1} \frac{P'}{r'+1} + \frac{P}{r-2} \frac{P'}{r'+2} \dots + \frac{P}{r+r'-p'} \frac{P'}{p'}$; ainsi V^{q+1} contiendra de plus le terme $v^{p+p'-r-r'} e^{r+r'}$. $(\frac{P}{r+r'}$ + $p' \frac{P}{r+r'-1} \dots + \frac{P}{r+1} \frac{P'}{r'-1})$; 2.° que le coefficient de l'avant-dernier terme, qui est $\frac{P+P'}{r+r'-1}$, est égal à $\frac{P}{r+r'-1} + p' \frac{P}{r+r'-2} \dots + \frac{P'}{p'} \frac{P}{r+r'-p-1}$; mais le coefficient du terme correspondant de $V^q . (v + e)^{p'}$, est $\frac{P}{r} \frac{P'}{r'-1} + \frac{P}{r-1} \frac{P'}{r'}$ + $\frac{P}{r-2} \frac{P'}{r'+1} \dots + \frac{P}{r+r'-1-p'} \frac{P'}{p'}$; V^{q+1} surpassera donc V^q de la quantité $v^{p+p'+1-r-r'} e^{r+r'-1}$. $(\frac{P}{r+r'-1} + p' \frac{P}{r+r'-2} \dots + \frac{P'}{r'-2} \frac{P}{r+1})$; 3.° on aura de même un troisième terme, dont V^{q+2} surpassera V^q , égal à $v^{p+p'+2-r-r'} e^{r+r'-2}$. $(\frac{P}{r+r'-2} + p' \frac{P}{r+r'-3} \dots + \frac{P'}{r'-3} \frac{P}{r+1})$, & ainsi de

G

suite jusqu'au terme $v^{p+p'-r} e^r$ exclusivement, ce qui donne r' termes de ce genre.

Mais il y a aussi des termes dans $V^q . (v + e)^{p'}$, qui ne sont point dans V^{q+1} . 1.° Le terme $\frac{p}{r} v^{p-r} e^{r+p'}$; 2.° les termes $(\frac{p}{r} p' + \frac{p}{r-1}) v^{p-r+1} e^{r+p'-1}$; 3.° les termes $(\frac{p}{r} \frac{p'}{2} + \frac{p}{r-1} p' + \frac{p}{r-2}) v^{p-r+2} e^{r+p'-2}$, & ainsi de suite jusqu'au terme $v^{p+p'-r-r'} e^{r+r'}$ exclusivement, ce qui donne $p' - r'$ termes de ce genre; de-là nous tirerons $V^{q+1} - V^q = v^{p-r} e^{r+1} \frac{p}{r+1}$

$$\begin{aligned} & \left[v^{p'-1} + \left(\frac{p-r-1}{r+2} + p' \right) v^{p'-2} e + \left[\frac{(p-r-1) \cdot (p-r-2)}{(r+2) \cdot (r+3)} + p' \frac{p-r-1}{r+2} + \frac{p'}{2} \right] v^{p'-3} e^2 \dots \right. \\ & + \left[\frac{(1-r-1) \dots (p-r-r'+1)}{(r+2) \dots r+r'} + p' \cdot \frac{(p-r-1) \dots (p-r-r'+2)}{(r+2) \dots r+r'-1} \dots + \frac{p'}{r-1} \right] v^{p'-r'} e^{r'-1} \\ & - \left(\frac{r+1}{p-r} e^{p'-1} + \left[\frac{(r+1) \cdot r}{(p-r) \cdot (p-r+1)} + p' \cdot \frac{r+1}{p-r} \right] e^{p'-2} v \right. \\ & + \left[\frac{(r+1) \cdot (r-1)}{(p-r) \cdot (p-r+1) \cdot (p-r+2)} + p' \cdot \frac{r+1 \cdot r}{(p-r) \cdot (p-r+1)} + \frac{p'}{2} \cdot \frac{r+1}{p-r} \right] e^{p'-3} v^2 \dots \dots \\ & \left. + \left[\frac{(r+1) \cdot r \cdot (r-1) \dots (r+r'+2-p')}{(p-r) \cdot (p-r+1) \dots p+p'-r-r'-1} \dots + \frac{p'}{p'-r-1} \frac{r+1}{p-r} \right] e^{r'} v^{p'-r'-1} \right]; \end{aligned}$$

on tirera facilement de-là une formule générale pour toutes les hypothèses que l'on voudra calculer.

Nous ne nous y arrêterons pas plus long-temps, & nous chercherons seulement à trouver, pour ce cas général, les conclusions relatives aux limites de v , que nous avons trouvées dans la cinquième hypothèse. Pour cela, nous observerons d'abord qu'on peut, au lieu de m mettre $2m$, & au lieu de q' & q'' , mettre $2q'$ & $2q''$, ou $2q' + 1$ & $2q'' + 1$. Il est aisé de voir que l'on aura des résultats absolument semblables, en mettant $2m + 1$ au lieu de m ; dans la première supposition, le dernier terme de V^q deviendra

$$\frac{(2m+n) \cdot q + 2q'}{(m+n) \cdot q + q' + q'' - 1} v^{mq+q'-q''+1} e^{(m+n) \cdot q + q' + q'' - 1},$$

ou $\frac{(2m+n) \cdot q + 2q' + 1}{(m+n) \cdot q + q' + q''} v^{mq+q'-q''+1} e^{(m+n) \cdot q + q' + q''}$, ce qui

donne $p' = 2m + n$ & $r' = m + n$, $p - r = mq + q' - q'' + 1$,
 $r = (m + n) \cdot q + q' + q'' - 1$, ou $(m + n) \cdot q + q' + q''$,
 selon que l'on a pris $2q'$ ou $2q' + 1$.

Toutes les fois que le dernier terme, celui qui répond à $q = \frac{1}{0}$, est négatif, il doit arriver nécessairement que la valeur de V^q ne peut jamais s'élever au-dessus d'une certaine grandeur plus petite que 1; & qu'après l'avoir atteinte, elle diminuera continuellement à mesure que q augmentera.

Nous allons donc chercher d'abord la valeur de ce dernier terme. Il est évident qu'on peut, à cause de $q = \frac{1}{0}$, dans le coefficient de v^{p-r} , e^r de la valeur de $V^{q+1} - V^q$, regarder q' & q'' comme nuls, & faire disparaître q qui se trouve à tous les termes. La formule trouvée ci-dessus, divisée par son facteur simple, se réduira donc alors, pour la partie positive, à

$$v^{2m+n-1} + \left(\frac{m}{m+n} + 2m + n\right) v^{2m+n-2} e$$

$$+ \left[\left(\frac{m}{m+n}\right)^2 + \frac{m}{n+m} \cdot (2m + n) + \frac{2m+n}{2}\right] v^{2m+n-3} e^2 \dots$$

$$+ \left[\left(\frac{m}{n+m}\right)^{n+m-1} + (2m + n) \cdot \left(\frac{m}{n+m}\right)^{n+m-2} + \frac{2m+n}{2}\right. \\ \left. \left(\frac{m}{n+m}\right)^{n+m-3} \dots \dots \dots + \frac{2m+n}{n+m-1}\right] v^m e^{m+n-1},$$

qui, ordonnée par rapport aux termes 1, $2m + n$, $\frac{2m+n}{2}$, $\frac{2m+n}{3}$, &c. devient

$$v^{2m+n-1} \left[1 + \frac{m}{m+n} \frac{e}{v} + \left(\frac{m}{m+n}\right)^2 \cdot \frac{e^2}{v^2} \dots + \frac{m}{m+n} \frac{e^{m+n-1}}{v^{m+n-1}} \left(\frac{e}{v}\right)^{n+m-3} \right.$$

$$+ \left[\frac{e}{v} + \frac{m}{n+m} \cdot \frac{e^2}{v^2} + \left(\frac{m}{n+m}\right)^2 \cdot \frac{e^3}{v^3} \dots \dots \dots \right.$$

$$+ \left(\frac{m}{n+m}\right)^{n+m-2} \cdot \left(\frac{e}{v}\right)^{n+m-1} \left. \right] (2m+n) + \left[\frac{e^2}{v^2} + \frac{m}{m+n} \frac{e^3}{v^3} \dots \dots \right.$$

$$\left. + \left(\frac{m}{m+n}\right)^{n+m-3} \left(\frac{e}{v}\right)^{n+m-1} \right] \frac{2m+n}{2} \dots + \left(\frac{e}{v}\right)^{n+m-1} \frac{2m+n}{n+m-1} \left. \right]$$

G ij

De même la partie négative fera $\frac{m+n}{m} e^{2n+m-1}$
 $+ [(\frac{n+m}{m})^2 + \frac{m+n}{m} \cdot (2m+n)] e^{2n+m-2} v$
 $+ [(\frac{n+m}{m})^3 + (2m+n) \cdot (\frac{n+m}{m})^2 + \frac{n+m}{m} \cdot \frac{2m+n}{2}] e^{2n+m-3} v^2 \dots$
 $+ [(\frac{n+m}{m})^m \dots \dots \dots + \frac{2m+n}{m-1}] e^{n+m} v^{m-1}$, qui,
ordonnée de même, donne

$$e^{2n+m-1} \left[\frac{n+m}{m} + (\frac{n+m}{m})^2 \frac{v}{e} \dots \dots \dots + (\frac{n+m}{m})^m (\frac{v}{e})^{m-1} \right]$$

$$+ \left[\frac{n+m}{m} \cdot \frac{v}{e} \dots \dots \dots + (\frac{n+m}{m})^{m-1} (\frac{v}{e})^{m-1} \right] (2m+n) \dots$$

$$+ \frac{m+n}{n} (\frac{v}{e})^{m-1} \cdot \frac{2m+n}{m-1} \Big].$$

Sommant ces différentes suites géométriques, on aura

$$v^{2m+n-1} \left\{ \left(1 + \frac{e}{v}\right)^{2m+n} - \frac{2m+n}{m+n} \left(\frac{e}{v}\right)^{m+n} - \frac{\left(\frac{e}{v}\right)^{m+n}}{\left(\frac{n+m}{m}\right)^{m+n}} \left[\left(1 + \frac{n+m}{m}\right)^{2m+n} - \frac{2m+n}{m+n} \left(\frac{n+m}{m}\right)^{m+n} \right] \right\}$$

$$1 - \frac{e}{v} \left(\frac{m}{n+m}\right)$$

formule où l'on voit que $\frac{e}{v}$ & $\frac{n+m}{m}$ entrent semblablement avec des signes contraires, & qu'ainsi $\frac{e}{v} = \frac{n+m}{m}$ rend le numérateur = 0.

A la vérité, cette solution rend aussi le dénominateur = 0; mais en employant les méthodes connues, on trouvera facilement que cette valeur de $\frac{e}{v}$ rend réellement la fonction égale à zéro. On s'en assurera également en mettant $\frac{m+n}{m}$ au lieu de $\frac{e}{v}$. En effet, la formule ci-dessus devient alors de la forme $(m+n) \cdot v^{2m+n-1} + (m+n-1) \cdot v^{2m+n-2} e$.
 $\frac{2m+n}{1} + (m+n-2) \cdot v^{2m+n-3} e^2 \cdot \frac{2m+n}{2} \dots$

$$+ v^m e^{n+m-1} \frac{2m+n}{m+n-1} - v^{m-2} e^{n+m-1} \cdot \frac{2m+n}{m+n-1} \\ - 2 v^{m-3} e^{n+m-1} \frac{2m+n}{m+n+2} \dots \dots \dots - m \cdot \frac{e^{2m+n}}{v},$$

en mettant $\frac{2m+n}{m+n+1} \frac{2m+n}{m+n+2}$ au lieu de $\frac{2m+n}{m-1}$

$$\frac{2m+n}{m-2}.$$

Or il est aisé de voir que cette fonction est égale à

$$v^m \cdot \frac{\partial \left[\frac{(v+e)^{2m+n}}{v^m} \right]}{\partial v} \quad \& \quad \frac{\partial \left[\frac{(v+e)^{2m+n}}{v^m} \right]}{\partial v}$$

$$= \frac{(2m+n) \cdot v \cdot (v+e)^{2m+n-1} - m \cdot (v+e)^{2m+n}}{v^{m+1}},$$

fonction qui devient zéro quand $(2m+n) \cdot v = m \cdot (v+e)$, ou $\frac{e}{v} = \frac{m+n}{m}$, ou $v = \frac{m}{2m+n}$. Ainsi toutes les fois que $v > \frac{m}{2m+n}$, il y aura toujours un terme où V^q augmentera en même-temps que q , ce qui n'arrivera point lorsque $v = < \frac{m}{2m+n}$, & on trouvera, comme ci-dessus, que si $q = \frac{1}{5}$, on aura $V^{\frac{1}{5}} = 1$, si $v > \frac{m}{2m+n}$; $V^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$, si $v = \frac{m}{2m+n}$; & $V^{\frac{1}{5}} = 0$, si $v < \frac{m}{2m+n}$.

Si maintenant nous cherchons V'^q dans les mêmes hypothèses, nous trouverons qu'on aura le dernier terme de V'^q en changeant v en e dans la valeur du dernier terme de V^q , & changeant aussi les signes. Nous aurons donc ici pour limites $v = \frac{m+n}{2m+n}$, & $V'^{\frac{1}{5}} = 1$, $V'^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}$, $V'^{\frac{1}{5}} = 0$, selon que $v > = < \frac{m+n}{2m+n}$.

Il suit de ce que nous venons d'établir, 1.° que lorsque q est un très-grand nombre, on peut, quoique v soit très-petit, s'assurer que V^q sera très-grand, en exigeant une très-grande

pluralité; 2.^o que dans ce même cas, V'' deviendra très-petit. Ainsi on peut appliquer à ce cas général les réflexions que nous avons faites ci-dessus pour la quatrième hypothèse, qui répond au cas de $m = 1$, $n = 1$. Elles s'appliquent également à la cinquième.

Dans cette sixième hypothèse, il est aisé de voir que si le jugement est rendu à la pluralité exigée, la probabilité pour v sera $\frac{V''}{V'' + E''}$, & qu'ainsi tant que $v > e$, elle sera plus grande que $\frac{1}{2}$. Si on fait à quelle pluralité il a été rendu, soit q , cette pluralité, la probabilité sera $\frac{v^q}{v^q + e^q}$; & pour la plus petite pluralité possible, elle sera $\frac{v^{q+1}}{v^{q+1} + e^{q+1}}$.

On peut, dans les différentes hypothèses que nous avons examinées jusqu'ici, faire une autre supposition, c'est-à-dire, exiger, pour prononcer pour ou contre un parti, que la pluralité soit ou d'un nombre fixe ou d'un nombre proportionnel de voix; & ce cas se subdivise en deux autres; le premier où l'on regarde l'affaire comme indécise, le second où l'on retourne à prendre les voix jusqu'à ce qu'on ait obtenu cette pluralité. Ces deux cas nous donneront la septième & la huitième hypothèse.

S E P T I È M E H Y P O T H È S E.

La septième hypothèse ne peut avoir lieu que lorsqu'on doit choisir entre deux partis contraires, entre lesquels il y a un milieu, & que cet avis moyen n'exigeant aucun changement, ne peut pas être censé former une opinion; autrement il y auroit réellement trois espèces d'opinions, ou du moins deux opinions, & celle de ne rien décider.

Cependant ce cas peut exister, par exemple, si l'on délibère sur deux manières opposées ou différentes, de faire une chose,

de l'utilité de laquelle on est convenu en général. Supposons qu'on soit convenu de la nécessité de réformer les loix criminelles d'un tel pays, & qu'on ait chargé un corps particulier de cette réforme; on peut statuer que les questions qui se présentent à résoudre sur cet objet, ne seront regardées comme décidées que lorsque l'opinion prépondérante aura en sa faveur une certaine pluralité, en remettant la décision à un autre temps si cette pluralité ne se trouve pas, ou bien en la renvoyant à la décision d'une autre assemblée.

Dans ce cas, il est clair que la probabilité de v sera encore exprimée en général par $\frac{V'^q}{V'^q + E'^q}$, celle de e par $\frac{E'^q}{V'^q + E'^q}$; & si on y fait entrer la probabilité qu'il n'y aura pas de décision, on aura pour v la probabilité V'^q , pour e la probabilité E'^q , & pour la non-décision, la probabilité $1 - V'^q - E'^q$; d'où l'on verra que pour avoir dans ce cas une grande probabilité d'avoir une décision conforme à la vérité, il faudra que V'^q approche très-près de l'unité.

HUITIÈME HYPOTHÈSE.

Le cas qui se rapporte à la seconde hypothèse, a lieu plus fréquemment dans la réalité, c'est celui de la Jurisprudence criminelle angloise. Il est aisé de voir dans ce cas que V'^q est la probabilité de v pour la première décision, E'^q celle de e , & $1 - V'^q - E'^q$ celle de la non-décision. Donc au second vœu la probabilité de v sera $V'^q + (1 - V'^q - E'^q) \cdot V'^q$, celle de e sera $E'^q + (1 - V'^q - E'^q) \cdot E'^q$, & celle de la non-décision $(1 - V'^q - E'^q)^2$, & ainsi de suite. La probabilité de v sera donc à la fin, en supposant le nombre des vœux = n , $V'^q \cdot \frac{1 - (1 - V'^q - E'^q)^n}{V'^q + E'^q}$, celle de e sera $E'^q \cdot \frac{1 - (1 - V'^q - E'^q)^n}{V'^q + E'^q}$; en sorte que la décision étant portée, on aura $\frac{V'^q}{V'^q + E'^q}$ pour la probabilité pour v , &

$\frac{E^n}{V^n + E^n}$ pour celle de e , quel que soit n . Cette conclusion paroît d'abord paradoxale. En effet, supposons que la pluralité exigée soit l'unanimité, on aura toujours la probabilité de v exprimée par $\frac{v^n}{v^n + e^n}$, q étant le nombre des Votans, & la probabilité de e par $\frac{e^n}{v^n + e^n}$. Or il paroît absurde de

supposer que la décision rendue à l'unanimité, après avoir pris cent fois les suffrages, soit aussi probable que celle qui auroit obtenu l'unanimité au premier suffrage. Mais il faut observer ici que nous supposons le rapport de v à e constant, & dans ce cas notre conclusion est exacte. Cette hypothèse est la même que celle où supposant une urne où l'on fait qu'il y a v boules blanches & e boules noires, on demanderoit, dans le cas où l'on sauroit qu'on a tiré q boules toutes blanches ou toutes noires, quelle est la probabilité que ces boules sont blanches ou qu'elles sont noires; mais dans la réalité v & e ne sont pas constans, même pour les mêmes personnes, & cette supposition change la solution du problème.

Nous nous réservons à examiner dans une autre partie le cas où v & e ne sont pas regardés comme constans, & ce n'est qu'alors que nous pourrons tirer quelques conclusions sur cette manière de former les décisions.

On peut encore supposer qu'il y ait un certain nombre de Votans qui ne donnent aucune voix; c'est un usage dans plusieurs assemblées qui décident par scrutin. Si l'on pouvoit en général supposer dans ce cas, que les différens nombres de ces voix nulles sont également possibles, il seroit facile de tirer de ce que nous avons dit les formules qui conviennent à ce cas; mais une telle supposition n'est pas admissible. Ce cas rentre donc dans celui où les voix ne sont plus partagées en deux, mais en plus grand nombre d'avis. Nous traiterons cette question à la fin de cette première Partie.

NEUVIÈME

NEUVIÈME HYPOTHÈSE.

Jusqu'ici nous avons supposé un seul Tribunal ; dans plusieurs pays cependant on fait juger la même affaire par plusieurs Tribunaux , ou plusieurs fois par le même , mais d'après une nouvelle instruction , jusqu'à ce qu'on ait obtenu un certain nombre de décisions conformes. Cette hypothèse se subdivise en plusieurs cas différens que nous allons examiner séparément. En effet , on peut exiger , 1.° l'unanimité de ces décisions ; 2.° une certaine loi de pluralité , formée ou par un nombre absolu , ou par un nombre proportionnel au nombre des décisions prises ; 3.° un certain nombre consécutif de décisions conformes. Quand la forme des Tribunaux est telle , que la décision peut être nulle , comme dans la septième hypothèse , il faut avoir égard aux décisions nulles. Enfin il faut examiner ces différens cas , en supposant le nombre de ces décisions successives , ou comme déterminé , ou comme indéfini.

Les quantités V, E, V', E', v, e, q , auront ici la même signification que ci-dessus , & nous ne considérerons que le cas où les Tribunaux sont égaux absolument ; nous comparerons ensuite cette méthode , de prendre les décisions avec celle qui n'emploie qu'un seul Tribunal , & où l'on ne cherche qu'une seule décision.

Premier Cas.

On exige l'unanimité de la décision dans r Tribunaux. La probabilité que la vérité sera condamnée dans un seul Tribunal , est E'^q , & ainsi la probabilité qu'elle sera condamnée dans r Tribunaux , sera $(E'^q)^r$. La probabilité que la décision sera conforme à la vérité dans un Tribunal , est V'^q , & par conséquent qu'elle y sera conforme dans r Tribunaux , est $(V'^q)^r$; & la probabilité qu'il n'y aura aucune décision , est $1 - (V'^q)^r - (E'^q)^r$.

Comme les Tribunaux sont supposés semblables , il faut comparer ces probabilités avec celles qui se trouveroient pour

H

un Tribunal de rq Juges, c'est-à-dire, avec V'^{qr} , E'^{qr} ,
 $1 - V'^{qr} - E'^{qr}$, en exigeant la pluralité de $(nq + q^n)r$
 si la pluralité exigée est $(nq + q^n)$ pour chaque Tribunal.
 Cela posé, il est clair que tous les termes qui entrent dans
 $(V'^q)^r$, entreront dans V'^{qr} , mais qu'il y en aura dans V'^{qr}
 qui ne se trouveront pas dans $(V'^q)^r$, & qu'il en sera de
 même pour $(E'^q)^r$ comparé à E'^{qr} ; d'où il résulte que V'
 & E' seront plus grands, en n'employant qu'un seul Tribunal,
 & $1 - V' - E'$ plus petit. On peut demander mainte-
 nant si $\frac{V'^{qr}}{E'^{qr}} > < \frac{(V'^q)^r}{(E'^q)^r}$, ou $V'^{qr} \cdot (E'^q)^r > < (V'^q)^r \cdot E'^{qr}$.

Comparant ces formules, on trouvera qu'elles contiennent
 toutes deux les mêmes puissances de v & de e , qu'elles sont
 de plus semblables, & se changent l'une en l'autre en mettant
 v pour e , & réciproquement; qu'enfin dans $V'^{qr} (E'^q)^r$ les
 coefficients des termes où l'exposant de v surpasse celui de e ,
 sont plus petits que dans $E'^{qr} (V'^q)^r$, & réciproquement;
 d'où il résulte que si on a $v > e$, on aura $V'^{qr} (E'^q)^r$
 $< E'^{qr} (V'^q)^r$, & au contraire si $e > v$.

Ainsi dans ce cas, en prenant r Tribunaux de $(m+n) \cdot q$
 Juges, au lieu d'un Tribunal de $r (m+n)q$ Juges, avec
 des pluralités proportionnelles, on aura, 1.° moins de proba-
 bilité d'avoir une décision; 2.° plus de probabilité, s'il y
 en a une, qu'elle sera en faveur de la vérité; 3.° que la
 probabilité que la vérité ne sera pas condamnée, devient plus
 grande dans le cas que nous considérons ici. Ces conclusions
 suffisent pour en déduire les avantages ou les inconvénients
 de cette forme de Tribunaux.

En effet, il est aisé de voir que l'on ne diminue point ici
 le nombre des Juges; & que si l'on augmente l'avantage
 d'avoir moins à craindre que la vérité ne soit condamnée,
 c'est en diminuant la probabilité qu'il y aura une décision,
 ce qu'on ferait également en exigeant une pluralité plus forte
 dans un nombre égal de Juges, ou même dans un moindre
 nombre.

.. Si on cherche la plus petite probabilité possible pour le

cas où l'on ne connoît pas encore à quelle pluralité le jugement a été rendu, on aura $\frac{v^q}{v^q + e^q}$ & $\frac{e^q}{v^q + e^q}$ pour la plus petite probabilité que chaque jugement sera conforme ou contraire à la vérité, q étant la plus petite pluralité nécessaire pour former une décision, & par conséquent $\frac{v^{qr}}{v^{qr} + e^{qr}}$, $\frac{e^{qr}}{v^{qr} + e^{qr}}$, que la décision des r Tribunaux sera conforme ou contraire à la vérité, précisément comme si l'on avoit exigé d'un seul Tribunal la pluralité q^r .

Si on connoît la pluralité de chaque décision, alors on aura, $q', q'', q''' \dots q^{(r)}$ étant ces pluralités, les probabilités $\frac{v^{q'}}{v^{q'} + e^{q'}}$, $\frac{v^{q''}}{v^{q''} + e^{q''}}$ $\frac{v^{q^{(r)}}}{v^{q^{(r)}} + e^{q^{(r)}}$ pour chacune des décisions, & pour les r décisions $\frac{v^{q' + q'' + \dots + q^{(r)}}}{v^{q' + q'' + \dots + q^{(r)}} + e^{q' + q'' + \dots + q^{(r)}}$,

c'est-à-dire, la même que si les Tribunaux réunis avoient jugé à une pluralité égale à la somme de leurs pluralités particulières,

Nous avons supposé que l'on comptoit comme rendues en faveur du parti le plus favorable les décisions qui n'auroient pas la pluralité exigée. Dans ce cas, les formules pour la plus petite probabilité ne s'appliquent qu'aux jugemens où la décision est contre ce parti. Mais on peut aussi regarder ces décisions comme nulles, & dans ce cas on peut regarder l'unanimité comme rompue s'il y a de ces décisions, ou seulement compter, relativement à l'unanimité, les décisions qui ont la pluralité exigée. Dans le 1.^{er} cas, on aura, comme on l'a vu ci-dessus, la probabilité $(V')^r$ pour v , & la probabilité $(E')^r$ pour e , & $1 - (V')^r - (E')^r$ pour les cas où il n'y a pas de décision. Mais il n'en est pas de même si l'on exige seulement l'unanimité des décisions pour ou contre; on aura dans ce cas $(1 - E')^r - (1 - V' - E')^r$ pour v , & $(1 - V')^r - (1 - V' - E')^r$ pour e , & $1 + 2 \cdot (1 - V' - E')^r - (1 - E')^r - (1 - V')^r$

H ij

pour la probabilité qu'il n'y a pas de décision. Dans le premier de ces deux cas, la plus petite probabilité possible se trouve comme ci-dessus, mais dans le second elle est, q' étant la

pluralité exigée, $\frac{w^r \cdot e^{(r-1)} \cdot (q'-2)}{w^r \cdot e^{(r-1)} \cdot (q'-2) + e^r \cdot w^{(r-1)} \cdot (q'-2)}$, c'est-à-dire,

qu'elle peut être moindre que $\frac{1}{2}$, quoique $w > e$, ce qui doit faire rejeter cette dernière forme de jugement, à moins qu'on n'exige que la pluralité ait lieu dans r' décisions, & que $q'r' > (r-r')(q'-2)$. Pour les autres cas de la neuvième hypothèse, la supposition de décisions regardées comme nulles, sera discutée lorsque nous examinerons celle où l'on considère trois décisions.

Si c'est un même Tribunal dont on exige le jugement, le résultat sera le même dans la spéculation; c'est-à-dire, en supposant w & e toujours les mêmes, mais cette hypothèse n'est pas admissible ici. Ainsi nous renverrons encore cette question à une autre Partie.

Deuxième Cas.

On peut supposer dans ce second cas le nombre de décisions fini, ou ce nombre indéfini.

Soit d'abord ce nombre fini & égal à r , & soit $r - r'$ le nombre de décisions exigées, & qu'on cherche $V \cdot E'$, & V , nous trouverons d'abord que la probabilité qu'une décision sera conforme à la vérité, sera exprimée par V'^q ; & celle qu'elle sera conforme à l'erreur, par E'^q , & pour $r - r'$ décisions en faveur de v , V'^r pris dans cette hypothèse, en mettant V'^q au lieu de v , & $1 - V'^q$ au lieu de e , exprimera la probabilité que la décision sera conforme à la vérité, & de même E'^r , pris en mettant E'^q pour e , & $1 - E'^q$ pour v , exprimera la probabilité de $r - r'$ décisions contraires à la vérité.

Pour trouver la valeur de V , on trouvera d'abord pour une décision V^q , & pour r décisions $V^{r-r'}$, en mettant V^q pour v , & $1 - V^q$ pour e . Cela posé, pour comparer ce cas avec celui d'un seul Tribunal, il faudra

supposer que ce Tribunal est formé de qr Votans, & que le nombre de voix exigé, est $(q - q') \cdot (r - r')$, en sorte que nous aurons ici V''^q au lieu de V''^r dans le cas du nombre de voix exigé $(q - q') \cdot (r - r')$, & de même pour E' & V ; & il est aisé de voir que V''^q contiendra tous les termes contenus dans V''^r , & en contiendra qui ne s'y trouveront pas. Donc $V''^q > V''^r$. De même $E''^q > E''^r$, & par conséquent $V''^q < V''^r$, ce qu'il est aisé de conclure d'ailleurs de ce que V''^q contient tous les termes où l'exposant de $e < r'q'$, & que V''^r , outre ces termes, en contient où l'exposant de e est plus grand. Ainsi dans cette hypothèse on augmente la probabilité que la vérité ne sera pas condamnée, mais c'est seulement en augmentant la probabilité que la pluralité exigée n'aura pas lieu, & on diminue par conséquent la probabilité d'avoir une décision conforme à la vérité.

On trouveroit comme ci-dessus, $\frac{V''^r}{E''^r} > \frac{V''^q}{E''^q}$, ce qui est un avantage, puisque l'espérance d'avoir une décision conforme à la vérité, diminue en moindre rapport que la crainte d'avoir une décision conforme à l'erreur. Mais cet avantage n'a lieu que parce que la probabilité d'avoir une décision quelconque, diminue en même-temps. Cette forme de décision ne présente donc aucun avantage qu'on ne puisse se procurer par une seule décision avec un nombre de Votans égal ou moindre, pourvu qu'on exige une pluralité plus grande.

Si on cherche maintenant dans cette hypothèse la plus petite probabilité avant que l'on connoisse le jugement, il est clair qu'il faudra d'abord supposer que la pluralité des décisions en faveur de v , est la moindre qu'il est possible, c'est-à-dire, de $r - r'$ décisions pour v , & de r' pour e ; & soit q le nombre des Votans, & q' la pluralité la plus petite pour chaque Tribunal, il faudra supposer les r' décisions rendues à la pluralité q , & les $r - r'$ à la pluralité q' . La plus petite

probabilité sera $\frac{v^{q' \cdot (r - r')} e^{q' r}}{v^{q' \cdot (r - r')} e^{q' r} + v^{q' r} e^{q' \cdot (r - r')}} \cdot$ Ainsi il sera

possible ici que cette probabilité la plus petite soit au-dessous de $\frac{1}{2}$, ce qui auroit lieu si on avoit $v^{q'} \cdot (r-r') e^{q'r'}$ < $v^{q'} e^{q'} \cdot (r-r')$, c'est-à-dire, à cause de $v > e$, seulement lorsque $q' r < (q + q') \cdot r'$, ou $\frac{q}{q+q'} < \frac{r}{r}$. Par exemple, si l'on suppose vingt Votans, cinq Tribunaux, & qu'on exige la décision de quatre Tribunaux pour condamner, & la pluralité de quatre Votans pour la décision de chaque Tribunal, ce qui paroît avantageux pour une décision conforme à la vérité, on aura $q' r = 20 < (q + q') \cdot r' = 24$, & la plus petite probabilité sera $\frac{v^{16} e^{20}}{v^{16} e^{20} + v^{20} e^{16}}$ ou $\frac{e^4}{v^4 + e^4}$, qui est au-dessous de $\frac{1}{2}$. Supposons $v = \frac{9}{10}$, cette plus petite probabilité deviendra $\frac{1}{6561}$, & il sera possible qu'il y ait une probabilité de 6561 contre 1 qu'un jugement rendu sous cette forme soit injuste, ce qui suffiroit pour la faire proscrire, quelqu'avantageuse qu'elle paroisse d'ailleurs.

Si le jugement est porté, soit $r - r'$ le nombre des décisions qui l'emportent, r' le nombre des décisions contraires, $q', q'', q''' \dots q^{m-r-r'}$ les pluralités pour v , $q_1, q_2, q_3 \dots q_m$ les pluralités pour e , nous aurons pour la plus petite probabilité

$$\frac{v^{q'+q''+\dots+q^{m-r-r'}} e^{q_1+q_2+\dots+q_m}}{v^{q'+q''+\dots+q^{m-r-r'}} e^{q_1+q_2+\dots+q_m} + v^{q_1+\dots+q_m} e^{q'+q''+\dots+q^{m-r-r'}}$$

qui sera au-dessous de $\frac{1}{2}$ toutes les fois que $q_1 + q_2 + q_3 \dots + q_m > q' + q'' + q''' \dots + q^{m-r-r'}$, c'est-à-dire, que la somme des pluralités en faveur de la décision, sera plus petite que la somme des pluralités contraires.

Si nous supposons maintenant le nombre des décisions indéfini, c'est-à-dire, si nous supposons qu'on demande des décisions jusqu'à ce que le nombre des décisions d'un côté surpasse celui des décisions contraires d'une quantité convenue, il se présente encore deux cas; dans le premier, la pluralité peut être un nombre fixe; dans le second, elle peut être un nombre proportionnel à la totalité.

Considérons ces deux cas séparément. Soit donc d'abord deux avis dont la probabilité soit exprimée par v & e ; que $2r$ soit la pluralité exigée, il est clair qu'elle aura lieu nécessairement après un nombre pair de décisions; supposons-la deux, par exemple, elle pourra avoir lieu après deux décisions. Si elle n'a pas lieu, elle pourra l'avoir au bout de quatre, de six. Cela posé, nous trouverons en général la probabilité en faveur de v , exprimée par une série $v^{2r} [1 + 2r \cdot ev + \frac{1}{2} (2r + 3) \cdot 2r \cdot (ev)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2r+5}{2} 2r \cdot (ev)^3 \dots]$;

Mais il est aisé de voir, que dans cette série, qui est formée en retranchant des cas où la pluralité arrive après $2q$ divisions, ceux où elle est arrivée avant ce nombre, le terme $v^{2r} e^{2r} \dots$ & les suivans, contiennent des termes où l'on a pu avoir des décisions en faveur de e . Il faut donc retrancher de tous les termes $v^{2r} \cdot v^{2r+r'} e^{2r+r'} \dots$ toutes les combinaisons terminées par v^{2r} , dans lesquelles on peut avoir eu l'exposant de e , surpassant celui de v de $2r$; mais comme en considérant ces termes, on voit que l'on passe ensuite à des termes $e^{2r+r'} v^{2r+r'}$, où les combinaisons terminées par e^{2r} , peuvent donner l'exposant de v surpassant celui de e de $2r$, il faudra de nouveau ajouter tous ces termes, & ainsi de suite, & par ce moyen on formera la série qui doit représenter la probabilité de la décision en faveur de v pour un nombre fini $2q$ de décisions. Nous l'appellerons V_r^{2q} .

Si on la cherche pour $q = \frac{1}{2}$, on trouvera d'abord la série ci-dessus égale à l'unité; & ensuite supposant connue la suite des termes de E_r^{2q} , on trouvera qu'il faut retrancher de ce premier terme tous les termes de cette série E_r^{2q} , en observant qu'ils sont tous multipliés par un terme semblable au premier ci-dessus, mais pris en supposant pour v une pluralité de $4r$. En effet, il est aisé de voir que les termes ayant cette condition, sont les seuls où l'on puisse avoir la pluralité pour e d'abord, & ensuite pour v . Or, cette série est encore égale à l'unité; nous aurons donc pour $q = \frac{1}{2}$, $V_r^{2q} = 1 - E_r^{2q}$.

Si nous cherchons maintenant par la même méthode $E_r'^q$, nous aurons d'abord la première série égale à $\frac{e^{qr}}{v^{qr}}$, de laquelle il faudra retrancher $V_r'^q$, multiplié par une série, dont la somme est $\frac{e^{qr}}{v^{qr}}$. Nous aurons donc $E_r'^q = \frac{e^{qr}}{v^{qr}} - V_r'^q \cdot \frac{e^{qr}}{v^{qr}}$; d'où l'on tire à cause de $1 = V_r'^q + E_r'^q$,

$$V_r'^q = \frac{1 - \frac{e^{qr}}{v^{qr}}}{1 - \frac{e^{qr}}{v^{qr}}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{qr}}{v^{qr}}} = \frac{v^{qr}}{v^{qr} + e^{qr}}, \quad \& \quad E_r'^q = \frac{e^{qr}}{v^{qr} + e^{qr}}.$$

Nous aurions pu parvenir à ce résultat par une méthode plus simple. En effet, il est aisé de voir que l'on aura $V_r'^q = v^{qr} [1 + a.ev + b.(ev)^2 + c.(ev)^3 \dots + (q)(ev)^{2q-2r} \dots]$, $E_r'^q = e^r [1 + a.ev + b.(ev)^2 + c.(ev)^3 \dots + (q)(ev)^{2q-2r} \dots]$; d'où l'on voit que l'on aura toujours, quel que soit le nombre des décisions, $\frac{V_r'^q}{E_r'^q} = \frac{v^{qr}}{e^{qr}}$, & qu'il n'y aura de différence que dans la probabilité d'obtenir l'une ou l'autre; probabilité qui croît continuellement.

Maintenant il faut observer, 1.^o que v & e représentent ici la probabilité non d'une seule voix, mais de la décision d'un Tribunal, & que l'on regarde la décision de chaque Tribunal comme rendue en faveur du parti le plus favorable toutes les fois que la pluralité exigée n'a pas lieu pour l'opinion contraire. En effet, si on suppose qu'on regarde alors la décision comme nulle, on tombe dans le cas où l'on peut avoir trois décisions; 2.^o que dans ce cas par conséquent, il faut substituer V^q à v , & E^q à e ; mais qu'alors on a seulement la probabilité que la vérité ne sera pas condamnée, probabilité exprimée par $\frac{(V^q)^{qr}}{(V^q)^{qr} + (E^q)^{qr}}$; 3.^o que la probabilité

probabilité que la décision sera conforme à la vérité, sera exprimée par $\frac{(V'q)^{2r}}{(Vq)^{2r} + (E'q)^{2r}}$; celle que la décision se trouvera en faveur de la vérité, à cause de la non-décision des Tribunaux particuliers, exprimée par $\frac{(Vq)^{2r} - (V'q)^{2r}}{(Vq)^{2r} + (E'q)^{2r}}$, & celle qu'elle sera condamnée, exprimée par $\frac{(E'q)^{2r}}{(Vq)^{2r} + (E'q)^{2r}}$; en sorte que pour que l'on ait les conditions nécessaires pour avoir une espérance d'une décision conforme à la vérité, il faudra que $\frac{(V'q)^{2r}}{(Vq)^{2r} + (E'q)^{2r}}$ soit une quantité peu différente de l'unité, ce qui suppose $V'q$ très-peu différente de Vq , & d'autant moins différente que r sera plus grand.

Quant à la plus petite probabilité possible, estimée avant le jugement rendu, il est aisé de voir qu'elle doit être zéro, & qu'ainsi ce système de Tribunaux peut exposer à faire adopter un jugement dont l'injustice soit d'une probabilité aussi approchante de la certitude qu'elle peut l'être.

Nous supposons maintenant que l'on exige une pluralité de deux tiers dans les décisions successives, la probabilité de la vérité & de l'erreur de chaque décision étant toujours exprimée par v & e .

Il est aisé de voir, 1.^o qu'il faut supposer plus de trois décisions, parce que dans le cas de trois décisions seulement il doit y avoir nécessairement pour ou contre la vérité, une pluralité des deux tiers; 2.^o que pour quatre décisions, nous aurons $v^4 + 4v^3e$ pour la probabilité de v , $e^4 + 4e^3v$ pour la probabilité de e , & $6v^2e^2$ pour la non-décision; 3.^o que cinq décisions ne donnent aucun cas de plus ni pour v ni pour e ; 4.^o que pour six décisions, il faudra ajouter pour v , $6v^4e^2$, $6e^4v^2$ pour e , & il restera $12v^3e^3$ pour la non-décision; 5.^o que depuis ce terme, on n'aura de nouveaux cas en faveur de v ou de e qu'en supposant augmenté de trois en trois le nombre des décisions; 6.^o que pour neuf

décisions, nous aurons pour v , $12 v^6 e^3$, pour e , $12 e^6 v^3$; & pour la non-décision, il restera $36 v^3 e^4 + 36 v^4 e^3$; que pour douze décisions, on aura $36 v^8 e^4$ pour v , & $36 e^8 v^4$ pour e , & pour la non-décision, $36 \cdot 4 \cdot v^7 e^3 + 36 \cdot 6 \cdot v^6 e^6 + 36 \cdot 4 \cdot e^7 v^3$; en sorte qu'en général le terme qu'il faudra ajouter pour v sera le dernier terme de la formule qui exprime la probabilité de la non-décision pour le nombre précédent, multiplié par v^3 ; que celui pour e sera égal au dernier terme de la même formule, multiplié par e^3 , & la probabilité de la non-décision égale au reste de cette formule, multiplié par $(v+e)^3$, plus ces deux termes extrêmes, multipliés par $3v^2e + 3e^2v$ plus le premier multiplié par e^3 , & le dernier par v^3 ; de manière que si pour un nombre $3p$ de décisions on a la non-décision exprimée $\pi + \Pi + \pi'$, nous aurons à ajouter pour v , $v^3 \pi$, & $e^3 \pi'$ pour e , & il restera pour la non-décision $\Pi \cdot (v+e)^3 + (\pi + \pi') \cdot (3v^2e + 3e^2v) + \Pi e^3 + \Pi' v^3$. Mais comme, par la nature de la question, le nombre des décisions est indéfini, ce qu'il importe sur-tout de connoître, c'est la valeur de V pour le cas où le nombre des décisions est infini.

Pour y parvenir, nous emploïrons la même méthode que nous avons suivie ci-dessus; nous considérerons d'abord le cas où l'on obtiendrait une pluralité de deux tiers en faveur de v , sans avoir égard à ceux où, avant d'obtenir cette pluralité, on en auroit déjà une en faveur de e . La fonction qui représente cette probabilité, sera $v^4 + 4v^3e + \varphi(v^2e)$, φ étant une série ordonnée par rapport aux puissances de v^2e ; mais cette fonction est évidemment égale à l'unité lorsque $v > \frac{2}{3}$. En effet, elle ne peut pas être supérieure à l'unité; elle ne peut pas lui être inférieure, puisqu'elle renferme tous les termes, où q étant $\frac{1}{3}$, on auroit une pluralité de deux tiers (voyez ci-dessus page 39). Cela posé. faisons $v^2e = z$, nous aurons $v^4 + 4v^3e + \varphi z = 1$ tant que $v > \frac{2}{3}$, mais z est contenu entre les limites $\frac{4}{27}$ & 0, & l'on a l'équation $v^3 - v^2 = z$. Or, dans ce cas on a toujours pour v trois racines réelles, l'une négative qui ne peut servir ici, & deux positives, l'une plus grande que $\frac{2}{3}$, l'autre plus petite;

racines qui deviennent égales lorsque $z = \frac{4}{27}$. Maintenant, puisque $v^4 + 3v^3e + \varphi z = 1$ lorsque $v > \frac{2}{3}$, & que $v^4 + 3v^3e = \varphi'z$, $\varphi'z$ étant une fonction donnée de z . Il est clair que $\varphi z = 1 - \varphi'z$, avec cette condition seulement qu'il faut dans $\varphi'z$, qui contient des expressions susceptibles de plusieurs valeurs, prendre celle qui répond à la racine de l'équation $v^3 - v^2 = z$, qui donne $v > \frac{2}{3}$.

Soit donc v' une valeur de $v < \frac{2}{3}$, pour laquelle on cherche la valeur de la formule précédente, elle sera $v'^4 + 4v'^3e' + \varphi z$; mais $\varphi z = 1 - \varphi'z$, $\varphi'z$ étant ce que devient $v^4 + 3v^3e$, en mettant pour v la racine de $v^3 - v^2 = z$ plus grande que $\frac{2}{3}$, qui répond à la valeur de z , pour laquelle la racine $< \frac{2}{3}$ est v' ; on aura donc φz & la valeur cherchée de V , qui sera $v'^4 + 3v'^3e' + 1 - \varphi'z$.

Pour avoir ensuite l'expression de la formule qui donne une pluralité de deux tiers pour v avant d'en obtenir une semblable pour e , il est clair qu'il faudra retrancher de la formule précédente une série de termes de la forme $e^4 + 4e^3v + ae^4v^2 + be^6v^3 \dots$ multipliés chacun par la série des termes qui, si on les suppose arrivés après chacun des termes précédents, donneroit une pluralité en faveur de v . Ainsi le premier terme sera multiplié par la série qui donnera une pluralité $2q + 8$ en faveur de v sur $3q + 8$ décisions; le second par une série qui donnera une pluralité de $2q + 5$ en faveur de v sur $3q + 5$ décisions, & ensuite par les séries qui donneront successivement des pluralités de $2q + 6$, $2q + 9$, $2q + 12$, $2q + 15$, &c. sur $3q + 6$, $3q + 9$, $3q + 12$, $3q + 15$, &c. décisions.

Or, 1.^o si $v > \frac{2}{3}$, il est aisé de voir que toutes ces séries sont égales à l'unité; donc si V est la probabilité d'avoir la pluralité de $\frac{2}{3}$ en faveur de v avant de l'avoir en faveur de e , & E la probabilité qu'on aura la pluralité de $\frac{2}{3}$ en faveur de e avant de l'avoir en faveur de v , on aura $V = 1 - E$, $V + E = 1$, c'est-à-dire, qu'on approchera toujours de plus en plus de la probabilité d'avoir une décision, & que cette probabilité n'a que l'unité pour limites.

2.° On aura $V = v^4 + 4v^3e + \varphi z$, & $E = e^4 + 4e^3v + \varphi z'$, z étant $= v^2e$ & $z' = e^2v$. Nous aurons donc $\varphi z + \varphi z' = 1 - v^4 - 4v^3e - 4e^3v - e^4 = 6v^2e^2$, & la valeur de φ , & par conséquent de V & de E , donnée par une équation linéaire du premier ordre aux différences finies.

Mais on pourra, dans la pratique, se dispenser de la résoudre, & il est aisé de voir qu'ayant

$$\frac{V}{E} = \frac{v^4 + 4v^3e + av^2e^2 + bv^2e^3 + cv^2e^4 + \dots}{e^4 + 4e^3v + ae^2v^2 + be^2v^3 + ce^2v^4 + \dots},$$

les deux séries étant convergentes, & le rapport des termes qu'on ajoute devenant successivement $\frac{v^4}{e^4}$, $\frac{v^5}{e^5}$, &c. & par conséquent plus grand que celui des premiers termes, le rapport de V à E croîtra continuellement, & qu'ainsi pourvu que l'on ait v assez grand pour que pour les six premiers termes de la série le rapport de V à E soit fort grand, on aura en même-temps & une probabilité toujours croissante & s'approchant toujours de l'unité d'avoir la pluralité exigée, & une probabilité toujours de plus en plus grande que la décision sera en faveur de la vérité.

Soit, par exemple, $v = \frac{9}{10}$ & $e = \frac{1}{10}$, supposition qui n'est pas exagérée, puisqu'il s'agit ici non du jugement d'un seul homme, mais de celui d'un Tribunal, nous aurons

$$V = \frac{9^4}{10^4} + \frac{4 \cdot 9^3}{10^5} + \frac{6 \cdot 9^2}{10^6} + \frac{12 \cdot 9^6}{10^7} + \frac{36 \cdot 9^8}{10^{12}} \\ + \frac{144 \cdot 9^{10}}{10^{15}} + \dots; E = \frac{1}{10^4} + \frac{4 \cdot 9}{10^5} + \frac{6 \cdot 9^2}{10^6} \\ + \frac{12 \cdot 9^3}{10^7} + \frac{36 \cdot 9^4}{10^{12}} + \frac{144 \cdot 9^5}{10^{15}} + \dots$$

On trouvera qu'en faisant $V = \frac{9954}{10000}$, & $E = \frac{46}{10000}$, on s'écarte peu de la vérité, mais que V est un peu trop petit, & qu'en faisant $E = \frac{41}{10000}$ & $V = \frac{9959}{10000}$, ou plutôt $E = \frac{419}{100000}$

& $V = \frac{99581}{100,000}$, on aura E & V très-approchés, & seulement E trop petit.

Ainsi quoique nous n'ayons pas donné de méthode pour trouver les limites rigoureuses de V & de E , on pourra en approcher suffisamment pour la pratique. Par exemple, on voit ici que l'hypothèse de $v = \frac{9}{10}$, n'est pas assez favorable pour le cas où l'on voudroit $E < \frac{1}{10000}$, & qu'ainsi pour n'avoir que cette crainte d'une décision contraire à la vérité, il faudroit faire en sorte que v , c'est-à-dire, la probabilité pour chaque Tribunal, fût plus grand que $\frac{9}{10}$.

Maintenant, nous passons à examiner le cas de $v < \frac{2}{3}$ & $> \frac{1}{3}$. En effet, si $v < \frac{1}{3}$, ce cas se trouve compris dans le précédent, en changeant v en e .

Nous avons vu que dans le cas de $v < \frac{2}{3}$, nous avons la probabilité d'une pluralité de deux tiers en faveur de v , (en y comprenant ceux où l'on a auparavant obtenu une pluralité semblable en faveur de e), exprimée par $1 - v'^4 - 4v^3e' + v^4 + 4v^3e$, v' étant la valeur de $v > \frac{2}{3}$, qui est en même-temps que v , la racine de l'équation $v^3 - v^2 - z = 0$, z étant égal à v^2e . J'appellerai cette valeur V_1 , pour en tirer celle de V , ou du moins une équation entre V & E ; il faut retrancher de V_1 tous les termes où après avoir eu une pluralité de deux tiers en faveur de e , on peut obtenir une pluralité de deux tiers en faveur de v . Soit donc $E = e^4 + 4e^3v + ae^4v^2 + be^6v^3 + ce^8v^4 \dots \dots + (n)e^{2n}v^n \dots \dots$; le terme qu'il faudra retrancher sera égal à

e^4 multiplié par la série qui donne la probabilité d'avoir une pluralité en faveur de v de deux tiers plus huit voix.

Plus, le terme $4e^3v$, multiplié par la série qui donne la probabilité d'avoir en faveur de v une pluralité de deux tiers plus cinq voix.

Plus le terme ae^4v^2 , multiplié par la probabilité d'avoir en faveur de v une pluralité de deux tiers plus six voix.

Plus en général le terme $(n)e^{2n}v^n$, multiplié par la probabilité d'avoir en faveur de v une pluralité de deux tiers plus $3n$ voix.

Mais la probabilité d'avoir en faveur de v une pluralité de deux tiers plus $3n$ voix, est exprimée en général par la série $v^{3n} [1 + a'v^2e + b'v^4e^2 + \dots + (n')v^{2n'}e^{n'} + \dots]$, & cette série est égale à 1 lorsque $v > \frac{2}{3}$. Donc puisque la série qui multiplie v^{3n} , reste la même pour une même valeur de v^2e , cette série sera égale, quel que soit v , à $\frac{1}{v'^{3n}}$, v' étant la racine positive $> \frac{2}{3}$ de l'équation $v^3 - v^2 = \zeta$. La valeur de la probabilité cherchée, sera donc $\frac{v^{3n}}{v'^{3n}}$, & par conséquent

$$\text{la fonction à retrancher de } V, \text{ pour avoir } V, \text{ sera } \frac{v^3 e^4}{v'^3} + \frac{4 \cdot v^6 e^3}{v'^6} + \frac{av^8 e^4}{v'^8} + \frac{bv^{12} e^6}{v'^{12}} + \dots + (n) \frac{v^{4n} e^{2n}}{v'^{3n}}.$$

Appelant ϕ la fonction inconnue de v^2e qui est égale à V , ϕ' une fonction semblable de v'^2e^n ; v'^2e^n étant égal à $\frac{v^4 e^2}{v'^2}$, nous aurons $\phi + \phi' + \frac{v^3 e^4}{v'^3} + \frac{4 \cdot v^6 e^3}{v'^6} - v'^4 - 4v'^3 e^n = 1 - v'^4 - 4v'^3 e + v^4 + 4v^3 e$, & par conséquent la fonction cherchée ϕ par une équation aux différences finies.

En examinant la série $\frac{v^3}{v'^3} e^4 + \frac{v^6}{v'^6} 4e^3 v + \frac{v^6}{v'^6} 6e^4 v^2 + \dots$. Il est aisé de voir qu'elle est plus petite que ne le seroit la fonction $\phi e^2 v$, qui représente E , puisque $v < v'$. Donc puisque l'équation ci-dessus nous donne V plus une fonction plus petite que E égale à une quantité plus petite que l'unité, on ne peut en conclure $V + E =$ ou < 1 .

Mais on peut s'assurer, sans résoudre l'équation précédente, si cette seconde équation $V + E = 1$ a lieu ou non. En effet, si nous examinons la somme des deux séries en v & en e , nous trouverons qu'en mettant $1 - e$ au lieu de v , tous les e se détruisent terme à terme; donc cette somme est égale à 1 plus un terme où les e montent à la puissance $\frac{1}{6}$; mais ce terme est zéro non-seulement depuis $e = 0$ jusqu'à $e = \frac{1}{3}$, mais il l'est aussi depuis $e = \frac{2}{3}$ jusqu'à $e = 1$. Il sera donc aussi zéro pour les valeurs intermédiaires, & l'équation $V + E = 1$ sera vraie en général.

Dans le cas de $v = \frac{2}{3}$, on auroit trouvé plus simplement $V_1 = 1 + v^4 + 4v^3e - v'^4 - 4v'^3e' = 1$, à cause de $v' = v$; & de même la quantité à retrancher de V_1 pour avoir V , égale à E par la même raison, & par conséquent $V + E = 1$.

En général les séries qui représentent V & E seront très-convergentes, & on en aura les valeurs à très-peu près pour un petit nombre de termes; mais nous ne nous arrêterons pas plus long-temps sur cet objet, parce que v représentant ici la probabilité qu'un Tribunal formera une décision conforme à la vérité, on doit supposer toujours dans la pratique $v > \frac{2}{3}$.

Si maintenant nous cherchons à trouver la plus petite probabilité qui résulte de cette forme de décision, nous reprendrons notre formule

$$\frac{V}{E} = \frac{v^4 + 4v^3e + av^2e^2 + bv^2e^3 + cv^3e^4 + \dots}{e^4 + 4e^3v + ae^2v^2 + be^2v^3 + ce^3v^4 + \dots},$$

& nous observerons d'abord que les termes au-delà de v^3e^4, e^3v^4 , qui sont entr'eux dans les rapports $\frac{v^5}{e^5}, \frac{v^6}{e^6}$, &c. augmentent, à mesure qu'on les ajoute, le rapport de V à E ; c'est donc dans cette limite que se trouve la plus petite valeur de $\frac{V}{E}$. Soit donc $\frac{A}{B}$ sa première valeur pour quatre décisions,

$\frac{A + av^4e^4}{B + ae^4v^4}$ sera la valeur pour six décisions; & faisant

$\frac{A}{B} < > \frac{A + av^4e^2}{B + ae^4v^2}$, nous en tirerons $A \cdot e^4v^2 < > Bv^4e^2$,

ou $Ae^2 < > Bv^2$, ou $v^4e^2 + 4v^3e^3 < > e^4v^2 + 4v^3e^3$, c'est-à-dire, que le premier rapport est plus grand. Nous aurons ensuite, pour savoir si le rapport est plus grand pour

neuf décisions que pour six, $\frac{A}{B} < > \frac{A + bv^6e^3}{B + be^6v^3}$, d'où

$Ae^3 < > Bv^3$, ou $v^4e^3 + 4v^3e^4 + av^4e^5 > e^4v^3 + 4e^3v^4 + a^4v^5$, ou $3v^3e^4 + av^4e^5 < > 3v^4e^3 + av^5e^4$; donc le premier rapport est le plus petit. La

plus petite probabilité a donc lieu dans le cas où le jugement final a été formé par six décisions. Ainsi, 1.° la plus petite probabilité qu'on puisse attendre de cette forme, sera celle qui est exprimée par

$\frac{v^4 + 4v^3e + 6v^4e^2}{1 - 12v^3e^3}$; & la probabilité qu'on n'en aura pas une plus grande par $1 - 12v^3e^3$,

c'est-à-dire, en supposant $v = \frac{9}{10}$, la plus petite probabilité en faveur de v , sera

$\frac{987066}{991252}$; & la probabilité qu'on n'en aura point une plus forte, sera exprimée par

$\frac{991252}{1,000,000}$; 2.° la plus petite probabilité possible dans ce cas, aura lieu pour les termes

$4v^3e$ & $6v^4e^2$, & alors on a $V = \frac{v^2}{v^2 + e^2}$ & $E = \frac{e^2}{v^2 + e^2}$,

en sorte que la sûreté qui résulte de cette forme de Tribunaux, ne doit être estimée que comme si le jugement étoit formé par six décisions, & dans ce cas elle n'est absolument que

celle qui résulte de la probabilité $\frac{v^2}{v^2 + e^2}$.

Mais si nous examinons la probabilité relativement non aux décisions, mais à l'avis de chaque Votant, nous trouverons, comme ci-dessus, qu'il est possible que le jugement soit rendu avec une pluralité plus petite qu'aucune quantité donnée. En effet, supposons le jugement rendu par

$3n$ décisions, la probabilité sera $\frac{v^{2n}e^{2n}}{v^{2n}e^{2n} + e^{2n}v^{2n}} = \frac{1}{1 + \frac{e^2}{v^2}}$.

Soient

Soient maintenant les décisions v rendues à la plus petite pluralité possible, que nous nommerons q' , les jugemens e rendus à la plus grande, qui peut être l'unanimité, c'est-à-dire, $q > q'$, & soit v' & e' la probabilité de chaque Votant,

la probabilité sera $\frac{v'^{2nq'}e'^{1n}}{v'^{2nq'}e'^{1n} + e'^{2nq'}v'^{1n}}$, quantité $< \frac{1}{2}$ si $q' < \frac{q}{2}$.

Dans ce cas, plus on augmentera n , plus la probabilité sera petite, & elle n'aura d'autres limites que zéro, ce qui paroît devoir suffire pour faire rejeter cette forme de décision, quand bien même le cas où la décision rendue à la pluralité dans cette forme de jugement, a une probabilité au-dessous de $\frac{1}{2}$, seroit presque impossible. (Voyez pages 13 & 79). Ainsi cette forme exigeroit que la pluralité q' de chaque Tribunal fût plus grande que $\frac{1}{2}q$.

Nous n'ajouterons rien ici. Il est aisé de voir comment on trouveroit des formules pour toutes les autres hypothèses de pluralité proportionnelle, qui donneroient de même $V + E = 1$, & conduiroient à des résultats semblables.

Troisième Cas.

On exige ici un nombre donné de décisions consécutives conformes entr'elles. Ainsi soit v la probabilité de la vérité d'une décision, e la probabilité de l'erreur; on demande la probabilité d'avoir sur r décisions, p décisions consécutives, soit en faveur de v , soit en faveur de e , r étant déterminé ou indéfini.

Nous chercherons d'abord la valeur de V dans l'hypothèse où l'on auroit égard aux cas dans lesquels on auroit eu p décisions consécutives en faveur de e , & ensuite p en faveur de v .

Cela posé, soit r fini. $(v + e)^r$ exprime le nombre de toutes les combinaisons; or $(v + e)^r = v^p \cdot (v + e)^{r-p} + v^{p-1}e \cdot (v + e)^{r-p} + v^{p-2}e^2 \cdot (v + e)^{r-p+2} + v^{p-3}e^3 \cdot (v + e)^{r-p+3} + \dots + ve^p \cdot (v + e)^{r-p} + ve \cdot (v + e)^{r-2} + e \cdot (v + e)^{r-1}$. En effet, $(v + e)^r = e \cdot (v + e)^{r-1} + v \cdot (v + e)^{r-1}$.

K

$\equiv ve \cdot (v + e)^{r-2} + v^2 \cdot (v + e)^{r-2}, v^2 \cdot (v + e)^{r-2}$
 $\equiv v^2 e \cdot (v + e)^{r-3} + v^3 \cdot (v + e)^{r-3}, \& \text{ ainsi de suite}$
 jusqu'à ce qu'il ne reste plus que $v^p \cdot (v + e)^{r-p}$.

Si donc V^r est la probabilité que v arrivera p fois de suite dans r combinaisons, V^{r-1} qu'il arrivera p fois de suite dans $r - 1$ combinaisons, V^{r-2} dans $r - 2$ combinaisons, nous aurons l'équation $V^r \equiv e V^{r-1} + v e \cdot V^{r-2} + v^2 e V^{r-3} + v^3 e V^{r-4} \dots + v^{p-2} e V^{r-p+1} + v^{p-1} e V^{r-p} + v^p$, à cause de $v^p \cdot (v + e)^{r-p} \equiv v^p$.

Supposons maintenant $V^r \equiv c^r + A$, A étant une quantité indépendante de r , nous aurons, 1.° $A \equiv e(1 + v + v^2 \dots + v^{p-1}) A + v^p$, d'où, sommant la série, $A \equiv \frac{e \cdot 1 - v^p}{1 - v}$

$A + v^p$, d'où $A \equiv 1$ à cause de $e \equiv 1 - v$; 2.° nous aurons $1 \equiv \frac{e}{c^r} + \frac{v e}{c^{r-1}} + \frac{v^2 e}{c^{r-2}} \dots + \frac{v^{p-1} e}{c^{r-p+1}}$, &

faisant $\frac{v}{e} = z$, $1 \equiv \frac{e}{v} (z + z^2 \dots + z^p)$, où $\frac{v}{e} = z \cdot \frac{1 - z^p}{1 - z}$. Soient maintenant $g, g', g'' \dots g^{p-1}$

les valeurs de c^r , que donne cette équation, nous aurons $V^r \equiv 1 + C g^r + C g'^r \dots + C^{p-1} g^{p-1r}$. Il suffira donc de connoître les valeurs de V^r pour $r \equiv p, p + 1 \dots 2p - 1$ pour déterminer les p arbitraires C & avoir l'expression générale de V^r , ce qui n'a aucune difficulté, puisque $V^p \equiv v^p$, $V^{p+1} \equiv v^p + e V^p$, $V^{p+2} \equiv v^p + e V^{p+1} + v e V^p$, &c. & ainsi de suite.

Si nous cherchons maintenant la valeur de $V^{\frac{1}{2}}$, nous observerons, 1.° que pour tous les cas où z est réel & positif, on a $z > v$ à cause de l'équation $\frac{z(1 - z^p)}{1 - z} = \frac{v}{1 - v}$; 2.° que pour z réel & négatif, on a nécessairement p impair & $z^p > 1$. On a donc $z > 1$, en faisant abstraction du signe; d'où il résulte, à cause de $g \equiv \frac{v}{z}$, tous les g^r répondans à des

racines positives ou négatives réelles, égaux à zéro lorsque $r = \frac{1}{3}$; 3.^o que la racine de l'équation en z ne peut être une imaginaire simple. En effet, multipliant par $1 + z$, on auroit

$$\frac{z+z^2-e^{p+1}-z^{p+2}}{1-z^2} = \frac{v}{1-v},$$

ce qui donne, en faisant $z = a\sqrt{-1}$, ou $a = 0$, ou $a = \pm 1$. Or la première condition ne répond qu'à $v = 0$, & la seconde donneroit également,

ou $v = 0$, ou $\frac{v}{1-v}$ négatif, ce qui est contre l'hypothèse;

4.^o que si l'on suppose z de la forme $a + b\sqrt{-1}$, on ne pourra avoir dans $cz = \frac{v}{z}$ le coefficient réel commun

aux deux racines $a + b\sqrt{-1}$, $a - b\sqrt{-1}$, plus grand que l'unité, & par conséquent $\frac{v}{\sqrt{(a^2+b^2)}} > 1$, parce

qu'il en résulteroit sans cela des termes infinis dans $V^{\frac{1}{2}}$. Nous aurons donc,

$$\text{ou } \frac{v}{\sqrt{(a^2+b^2)}} < 1, \text{ ou } \frac{v}{\sqrt{(a^2+b^2)}} = 1. \text{ Or ce}$$

second cas donne $v = 0$.

Nous aurons en général, excepté pour $v = 0$, $V^r = 1$, & il est évident que, pour $v = 0$, $V^r = 0$.

Maintenant nous aurons pour déterminer V^r , en retranchant les cas où l'on a eu e p fois de suite avant d'avoir v aussi p fois de suite, $V^r = v^p + eV^{r-1} + veV^{r-2} + \dots + v^{p-1}eV^{r-p}$, mais il est aisé de voir que cette équation n'est pas exacte.

En effet, les termes répondans à e^{p-1} multiplié par un terme commençant par v , ne doivent pas entrer dans V^r , & cependant entrent dans eV^{r-1} , veV^{r-2} , &c. Il faudra donc retrancher un terme $e \cdot e^{p-1}V^{r-p} + ve \cdot e^{p-2}V^{r-p-1} + \dots$

$+ v^{p-1} \cdot e^p V^{r-p-2}$, mais les termes en V , qui dans cette seconde série commencent par e , étoient déjà retranchés dans V^{r-1} , V^{r-2} , &c. Il faut donc ajouter ici une série $e \cdot e^p \cdot V^{r-p-1} + ve \cdot e^p \cdot V^{r-p-2} + \dots$

$+ v^{p-1} \cdot e^p \cdot V^{r-p}$, mais il est aisé de voir que par la même raison, il faut retrancher de ce dernier terme une série

$e^{2p}V^{r-2p} + ve^{2p}V^{r-2p-1} \dots + v^{p-1}e^{2p}V^{r-2p+1}$,
 & ainsi de suite; en sorte que l'on a

$$\begin{aligned}
 V^r &= v^p + eV^{r-1} \dots + v^{p-1}eV^{r-p} \\
 &\quad - (e^pV^{r-p} \dots + v^{p-1}e^pV^{r-2p+1}) \\
 &\quad + e^{p+1}V^{r-p-1} \dots + v^{p-1}e^{p+1}V^{r-2p} \\
 &\quad - (e^{2p}V^{r-2p} \dots + v^{p-1}e^{2p}V^{r-3p+1}) \\
 &\quad + e^{2p+1}V^{r-2p-1} \dots + v^{p-1}e^{2p+1}V^{r-3p} \\
 &\quad - (e^{3p}V^{r-3p} \dots + v^{p-1}e^{3p}V^{r-4p+1}) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

& ainsi de suite jusqu'à V^p . Or, en considérant cette formule, il est facile de voir que les séries de deux en deux sont absolument semblables, & que chaque paire de série ne diffère de la précédente, qu'en ce qu'elle est multipliée par e^p , & qu'il faut mettre dans l'exposant de V , $r - p$ au lieu de r . On aura donc

$$\begin{aligned}
 V^{r-p} &= v^p + eV^{r-p-1} \dots + v^{p-1}eV^{r-2p} \\
 &\quad - (e^pV^{r-2p} \dots + v^{p-1}e^pV^{r-3p+1}) \\
 &\quad + e^{p+1}V^{r-2p-1} \dots + v^{p-1}e^{p+1}V^{r-3p} \\
 &\quad - \dots
 \end{aligned}$$

Multipliant par e^p , & retranchant de l'équation précédente, nous aurons

$$\begin{aligned}
 V^r - e^p V^{r-p} &= v^p - v^p v^p \\
 &\quad + eV^{r-1} + veV^{r-2} \dots + v^{p-1}eV^{r-p} \\
 &\quad - (e^pV^{r-p} + ve^pV^{r-p-1} \dots + v^{p-1}e^pV^{r-2p+1}),
 \end{aligned}$$

formule dans laquelle le terme $e^p v^p$ ne commence à se trouver que lorsque $r - p = p$, ou $r = 2p$, c'est-à-dire, qu'on aura V^r par une équation aux différences finies du $(2p - 1)$ ordre, ou V^r donné par les $2p - 1$ termes précédens.

Nous aurons E^r par une formule semblable; en changeant v en e , & réciproquement.

Si maintenant nous supposons $r = \frac{1}{2}$, nous aurons $V + E = 1$. En effet, il résulte de ce que nous avons dit

ci-dessus, que, excepté dans le cas de $v = 0$, la probabilité d'avoir v p fois de suite, sans avoir égard à ce que e ne soit pas arrivé auparavant p fois de suite, étoit égale à l'unité. Or, $V + E$ renferme tous les termes de cette première formule; donc $V + E = 1$, puisqu'il ne peut être plus grand.

On trouvera ensuite la valeur de $\frac{V}{E}$ dans ce même cas, par le moyen de l'équation précédente, & la série qui représentera la valeur de ces deux quantités, sera composée de termes dépendans chacun des $2p - 1$ termes précédens.

On pourra former encore ici les équations suivantes,

$$\begin{aligned}
 V^r &= v^p - e^p v^p \\
 &+ eV^{r-1} + veV^{r-2} \dots \dots \dots + (v^{p-1}e + e^p)V^{r-p} \\
 &- ve^p V^{r-p-1} - v^2 e^p V^{r-p-2} \dots \dots - v^{p-1} e^p V^{r-2p+1} \\
 V^{r+1} &= v^p - e^p v^p \\
 &+ eV^r + veV^{r-1} \dots \dots \dots + (v^{p-1}e + e^p)V^{r-p+1} \\
 &- ve^p V^{r-p} - v^2 e^p V^{r-p-1} \dots \dots - v^{p-1} e^p V^{r-2p+2} \\
 V^{r+1} - V^r &= eV^r - e \cdot (1-v) \cdot V^{r-1} - ve \cdot (1-v) \cdot V^{r-2} \\
 &- v^{p-2} e \cdot (1-v) \cdot V^{r-p+1} - (ve^p + v^{p-1}e) \cdot V^{r-p} \\
 &+ e^p \cdot V^{r-p+1} - e^p V^{r-p} + ve^p \cdot (1-v) \cdot V^{r-p-1} \\
 &+ v^2 e^p \cdot (1-v) \cdot V^{r-p-2} + v^{p-1} e^p V^{r-2p+1} \\
 &= e(V^r - V^{r-1}) + ve(V^{r-1} - V^{r-2}) \dots + (v^{p-1}e + e^p)(V^{r-p+1} - V^{r-p}) \\
 &- ve^p(V^{r-p} - V^{r-p-1}) \dots - v^{p-1} e^p (V^{r-2p+2} - V^{r-2p+1}),
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
 \Delta \cdot V^{r+2p-1} &= e \Delta \cdot V^{r+2p-2} + ve \Delta \cdot V^{r+2p-3} \dots \\
 &+ (v^{p-1}e + e^p) \Delta \cdot V^{r+p-1} - ve^p \Delta \cdot V^{r+p-2} \dots \\
 &- v^{p-1} e^p \Delta \cdot V^r.
 \end{aligned}$$

Résolvant ces équations, déterminant les arbitraires, on en tirera la valeur de V^r , & cette valeur donnée en général, donnera celle de $V^{\frac{1}{2}}$, ou de la valeur de V^r , en supposant le nombre des décisions indéfini.

Mais comme l'on fait déjà ici que dans le cas de $r = \frac{1}{2}$

on a $V^r + E^r = 1$; ce qu'il importe le plus de connoître, est le rapport de V^r à E^r dans ce cas. Or, en observant la manière dont ces quantités se forment, on trouvera que dans ce cas $V^r = (1 + e + e^2 + \dots + e^{r-1})v^r \phi$, & $E^r = (1 + v + v^2 + \dots + v^{r-1})e^r \phi$, ϕ étant une fonction semblable de v & de e . On aura donc

$$\frac{V^r}{E^r} = \frac{v^r}{e^r} \left(\frac{1 + e + e^2 + \dots + e^{r-1}}{1 + v + v^2 + \dots + v^{r-1}} \right) = \frac{v^r \cdot 1 - v}{e^r \cdot 1 - e} \cdot \frac{1 - e^r}{1 - v^r} < \frac{v^r}{e^r}.$$

Il est donc évident ici que plus on augmentera r , plus le rapport $\frac{V^r}{E^r}$ diminuera.

Il résulte de-là, que si l'on adopte cette forme de décisions, on aura,

1.^o Quel que soit p , une probabilité toujours croissante, & approchant sans cesse de l'unité, d'avoir une décision.

2.^o La probabilité en général que la décision sera en faveur de la vérité, sera exprimée par $\frac{v^p}{e^p} \cdot \frac{1-v}{1-e} \cdot \frac{1-e^p}{1-v^p} < \frac{v^p}{e^p}$.

3.^o Le cas le plus favorable est celui où l'on aura d'abord p décisions consécutives, sans aucun mélange.

4.^o S'il y a quelque mélange dans le cas de $p = 2$, à cause de $V^2 = v^2 \cdot (1 + e)$, $(1 + ev + ev^2 + ev^3 + \&c.)$, il est clair que le cas le plus défavorable sera celui de toutes les valeurs paires de r , où le rapport des probabilités est $\frac{v^r}{e^r} \cdot \frac{e}{v} = \frac{v}{e}$.

5.^o Si p est plus grand que 2, on pourra avoir les p décisions consécutives en faveur de v , par un terme $e^{p-1} (ve^{p-1})^r v^p$; les p décisions consécutives, supposées en faveur de e , seront alors $v^{p-1} (ev^{p-1})^r e^p$. Leur rapport sera donc $\frac{e^{p-1} \cdot e^{r(p-1)} v^{p+r}}{v^{p-1} \cdot v^{r(p-1)} e^{p+r}} = \frac{e^{(p-1)(r+1)}}{v^{(p-1)(r+1)}}$. Or, r croissant

indéfiniment, il est clair que lorsque $p > 2$, la probabilité en faveur de v pourra être plus petite qu'aucune grandeur positive donnée, d'où il résulte que dans ce cas même, en ne considérant que la suite des décisions successives, on

peut avoir une décision définitive d'une probabilité moindre qu'aucune grandeur donnée.

6.° Que si on a égard de plus à la nature de v & de e , qui représentent non l'avis d'un seul homme, mais la décision d'un Tribunal, la conclusion précédente acquiert plus de force. En effet, soit v' & e' la probabilité du suffrage de chaque Votant, que q soit leur nombre, q' plus petit que q la pluralité exigée, il peut arriver que les décisions de ces Tribunaux soient rendues à l'unanimité pour e , & à la pluralité seulement de q' pour v ; le rapport de la probabilité en faveur de la vérité de la décision finale, à la probabilité contraire, sera

donc exprimée par $\frac{e^{q \cdot (r+1)} \cdot (p-1)^{q'} \cdot q' \cdot (r+p)}{v^{q \cdot (r+1)} \cdot (p-1)^{q'} \cdot q' \cdot (r+p)}$, terme qui, pour les mêmes valeurs de r & de p , est encore plus petit.

Il en résulte que cette forme de décisions exposé à avoir des jugemens qu'on doit exécuter, malgré la plus grande probabilité qu'elles sont contraires à la vérité, ce qui suffit pour faire rejeter cette forme.

On pourroit objecter ici que cet inconvénient ne doit pas être considéré, parce qu'il est aisé de faire en sorte qu'il soit très-peu probable que ce cas ait lieu, & qu'il ne faudroit pas proscrire une forme qui auroit des avantages, parce qu'elle se trouveroit défectueuse dans certaines combinaisons extraordinaires qui ne doivent jamais avoir lieu.

Mais on peut répondre, 1.° qu'on peut éviter cet inconvénient en adoptant une autre forme, & qu'il n'est ni juste ni raisonnable de s'exposer à un risque qu'on peut éviter. L'incertitude qui naît de la possibilité que les hommes se trompent dans leurs jugemens, est inévitable ici, & les dangers auxquels cette possibilité expose, le sont par conséquent aussi. Il n'en est pas de même du danger de se soumettre à exécuter une décision dont la fausseté est très-probable; il n'a lieu que parce qu'en cherchant une plus grande sûreté par une forme très-compiquée, on s'expose à se conduire d'après la minorité & non d'après la pluralité des suffrages.

2.° Ce cas n'est pas comme celui où l'on est exposé à se tromper en se conduisant d'après l'avis de la pluralité. Dans le cas où l'on se conduit d'après l'avis de la pluralité, il peut devenir probable sur un très-grand nombre de décisions, qu'on agira une ou plusieurs fois d'après une décision contraire à la vérité; mais on a dans chaque cas particulier, pris à part, une probabilité très-grande que la décision qu'on adopte est conforme à la vérité. Dans l'autre cas au contraire, si on a une très-grande probabilité de ne pas être exposé à agir d'après une décision très-probablement fautive, il doit arriver également parmi un grand nombre de décisions que ce cas aura lieu, & dès-lors, dans ce cas particulier, on se trouve obligé d'agir d'après une décision que l'on est en droit de regarder comme fautive. Ceux qui ordonnent & ceux qui obéissent à une telle décision, seroient donc contraints d'agir contre leur conscience.

Nous nous sommes arrêtés sur cet objet, parce que cette forme de décisions est établie dans un des plus célèbres Tribunaux de l'Europe, où l'on exige trois décisions consécutives conformes entr'elles, d'où il résulte que l'on peut, même lorsque la décision définitive a lieu au bout de onze jugemens, & en supposant ces jugemens également probables;

$$\text{avoir } \frac{V}{E} = \frac{e^2(v e^2)^2 v^2}{v^2(e v^2)^2 e^2} = \frac{e}{v}.$$

Il ne nous reste plus qu'un seul cas à examiner, celui où la décision définitive est prononcée par un seul Tribunal, mais où la même question a été déjà décidée par un Tribunal inférieur.

Dans ce cas, on voit d'abord que si l'on considère la probabilité en général, & en supposant qu'on n'ait d'avance aucune connoissance de l'évènement, la probabilité sera la même que si le Tribunal supérieur jugeoit seul; mais il n'en est pas de même si l'on examine la probabilité résultante du jugement déjà connu.

Soit en effet v' & e' la probabilité de la vérité & de l'erreur pour l'opinion de chaque Votant du Tribunal inférieur,
&

& p' la pluralité du jugement qu'il a rendu, la probabilité de la vérité de ce jugement, fera $\frac{v'^p}{v'^p + e'^p}$, & celle de

l'erreur $\frac{e'^p}{v'^p + e'^p}$. Soit ensuite v & e la probabilité de la vérité & de l'erreur pour l'opinion de chaque Votant du Tribunal supérieur, & p la pluralité; la probabilité de la vérité du jugement fera $\frac{v^p}{v^p + e^p}$, & celle de l'erreur $\frac{e^p}{v^p + e^p}$.

Si les deux décisions sont conformes, on aura pour la probabilité qu'elles sont vraies, $\frac{v'^p v^p}{v'^p v^p + e'^p e^p}$, & celle de l'erreur

fera $\frac{e'^p e^p}{v'^p v^p + e'^p e^p}$. Si au contraire elles sont opposées, la probabilité de la vérité de la dernière $\frac{e'^p v^p}{e'^p v^p + v'^p e^p}$, & celle

de l'erreur fera $\frac{v'^p e^p}{e'^p v^p + v'^p e^p}$. Cela posé, il est aisé de voir

que dans le second cas la valeur de la probabilité de la vérité de la dernière décision, peut devenir plus petite que ne l'exige la sûreté publique. En effet, soit q' le nombre qui compose le Tribunal inférieur, & p la plus petite pluralité exigée dans le Tribunal supérieur, la probabilité de la décision de

ce dernier Tribunal pourra n'être que $\frac{e'^q v^p}{e'^q v^p + v'^q e^p}$, & soit

$v' = r' e'$ & $v = r e$, elle sera $\frac{r^p}{r^p + r'^q}$. Or, si $q' > p$,

cette quantité deviendra moindre qu'un demi, à moins que r ne soit plus grand que r' .

Soit a la limite de cette quantité, on aura $\frac{r^p}{r^p + r'^q} = a$,

d'où $r^p = \frac{r'^q a}{1-a}$, ou $r = r' \frac{r'^q}{p} \left(\frac{a}{1-a}\right)^{\frac{1}{p}}$. Soit ensuite p' la

plus petite pluralité de la décision du Tribunal inférieur, la

plus petite probabilité, quand les décisions seront conformes,

$$\text{se trouvera } \frac{v^p v^p}{v^p v^p + c^p c^p} = \frac{r^p r^p}{r^p r^p + 1}.$$

Supposons maintenant $q' = 5$, $p = 2$, & que l'on veuille que $a = \frac{100}{101}$, ce qui est un nombre très-petit s'il s'agit de questions importantes. Supposons encore $r' = 4$, c'est-à-dire, que la probabilité de la vérité du jugement de chaque Votant du Tribunal inférieur soit $\frac{4}{5}$, nous aurons $r = 4^{\frac{5}{2}} \cdot 100^{\frac{1}{2}} = 320$, c'est-à-dire, qu'il faudroit que la probabilité de la justesse de la décision de chaque Votant du Tribunal supérieur fût $\frac{320}{321}$, & par conséquent que les Votans du Tribunal supérieur ne se trompassent qu'une fois sur trois cents vingt-un jugemens, & ceux du Tribunal inférieur une fois sur cinq; or une telle supériorité ne peut guère se supposer.

Si au contraire $q' < p$; par exemple, si on a ici $p = 6$, on aura, en conservant tout le reste, $r = 4^{\frac{6}{6}} \cdot 100^{\frac{1}{6}} < \frac{684}{100}$.

Il suffiroit donc dans cette hypothèse, de supposer que chaque Votant du Tribunal supérieur ne se trompât qu'une fois sur huit à peu-près, tandis que chaque Votant du Tribunal inférieur se trompe une fois sur cinq, supposition qu'on peut faire, puisqu'il est possible de mettre plus de précautions dans le choix des Membres du Tribunal supérieur.

Cet exemple suffit pour montrer que dans le cas où la décision d'un Tribunal supérieur doit être suivie, lorsqu'elle est contraire à celle du Tribunal inférieur, l'intérêt de la sûreté publique exige que la plus petite pluralité à laquelle ce Tribunal puisse condamner, soit plus grande que la pluralité contraire obtenue dans le premier Tribunal.

Reprenons donc la formule $r^p = r'^{q'} \cdot \frac{a}{1-a}$; en y regardant q' , r , r' , & a comme connus, nous en tirerons

$p = q' \cdot \frac{r'}{lr} + \frac{l \frac{a}{1-a}}{lr}$. Supposons donc que nous voulions $a = \frac{1000}{1001}$, c'est-à-dire, qu'il y ait au moins 1000 à parier contre 1 qu'un innocent ne sera pas condamné, nous aurons $p = q' \cdot \frac{r'}{lr} + \frac{3}{lr}$. Ainsi, par exemple, si nous supposons $r = 8$, $r' = 4$, $q' = 5$, nous aurons $p = 7$, parce qu'il faut toujours prendre pour p le premier nombre entier plus grand que la valeur de p donnée par l'équation.

Mais il est très-possible que cette valeur de p soit beaucoup plus grande qu'il n'est nécessaire de l'exiger dans les jugemens. En effet, ici où $p = 7$ & $r = 8$, dans le cas où l'on fait abstraction du jugement du Tribunal inférieur, la probabilité de l'erreur est moindre qu'un deux millionième; & dans le cas où l'on aura seulement une pluralité d'une voix dans le Tribunal inférieur, & où la décision seroit conforme, la probabilité de l'erreur seroit moindre d'un huit millionième; & si on exige une pluralité de trois voix dans ce Tribunal inférieur de cinq Votans, elle deviendroit moindre d'un cent vingt-huit millionième.

Or, il est évident qu'en exigeant une telle probabilité, beaucoup plus que suffisante, on s'exposera au risque de n'obtenir aucune décision. Il faudroit donc que la pluralité exigée dans le Tribunal supérieur, dans le cas de deux décisions opposées, fût plus grande que dans le cas où elles sont conformes; & l'on peut établir qu'il faut qu'elles soient telles en général, que l'on ait dans l'une & l'autre hypothèse une égale probabilité pour le cas le plus défavorable.

L'hypothèse des décisions contraires donne $p = q' \cdot \frac{r'}{lr} + \frac{l \frac{a}{1-a}}{lr}$; l'hypothèse des décisions conformes, donne $p = \frac{l \frac{a}{1-a}}{lr} - p' \cdot \frac{r'}{lr}$. Ces équations donneront les valeurs de p dans les deux cas.

Conservant toujours le même exemple que ci-dessus, & faisant $p' = 1$, nous aurons, pour le cas des deux décisions conformes, $p = 3$; & si $p' = 3$, $p = 2$ au lieu de $p = 7$.

D'après ce que nous venons d'exposer, il est donc clair que pour cette forme de jugemens, il ne faut pas exiger la même pluralité dans le cas des décisions contraires & dans celui des décisions conformes entr'elles.

Cela posé, on peut choisir deux partis; 1.^o de fixer en général la pluralité du second Tribunal dans les deux cas, comme nous venons de le faire; 2.^o de fixer dans chaque décision particulière la pluralité du second Tribunal d'après la pluralité de celle du premier, en regardant p' & q' comme donnés par l'évènement. Pour cela, si l'on fait $r = r'$, supposition assez naturelle, & d'ailleurs favorable à la sûreté, on aura

$$p = q' + \frac{l \frac{a}{1-a}}{lr}, p = \frac{l \frac{a}{1-a}}{lr} - p', \text{ ou } p - q' = \frac{l \frac{a}{1-a}}{lr},$$

& $p + p' = \frac{l \frac{a}{1-a}}{lr}$, c'est-à-dire, dans les deux cas la

pluralité en faveur de la décision égale à $\frac{l \frac{a}{1-a}}{lr}$, comme

on l'auroit trouvé pour un seul Tribunal. Comparant maintenant ces deux valeurs de p , on trouvera leur différence extrême égale à $q' + p'$, c'est-à-dire, à la somme de la plus grande & de la plus petite pluralité du Tribunal inférieur. Mais comme il paroît convenable d'exiger que la décision du Tribunal supérieur soit toujours prise à part d'une probabilité suffisante, alors la moindre valeur de p devra être

$\frac{l \frac{a}{1-a}}{lr}$ pour le cas où les décisions sont conformes; &

pour celui où elles sont contradictoires, il faudra augmenter cette pluralité de q' , q' pouvant être ou la pluralité de chaque jugement rendu par le Tribunal inférieur, ou, si l'on veut prendre un terme fixe, q' étant le nombre des Votans dans le Tribunal inférieur.

Avant de passer à l'examen du cas où l'on suppose que les Votans peuvent se partager en plus de deux avis différens, nous croyons devoir insister sur une remarque générale, qu'il sera facile de déduire de tout ce qui précède.

C'est que de toutes les manières de prendre des décisions, comprises dans les différentes hypothèses que nous avons examinées, celle qui est la plus simple, & qui consiste à se contenter d'un seul Tribunal & d'une seule décision, en exigeant une pluralité fixe si le nombre des Votans est fixe, & une pluralité égale à un nombre constant, plus un nombre proportionnel à celui des Votans si ce nombre peut varier, est celle dans laquelle, en employant un moindre nombre de Votans, & en exigeant d'eux le moins de lumières, on peut plus facilement obtenir, 1.^o une probabilité suffisante en général, que la décision ne sera pas contraire à la vérité; 2.^o une probabilité suffisante d'obtenir une décision conforme à la vérité; 3.^o lorsque la décision est connue & que la pluralité est la moindre possible, une probabilité encore suffisante en faveur de la vérité de la décision. La seule hypothèse, *page 55*, où l'on suppose que l'on demande à plusieurs reprises les voix d'une même assemblée jusqu'à ce que l'on parvienne à une pluralité exigée, auroit les mêmes avantages en la considérant d'une manière abstraite; mais on verra dans les Parties suivantes, qu'il s'en faut beaucoup qu'elle les puisse conserver dans la pratique.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que deux décisions contradictoires entr'elles; il est des cas où l'on peut avoir besoin d'en considérer trois, ou un plus grand nombre. Par exemple, on peut supposer que chaque Votant puisse prononcer oui ou non sur une question, ou ne point prononcer du tout, & on peut n'avoir dans ce cas aucun égard à cette décision. De plus, bien qu'il soit en général toujours possible de réduire toutes les opinions à deux contradictoires entr'elles, cependant comme ce moyen peut amener des discussions, entraîner des longueurs, & que d'ailleurs on ne peut même en reconnoître les avantages avant d'avoir examiné ce qui résulte des décisions

où l'on admet une plus grande quantité d'avis, cette dernière supposition doit être examinée séparément. Enfin, lorsqu'on fait un choix entre plusieurs objets ou entre plusieurs personnes à la pluralité des suffrages, la nature de la question qu'on décide peut mériter des recherches particulières.

Nous aurons donc à examiner successivement ces trois différentes hypothèses.

D I X I È M E H Y P O T H È S E.

On suppose ici trois opinions v, e, i ; v & e sont deux opinions qui peuvent être vraies ou fausses; v désigne une opinion vraie, e l'opinion contradictoire, qui est nécessairement fausse; i est l'opinion incertaine, par laquelle le Votant déclare seulement qu'il ne peut nier ni affirmer aucune des deux propositions contradictoires.

Cela posé, soit q le nombre des Votans, la formule

$$i^q + q i^{q-1} \cdot (v + e) + \frac{q}{2} i^{q-2} \cdot (v + e)^2 \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{q}{q'} i^{q-q'} \cdot (v + e)^{q'} + \frac{q}{q'+1} i^{q-q'-1} \cdot (v + e)^{q'+1} \dots \dots$$

$$+ (v + e)^q$$

représentera toutes les combinaisons possibles des décisions v, e & i .

Soit maintenant $q' < q$ le nombre de décisions v & e qu'il faut avoir pour obtenir en faveur de l'une ou de l'autre la pluralité exigée. Si $V^{q'}, V'^{q'}, V^{q'+1}, V'^{q'+1} \dots \dots \dots$ expriment les mêmes quantités que ci-dessus, & que W^q, W'^q expriment les quantités correspondantes pour l'hypothèse présente, c'est-à-dire, la probabilité qu'il n'y aura pas de décision contre v , ou qu'il y en aura une en faveur de v , nous aurons

$$W^q = \frac{q}{q'} i^{q-q'} V^{q'} \cdot (v + e)^{q'} + \frac{q}{q'+1} i^{q-q'-1} V'^{q'+1} \cdot (v + e)^{q'+1} \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{q}{q'+2} i^{q-q'-2} V^{q'+2} \cdot (v + e)^{q'+2} \dots \dots \dots$$

$$+ q \cdot i V^{q-1} \cdot (v + e)^{q-1} + V^q \cdot (v + e)^q.$$

Faisant ensuite $V^{q'+2} = V^{q'} + U$, $V^{q'+1} = V^{q'} + U$,

& enfin $V^q = V^{q-1} + U^{q-q'-1}$, nous aurons

$$\begin{aligned} W^q &= \left[\frac{q}{q'} i^{q-q'} \cdot (v+e)^{q'} + \frac{q}{q'+1} i^{q-q'-1} (v+e)^{q'+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{q}{q'+2} i^{q-q'-2} (v+e)^{q'+2} \dots \dots \dots + (v+e)^q \right] V^{q'} \\ &+ \left[\frac{q}{q'+1} i^{q-q'-1} (v+e)^{q'+1} + \frac{q}{q'+2} i^{q-q'-2} (v+e)^{q'+2} \dots \right. \\ &\quad \dots \dots \dots + (v+e)^q \left. \right] U \\ &\quad + \left[\frac{q}{q'+2} i^{q-q'-2} (v+e)^{q'+2} \dots \dots \dots + (v+e)^q \right] U^2 \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \quad \quad + (v+e)^q \cdot U^{q-q'-1} \end{aligned}$$

Nous aurons par conséquent

$$\begin{aligned} W^{q+1} &= \left[\frac{q+1}{q'} i^{q-q'+1} (v+e)^{q'} + \frac{q+1}{q'+1} i^{q-q'} (v+e)^{q'+1} \dots \right. \\ &\quad \dots \dots \dots + (v+e)^{q+1} \left. \right] V^{q'} \\ &\quad + \left[\frac{q+1}{q'+1} i^{q-q'} (v+e)^{q'+1} \dots \dots \dots + (v+e)^{q+1} \right] U \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad \quad \quad + (v+e)^{q+1} \cdot U^{q-q'} \end{aligned}$$

Maintenant soit C_r^q le coefficient de $V^{q'}$ dans W^q , & C_r^{q+1} le coefficient du même terme dans W^{q+1} , & que $C_{r+1}^q, C_{r+1}^{q+1}, C_{r+2}^q, C_{r+2}^{q+1}, \dots$ soient les coefficients de U, U^2, \dots dans les mêmes formules, nous aurons

$$\begin{aligned} C_r^{q+1} &= C_r^q \cdot (i+v+e) + \frac{q}{q'-1} i^{q-q'+1} (v+e)^{q'} \\ &= C_r^q + \frac{q}{q'-1} i^{q-q'+1} (v+e)^{q'}, \text{ à cause de} \\ & i+v+e = 1. \end{aligned}$$

De même $C_{r+1}^{q+1} = C_{r+1}^q + \frac{q}{q'} i^{q-q'} (v+e)^{q'+1}$,

$C_{q'+2}^{q'+1} = C_{q'+2}^q + \frac{q}{q'+1} i^{q-q'-1} \cdot (v + e)^{q'+2}$, & ainsi de suite. Nous aurons donc

$$W^{q+1} = W^q + \frac{q}{q'-1} i^{q-q'+1} \cdot (v + e)^{q'} V^{q'} + \frac{q}{q'} i^{q-q'} \cdot (v + e)^{q'+1} U + \frac{q}{q'+1} i^{q-q'-1} \cdot (v + e)^{q'+2} U' \dots + qi \cdot (v + e)^q U^{q-q'-1} + (v + e)^{q+1} U^{q-q'}$$

Prenant maintenant la valeur de W^{q+2} , elle sera

$$W^{q+2} + \frac{q+1}{q'-1} i^{q-q'+2} \cdot (v + e)^{q'} V^{q'} + \frac{q+1}{q'} i^{q-q'+1} \cdot (v + e)^{q'+1} U + \frac{q+1}{q'+1} i^{q-q'} \cdot (v + e)^{q'+2} U' \dots + (q + 1) \cdot i \cdot (v + e)^{q+1} U^{q-q'} + (v + e)^{q+2} U^{q-q'+1}$$

Maintenant il est aisé de voir que les coefficients de $V^{q'}$, U , $U' \dots U^{q-q'}$ dans W^{q+1} & dans W^{q+2} , sont égaux chacun à chacun, en multipliant successivement chacun de ces coefficients dans W^{q+1} par $\frac{q+1}{q-q'+2} i$, $\frac{q+1}{q-q'+1} i$, $\frac{q+1}{q-q} i \dots$ les dénominateurs étant égaux dans chaque terme au coefficient de i augmenté de l'unité. Soit ϕ la somme de ces termes pour W^{q+1} , elle sera $(q + 1) \int \phi \partial i$ pour W^{q+2} , & nous aurons l'équation $W^{q+2} = W^{q+1} + (q + 1) \int \phi \partial i + (v + e)^{q+2} U^{q-q'+1}$, d'où $\frac{\partial \cdot W^{q+2}}{\partial i} = \frac{\partial \cdot W^{q+1}}{\partial i} + (q + 1) \phi$, parce que le dernier terme ne contient pas i ; mais $W^{q+1} = W^q + \phi$. Donc on aura $\frac{\partial \cdot W^{q+2}}{\partial i} = \frac{\partial \cdot W^{q+1}}{\partial i} + (q + 1) (W^{q+1} - W^q)$. On déduira donc chaque terme des deux précédens sans difficulté. En effet, l'on aura $W^q = W^{q-1} + (q + 1) \int (W^{q-1} - W^{q-2}) \partial i + (v + e)^q \cdot U^{q-q'-1}$,
les

les intégrales étant prises de manière qu'elles soient zéro lorsque $i = 0$, & ces fonctions ne contenant que des puissances simples de i .

Lorsque $q = \frac{1}{2}$, la valeur de W^q ci-dessus devient $V^q + U + U' + U'' \dots = V^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent 1, $\frac{1}{2}$, ou 0 dans les mêmes circonstances; seulement dans le cas de $i = 1$, la fonction W^q devient zéro dans l'hypothèse que nous considérons ici.

Ce que nous avons dit des quantités W^q , s'appliquera sans difficulté aux quantités W'^q , qu'on aura d'une manière semblable, & l'on peut observer de même que toutes les fois que les quantités V^q, V'^q iront en croissant, q devenant plus grand, il en sera de même des quantités W^q, W'^q & réciproquement lorsque les quantités V^q, V'^q iront en décroissant. Il ne peut y avoir de différence que pour les cas où, soit V^q , soit V'^q iroient d'abord en croissant & ensuite en décroissant, ou réciproquement. Dans ce cas, les W^q ou les W'^q suivront la même loi, mais le changement qui arrivera à ces quantités n'aura pas lieu aux mêmes points.

Si maintenant nous examinons la question en elle-même, nous trouverons que, si nous connoissons i & $v + e$, v' & e' étant en général la probabilité qu'un Votant décidera suivant la vérité ou contre l'erreur, on aura $v = (v + e) \cdot v'$, $e = (v + e) \cdot e'$; comme le prouvent d'ailleurs les formules ci-dessus, où les V sont des fonctions de v' & e' homogènes, & multipliées par des puissances de $v + e$ du même degré. Mais il nous reste à voir ce que désignent les quantités i , $v + e$; i , est l'opinion qu'il n'y a pas de preuves suffisantes pour décider; $v + e$ est l'opinion que ces preuves sont acquises. La vérité de cette opinion, que les preuves sont acquises ou non, est indépendante de la vérité d'une des deux décisions opposées; & par conséquent, en considérant la question dans un sens abstrait; le rapport de v à e doit rester le même, soit que ceux qui votent pour la non-existence des preuves, se trompent, soit qu'ils aient raison. Ainsi dans ce

M

cas, on aura avec une égale probabilité, ou $i = v'$ & $v + e = e'$, ou $i = e'$ & $v + e = v'$; & par conséquent, si dans les formules précédentes W_i^q & $W_{i'}^q$ représentent la valeur de ces termes pour $i = e'$, & $v + e = v'$ & W_i^q & $W_{i'}^q$ les valeurs des mêmes termes lorsque $i = v'$ & $v + e = e'$, on aura $W^q = \frac{W_i^q + W_{i'}^q}{2}$ & $W'^q = \frac{W_{i'}^q + W_i^q}{2}$.

La question est précisément la même que celle-ci. Supposez q urnes; qu'on sache que dans ces q urnes il y en a m remplies de q boules rouges, & n remplies de q boules, dont m blanches & n noires, ou bien n remplies de q boules rouges & m remplies de q boules, dont m blanches & n noires, & qu'on demande la probabilité d'avoir, en tirant au hasard une urne & une boule de cette urne un nombre q de fois, une pluralité donnée en faveur des boules blanches sur les boules noires.

Mais cette manière d'envisager la question ne peut avoir lieu dans l'application. En effet, supposons que ceux qui ont voté pour la non-existence des preuves aient raison, on ne doit pas supposer pour ceux qui ont voté le contraire & qui ont rendu une décision, une probabilité de cette décision égale à celle qu'auroit la même décision s'ils ne s'étoient pas trompés sur la première question. Si même on considère la question en général, il paroît au contraire plus juste de supposer que dans ce cas il y a une plus grande probabilité que ceux qui ont commis l'erreur en prononçant qu'il y a des preuves suffisantes, seront plus exposés à se tromper dans leurs décisions. On pourroit même supposer qu'alors, conservant à v' & e' leur valeur, il faudroit, lorsqu'on suppose $i = e'$ & $v + e = v'$, mettre dans les V , v' pour v ; & lorsque $i = v'$, mettre dans les V , e' pour v .

Dans cette hypothèse, la valeur de W^q , en faisant $i = e'$, sera $\frac{q}{q} e'^{q-1} v'^1 V^q + \frac{q}{q+1} e'^{q-2} v'^2 V^{q+1} + \dots + V^q v'^q$; & la valeur de W'^q , lorsque $i = v'$, sera $\frac{q}{q} v'^{q-1} e'^1 E^q + \frac{q}{q+1} v'^{q-2} e'^2 E^{q+1} + \dots + E^q e'^q$.

Or si on prend pour la vraie valeur de W^q la somme de ces deux valeurs, divisée par 2, on aura une fonction semblable de v' & de e' , qui tendra toujours par conséquent à devenir égale à $\frac{1}{2}$, excepté lorsque W^q est encore égale à l'unité, quoique $v' < e'$, & qui ne donnera aucune probabilité en faveur de la vérité plutôt qu'en faveur de l'erreur, quelle que soit la probabilité du jugement de chaque Votant; & dans le même cas W'^q tend toujours à devenir $\frac{1}{2}$.

Cette conclusion semble paradoxale, mais elle est fondée sur les trois propositions suivantes; la première, que puisqu'on fait abstraction du nombre de voix pour i , on doit prendre également la probabilité pour le cas où ces voix sont en faveur de la vérité & pour le cas où elles sont en faveur de l'erreur: cette supposition nous paroît incontestable; la seconde, que toutes les fois qu'il n'y a point de véritables preuves, & qu'on prendra les voix de ceux qui se trompent en décidant que ces preuves étoient acquises, la probabilité de leur décision sur le fond de la question ne doit pas être la même que s'ils ne s'étoient pas trompés dans leur première décision, & cette seconde proposition est encore incontestable; la troisième, que dans ce cas on doit supposer la probabilité de l'erreur du second jugement, égale à la probabilité de ne pas se tromper dans le premier jugement, & cette hypothèse peut être regardée comme très-naturelle. D'ailleurs, quand on n'admettroit pas cette dernière proposition, on obtiendra le même résultat toutes les fois que $E^{\frac{1}{2}}$ sera zéro, ou toutes les fois que $E'^{\frac{1}{2}}$ sera zéro, selon que l'on cherchera W^q ou W'^q ; d'où il est aisé de voir, 1.^o qu'en supposant, ce qui paroît incontestable, la probabilité de la vérité du second jugement, le premier étant erroné, égale ou inférieure à $\frac{1}{2}$, l'on pourra avoir $W^{\frac{1}{2}} = 1$, en exigeant un certain degré de pluralité, mais qu'on aura nécessairement $W'^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$; 2.^o que dans le cas d'une pluralité proportionnelle au nombre des Votans, où la limite des $V^{\frac{1}{2}} = 1$, est $v = \frac{n}{2n+1}$ (voyez page 53).

La limite où $W^{\frac{1}{2}}$ cesseroit d'être 1, sera le point ou la probabilité de la vérité de la seconde décision, la première étant erronée, sera égale à $\frac{m}{2m+n}$. Or, cette considération suffit pour montrer combien cette forme de votation seroit défectueuse.

On pourroit en proposer une autre, c'est-à-dire, exiger qu'il y eût non-seulement une pluralité donnée en faveur de v sur e , mais aussi une pluralité semblable de $v + e$ sur i . Dans ce nouveau cas, en conservant les mêmes dénominations, on aura $W^q = (v + e)^q \cdot V^q + q \cdot i \cdot (v + e)^{q-1} V^{q-1} \dots$

$\dots + \frac{q}{q'} (v + e)^{q'} i^{q'-q'} V^{q'}$, q' indiquant le terme où cesse la pluralité en faveur de $v + e$. Or, il est aisé de voir que cette fonction est absolument la même que celle ci-dessus, excepté que q' qui est constant, est ici variable avec q . Les W^{q+1} , W^{q+2} , trouvés ci-dessus, seront donc diminués chacun de termes qui s'y seroient trouvés dans l'hypothèse ci-dessus. Soient donc T & T' ces termes qui dépendent de l'hypothèse de pluralité, & dont le nombre est toujours déterminé & indépendant de q , on aura $\frac{\partial (W^{q+2} - T')}{\partial i}$

$= \frac{\partial (W^{q+1} - T)}{\partial i} + W^{q+1} - T - W^q$; d'où l'on tirera la valeur de W^{q+2} , dépendante d'un nombre déterminé de termes précédens, en intégrant par rapport à i , & ajoutant la constante $(v + e)^{q+2} U^{q-q'+1}$.

En examinant cette formule, on trouvera de même que plus q deviendra grand, plus la valeur de W^q augmentera, pourvu que v' soit tel, & l'hypothèse de pluralité tellement combinée, que la fonction $(v + e)^q + q \cdot i \cdot (v + e)^{q-1} \dots$

$+ \frac{q}{q'} \cdot (v + e)^{q'} \cdot i^{q'-q'}$ aille en augmentant, ainsi que les $V^q, V^{q-1} \dots$

Quant au cas de $q = \frac{1}{2}$, on aura $W^{\frac{1}{2}} = 1$ toutes les fois que v' sera tel, que cette même formule $(v + e)^q \dots + \frac{1}{4} (v + e)^q \cdot i^{2-q}$ sera égale à l'unité.

Enfin pour avoir W^q , en suivant le même raisonnement que ci-dessus, il faudra mettre dans la formule ci-dessus v' pour $v + e$, & e' pour i , & dans les V , v' pour v , puis mettre dans la même formule e' pour $v + e$, v' pour i , & dans les V , e' pour v , & en prendre la somme.

Si dans cette hypothèse, on cherche la plus petite valeur de la probabilité en faveur de la vérité, soit r la plus petite pluralité, on aura d'abord $\frac{v'^r}{v'^r + e'^r}$ pour la plus petite probabilité qu'il n'y a pas eu d'erreur dans la décision, que les preuves sont acquises, & ensuite $\frac{v'^r}{v'^r + e'^r}$ qu'il n'y en a point dans celle de la question, ce qui, en prenant la même hypothèse que ci-dessus, donne la probabilité en faveur de la vérité, $\frac{v'^{2r} + e'^{2r}}{(v'^r + e'^r)^2}$, & en faveur de l'erreur, $\frac{2v'^r e'^r}{(v'^r + e'^r)^2}$.

La raison pour laquelle on prend ici les sommes entières sans les diviser par deux, comme dans le cas que nous avons considéré d'abord, c'est que dans ces dernières formules la somme des termes répondans aux deux décisions vraies, aux deux décisions fausses, à la première vraie, à la seconde fausse, à la première fausse, à la seconde vraie, ne peut être que l'unité, au lieu qu'elle est deux dans le premier cas.

Lorsqu'on n'admet qu'une décision pour ou contre, comme dans le cas d'un jugement où l'on dit, l'accusé est coupable, c'est-à-dire, le crime est prouvé, ou bien l'accusé n'est pas coupable, ce qui signifie également, ou je crois l'accusé innocent, ou le crime n'est pas prouvé; on voit que les Votans pour i se confondent avec ceux qui décident en faveur de l'accusé, il est donc absolument inutile de les distinguer, parce que la loi ne pouvant infliger aucune peine lorsque le crime n'est pas prouvé, c'est seulement entre ces deux propositions, le

crime est prouvé, le crime n'est pas prouvé, qu'il s'agit de prononcer. Cette même distinction seroit inutile aussi dans le cas où il y auroit un dédommagement ou une justice à accorder à l'innocent absous, non par défaut de preuves, mais à cause de la conviction de son innocence. Il est clair que pour ce cas l'avis de ceux qui voteroient pour *i*, doit se confondre avec celui de ceux qui votent contre l'accusé. Il est superflu d'avertir ici que dans le cas où le Tribunal peut ordonner une nouvelle instruction, & où cette question lui est proposée, il n'y a réellement que deux avis, & qu'ainsi ce cas n'appartient pas à l'hypothèse que nous considérons.

Mais il peut y avoir d'autres cas où cette distinction entre trois avis soit très-utile. Par exemple, si on propose à une assemblée d'adopter une loi, on peut exiger d'abord une certaine pluralité pour décider que l'on est en état de prononcer, & la même pluralité pour décider qu'il faut, ou adopter la loi nouvelle, ou laisser subsister l'ancienne, & alors cette seconde décision ne doit être faite que par les voix de ceux qui se croient assez instruits pour prononcer. Ce n'est pas ici comme dans un jugement en matière criminelle, où celui qui déclare qu'il n'existe pas de preuves suffisantes, est obligé d'être d'avis de renvoyer l'accusé; au lieu que celui qui a déclaré qu'il ne fait pas d'une manière certaine si une loi proposée est bonne ou mauvaise, ne doit voter ni pour ni contre. On peut donc dans ce cas, & peut-être dans plusieurs autres, croire qu'il est utile d'admettre trois avis, & nous avons montré qu'alors, en exigeant d'abord une certaine pluralité pour décider s'il y a lieu d'admettre une décision, & ensuite une pluralité semblable pour déterminer la décision, on pouvoit s'assurer la même sûreté & les mêmes avantages qu'en forçant les avis de se partager entre deux décisions contradictoires. Cet objet sera discuté plus en détail à la fin de cette Partie.

O N Z I È M E H Y P O T H È S E .

Nous considérerons ici trois avis, que nous désignerons

également par v , e & i , & nous chercherons la probabilité pour un nombre donné de Votans, ou que ni e ni i ne l'emportent sur v d'une pluralité exigée, ou que e & i l'emportent chacun sur v de cette pluralité sans l'emporter l'un sur l'autre, ou enfin que v l'emporte à la fois sur e & sur i de cette pluralité.

Nous supposerons que cette pluralité exigée n'est que d'une unité, parce que cette supposition suffit pour montrer la méthode qu'on doit suivre lorsque la pluralité est d'un nombre constant, ou lorsqu'elle est proportionnelle au nombre des Votans, & que les conclusions auxquelles on sera conduit pour ce cas particulier, indiquent suffisamment les conclusions analogues qu'on trouveroit dans les autres cas.

Par la même raison, nous ne considérerons qu'une seule des formes dont le nombre des Votans est susceptible, parce que ce que nous dirons pour cette forme, s'appliqueroit sans difficulté aux autres formes. Nous supposerons donc le nombre des Votans égal à $2q + 1 = 3q' + 1$, ou plus simplement $6q + 1$. Dans les cinq autres formes de nombre qui donneroient des formules différentes, le nombre des Votans seroit $6q$, $6q + 2$, $6q + 3$, $6q + 4$, $6q + 5$; & des six formes, trois seroient paires, trois impaires, deux de la forme $3q'$, deux de la forme $3q' + 1$, deux de la forme $3q' + 2$, parmi lesquelles une est impaire & l'autre paire.

Cela posé, soit W^q la probabilité que ni e ni i n'obtiendront sur les deux autres opinions la pluralité, nous aurons

$$\begin{aligned}
 W^q &= v^{6q+1} + (6q + 1) \cdot v^{6q} \cdot (e + i) \dots + \frac{6q+1}{3q} v^{3q+1} \cdot (e + i)^{3q} \\
 &+ \frac{6q+1}{3q+1} v^{3q} \cdot (e + i)^{3q-1} \cdot \left[1 - \frac{e^{3q+1} + i^{3q+1}}{(e+i)^{3q+1}} \right] \\
 &+ \frac{6q+1}{3q+2} v^{3q-1} \cdot (i + e)^{3q+2} \times \\
 &\left[1 - \frac{e^{3q+2} + (3q+2) \cdot e^{3q+1} \cdot i + \frac{3q+2}{2} e^{3q} i^2 + i^{3q+2} + (3q+2) \cdot i^{3q+1} \cdot e + \frac{3q+2}{2} i^{3q} e^2}{(e+i)^{3q+2}} \right] \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ou } W^q = 1 - & \left[(e + i)^{6q+1} (E'^{6q+1} + I'^{6q+1}) \dots \dots \dots \right. \\
 & + (6q + 1) (e + i)^{6q} v^2 (E'^{6q} + I'^{6q}) \\
 & + \frac{6q+1}{2} (e + i)^{6q-1} v^2 (E'^{6q-1} + I'^{6q-1}) \dots \\
 & + \frac{6q+1}{2q} (e + i)^{4q+1} v^{2q} (E'^{4q+1} + I'^{4q+1}) \\
 & + \frac{6q+1}{2q+1} (e + i)^{4q} v^{2q+1} (E'^{4q} + I'^{4q}) \\
 & + \frac{6q+1}{2q+2} (e + i)^{4q-1} v^{2q+2} (E'^{4q-1} + I'^{4q-1}) \\
 & + \frac{6q+1}{2q+3} (e + i)^{4q-2} v^{2q+3} (E'^{4q-2} + I'^{4q-2}) \dots \\
 & + \frac{6q+1}{3q-1} (e + i)^{3q+2} v^{3q-1} (E'^{3q+2} + I'^{3q+2}) \\
 & \left. + \frac{6q+1}{3q} (e + i)^{3q+1} v^{3q} (E'^{3q+1} + I'^{3q+1}) \right].
 \end{aligned}$$

Les termes E', I' , représentent ici la probabilité que dans un certain nombre de Votans, dont la probabilité des deux avis seroit exprimée par $\frac{e}{e+i}$ & $\frac{i}{e+i}$, e ou i obtiendroient la pluralité. Le nombre supérieur indique celui des Votans, & l'inférieur la pluralité exigée.

Supposons maintenant que l'on augmente q de l'unité, nous aurons

$$\begin{aligned}
 W^{q+1} = 1 - & \left[(e + i)^{6q+7} (E'^{6q+7} + I'^{6q+7}) \dots \dots \dots \right. \\
 & + \frac{6q+7}{2q+2} (e + i)^{4q+5} v^{2q+2} (E'^{4q+5} + I'^{4q+5}) \\
 & + \frac{6q+7}{2q+3} (e + i)^{4q+4} v^{2q+3} (E'^{4q+4} + I'^{4q+4}) \\
 & + \frac{6q+7}{2q+4} (e + i)^{4q+3} v^{2q+4} (E'^{4q+3} + I'^{4q+3}) \dots \\
 & \left. + \frac{6q+7}{3q+3} (e + i)^{3q+4} v^{3q+3} (E'^{3q+4} + I'^{3q+4}) \right].
 \end{aligned}$$

Pour comparer maintenant ces formules entr'elles, & en tirer

tirer une méthode d'avoir une valeur de W^q dépendante seulement d'un nombre de valeurs précédentes, déterminé & indépendant de q , nous commencerons par établir deux règles générales; 1.° que si nous divisons W en un nombre quelconque fini de parties qui, ajoutées les unes aux autres, forment ce terme, & que nous ayons chacune de ces parties dépendante des parties correspondantes dans les valeurs de W^{q-1} , W^{q-2} , &c. le nombre des W^{q-1} , W^{q-2} , &c. étant déterminé & fini, nous aurons également W^q par un nombre déterminé & fini des valeurs précédentes; 2.° que toutes les fois que deux séries ordonnées par rapport aux puissances d'une quantité, seront telles que le terme général de l'une sera égal au terme général de l'autre, multiplié par un numérateur & un dénominateur, formés de facteurs linéaires en nombre fini de l'indice de ce même terme, on aura entre ces deux séries une équation linéaire d'un ordre fini.

Cela posé, nous considérerons d'abord la série $(e+i)^{6q+1}$
 $(E^{16q+1} + I^{16q+1}) + (6q+1) \cdot (e+i)^{6q} v (E^{16q} + I^{16q}) \dots$
 $+ \frac{6q+1}{2q} (e+i)^{4q+1} v^{2q} (E^{14q+1} + I^{14q+1})$, ou plutôt
 la série $(e+i)^{6q+1} E^{16q+1} + (6q+1) (e+i) v E^{16q} \dots$
 $+ \frac{6q+1}{3q} (e+i)^{4q+1} v^{2q} E^{14q+1}$, puisque la formule
 pour la seconde série sera la même que celle-ci, en changeant e
 en i , & réciproquement. Cela posé, si l'on met $q+1$ au
 lieu de q , cette fonction devient $(e+i)^{6q+7} E^{16q+7}$
 $+ (6q+7) (e+i)^{6q+6} v E^{16q+6} \dots$
 $+ \frac{6q+7}{2q+2} (e+i)^{4q+5} v^{2q+2} E^{14q+5}$. Or, il est aisé de
 voir, 1.° que cette seconde série contient $2q+3$ termes,
 & que l'autre n'en contient que $2q+1$; & qu'ainsi pour
 les comparer terme à terme, il faut d'abord retrancher de
 la seconde les termes $\frac{6q+7}{2q+1} (e+i)^{4q+6} v^{2q+1} E^{14q+6}$,
 & $\frac{6q+7}{2q+2} (e+i)^{4q+5} v^{2q+2} E^{14q+5}$; ensuite le terme

N

général de la première série étant $\frac{6q+1}{r} (e+i)^{6q+1-r} v^r E^{6q+1-r}$,
 & celui de la seconde étant $\frac{6q+7}{r} (e+i)^{6q+7-r} v^r E^{6q+7-r}$,
 soit E^{6q+1-r} la différence entre ces deux valeurs de E ,
 nous aurons pour le second terme

$$\frac{6q+7}{r} (e+i)^{6q+7-r} v^r (E^{6q+1-r} + E^{6q+1-r}).$$

Or, comparant la première partie de ce terme à celui de la première suite, on voit qu'il est égal à ce terme de la première suite, multiplié par $(e+i)^6 \frac{6q+7 \dots 6q+2}{6q+7-r \dots 6q+2-r}$; en sorte qu'appelant A le terme de la première suite, A' la première partie du terme correspondant de la seconde, &

$$B = \frac{A(e+i)^6}{6q+7-r \dots 6q+2-r}, \text{ nous aurons } A'$$

$$= B \cdot (6q+7) \cdot (6q+6) \dots (6q+2)$$

$$= \left[\frac{\partial B}{\partial e + \partial i} \cdot (e+i) + \frac{\partial B}{\partial v} v \right] (6q+6) \dots (6q+2)$$

$$= B' \cdot (6q+6) \dots (6q+2)$$

$$= \left[\frac{\partial B'}{\partial e + \partial i} \cdot (e+i) + \frac{\partial B'}{\partial v} v \right] (6q+5) \dots (6q+2)$$

$$= B'' \cdot (6q+5) \dots (6q+2)$$

$$= \left[\frac{\partial B''}{\partial e + \partial i} \cdot (e+i) + \frac{\partial B''}{\partial v} v \right] (6q+4) \dots (6q+2)$$

& ainsi de suite jusqu'à un terme B^{n-1} , qui aura pour diviseur $6q+7-r \dots 6q+2-r$. Soit donc

$$A' = B^{n-1} = \frac{C}{6q+7-r \dots 6q+2-r} = \frac{-f\left(\frac{E}{v^{6q+8}} \partial v\right) \cdot v^{6q+7}}{6q+6-r \dots 6q+2-r}$$

$$= \frac{C}{6q+6-r \dots 6q+2-r} = \frac{-f\left(\frac{C'}{v^{6q+7}} \partial v\right) \cdot v^{6q+6}}{6q+5-r \dots 6q+2-r}$$

& ainsi de suite jusqu'à C'' , qui est une fonction linéaire de B . On aura donc une équation linéaire en A' & A ; & comme cette équation est indépendante de r , soit P^q la série, P' le premier terme de la série correspondante pour $q + 1$, on aura P' égale à une fonction linéaire de P^q , semblable à celle qui donne A' en A . On aura donc $P^{q+1} = F : P^q + (e + i)^{6q+7} E''^{6q+1} + (6q+7)(e+i)^{6q+6} v E''^{6q} \dots + \frac{6q+7}{2q} (e+i)^{4q+7} v^{2q} E''^{4q+1}$, & par conséquent $P^{q+2} = F : P^{q+1} + (e+i)^{6q+13} E''^{6q+7} \dots + \frac{6q+13}{2q} (e+i)^{4q+13} v^{2q} E''^{4q+7}$. Maintenant il est aisé de voir que chacun des E'' , multiplié par la puissance de $(e+i)$, est formé d'un nombre déterminé de termes multipliés par les mêmes puissances de ei , que la différence de ces exposans est la même pour tous les E'' correspondans des deux séries, & que les puissances de i & de e sont les mêmes, quel que soit l'exposant de E'' , ou quel que soit q ; que ces termes enfin ont chacun des coefficients, dont les numérateurs & les dénominateurs sont des facteurs proportionnels à l'exposant de E'' . La série qui entre dans la valeur de P^{q+1} , & que nous appellerons Q^q , pourra donc se partager en un nombre fini & déterminé de séries, & Q^{q+1} , c'est-à-dire, la série qui entre dans la valeur de F^{q+2} , se partagera en séries correspondantes, qui, d'après les règles générales posées ci-dessus, seront des fonctions linéaires des séries semblables qui entrent dans Q^q .

Si nous examinons maintenant la série $\frac{6q+1}{2q+1} (e+i)^{4q} v^{2q+1}$

$$(E'_{\frac{1}{2}} + I'_{\frac{1}{2}}) + \frac{6q+1}{4q-1} (e+i)^{4q-1} v^{2q+2} (E'_{\frac{3}{2}} + I'_{\frac{3}{2}}) \dots$$

nous trouverons qu'elle pourra se décomposer de la même manière, à cette différence près, que les E'' qui contiendront chacune un même nombre de termes, auront des coefficients formés de facteurs, qui varieront non seulement par rapport à l'exposant de E'' , mais aussi par rapport à la pluralité exigée,

N ij

& proportionnellement à cette pluralité ; mais cette pluralité décroît proportionnellement aux accroissemens de l'exposant de E'' ; donc elle n'empêchera pas les facteurs d'avoir les conditions exigées pour que la règle puisse s'y appliquer.

Donc , par la première règle , on aura la première partie de W^{q+2} égale à une fonction linéaire de la première partie de W^{q+1} & de W^q ; & la seconde partie de W^{q+2} égale à une autre fonction linéaire de la partie correspondante de W^{q+1} & de W^q . Donc on aura une équation linéaire entre W^{q+4} , W^{q+3} , W^{q+2} , W^{q+1} & W^q ; & W^{q+3} exprimé par une fonction linéaire de W^{q+2} W^q .

En déterminant ainsi le nombre des W , nous n'avons pas eu égard aux deux termes semblables, également composés de e & de i , qui forment les W , parce qu'il suffit de connoître une de ces parties de la valeur des W , puisque l'autre se trouve immédiatement, en changeant e en i , & réciproquement. Ainsi dans ce dernier article, les W sont la partie de la valeur de W , qui est multipliée par les E . De plus, à cause des termes à ajouter, cette fonction contiendra encore un nombre fini de termes E' , I' ; mais connoissant la valeur de ces termes pour W^q , on les a pour W^{q+1} , en y ajoutant un simple terme. *Voyez les Hypothèses 1, 2, 3.*

Nous nous sommes bornés ici à montrer comment la valeur de W^q dépendoit d'un nombre toujours fini de valeurs précédentes de la même fonction ; il seroit inutile, pour l'objet de cet Ouvrage, de chercher à porter plus loin cette théorie. Les calculs nécessaires pour avoir W^q dans des cas particuliers, lorsque q est un peu grand, seroient excessivement longs, & on ne pourroit se livrer à ce travail que dans le cas où il deviendroit d'une utilité réelle.

Si nous cherchons maintenant la valeur de W^q , W^q exprimant la probabilité que e & i n'ont pas sur v la pluralité exigée, sans qu'il soit nécessaire, pour rejeter un terme, que l'un des deux ait cette pluralité sur l'autre, nous aurons

$$\begin{aligned}
 W_1^q &= v^{6q+1} + (6q+1) \cdot v^{6q} \cdot (e+i) \dots \dots \dots \\
 &+ \frac{6q+1}{3q} v^{3q+1} \cdot (e+i)^{3q} + \frac{6q+1}{3q+1} v^{3q} \cdot (e+i)^{3q+1} \\
 &\left(1 - \frac{e^{3q+1} + i^{3q+1}}{(e+i)^{3q+1}}\right) + \frac{6q+1}{3q+2} v^{3q-1} \cdot (e+i)^{3q+2} \times \\
 &\left[1 - \frac{e^{2q+2} + (3q+2) \cdot e^{2q+1} i + \left(\frac{3q+2}{2}\right) e^{2q} i^2 + i^{2q+2} + (3q+2) \cdot i^{2q+1} e + \left(\frac{3q+2}{2}\right) i^{2q} e^2}{(e+i)^{3q+2}}\right] \dots \dots
 \end{aligned}$$

& ainsi de suite comme dans la formule W^q , excepté que lorsqu'on sera parvenu aux termes $\frac{6q+1}{4q+2} v^{2q-1} \cdot (e+i)^{4q+2}$,

$\frac{6q+1}{4q+4} v^{2q-3} \cdot (e+i)^{4q+4} \dots \dots \dots$
 les termes $\frac{6q+1}{4q+2} v^{2q-1} \frac{4q+2}{2q+1} e^{2q+1} i^{2q+1}$, $\frac{6q+1}{4q+4} v^{2q-3}$
 $\frac{4q+4}{2q+2} e^{2q+2} i^{2q+2} \dots \dots$ qui entrent dans W^q , n'entrent

point dans W_1^q , & qu'il faut les en retrancher; & si l'on veut l'exprimer de la même manière que ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned}
 W_1^q &= 1 - \left[(e+i)^{6q+1} + (6q+1) \cdot (e+i)^{6q} v \right. \\
 &+ \frac{6q+1}{2} (e+i)^{6q-1} v^2 \dots \dots + \frac{6q+1}{2q} (e+i)^{4q+1} v^{2q} \\
 &+ \frac{6q+1}{2q+1} v^{2q+1} \cdot (e+i)^{4q} (E'^{4q} + I'^{4q}) \dots \dots \dots \\
 &\left. + \frac{6q+1}{3q+1} v^{3q} \cdot (e+i)^{3q+1} (E'^{3q+1} + I'^{3q+1}) \right],
 \end{aligned}$$

qui ne diffère de W^q que quant à la première partie de la série.

On peut mettre également W_1^q sous la forme

$$\begin{aligned}
 (v+i)^{6q+1} V^{6q+1} + (6q+1) \cdot (v+i)^{6q} e V^{6q} \dots \dots \dots \\
 + \frac{6q+1}{2q} (v+i)^{4q+1} e^{2q} V^{4q+1} + \frac{6q+1}{2q+1} (v+i)^{4q} \cdot e^{2q+1} V'^{4q} \\
 + \frac{6q+1}{2q+3} (v+i)^{4q-1} e^{2q+2} V'^{4q-1} \dots + \frac{6q+1}{3q+1} (v+i)^{3q+1} e^{3q} V'^{3q+1}
 \end{aligned}$$

& W^q sous celle $(v+i)^{6q+1} V^{6q+1} \dots \dots \dots$

$$+ \frac{6q+1}{2q} (v+i)^{4q+1} e^{2q} V^{4q+1} + \frac{6q+1}{2q+1} (v+i)^{4q} e^{2q+1} V'^{4q} \dots$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{6q+1}{3q} (v+i)^{3q+1} e^{2q} V'_{3q-1} + \left(\frac{6q+1}{2q+1} \frac{4q+1}{2q+1} e^{2q+1} v^{2q-1} i^{2q+2} \right. \\
 & \left. + \frac{6q+1}{2q+2} \frac{4q-1}{2q+2} e^{2q+2} v^{2q-3} i^{2q+2} \dots + \frac{6q+1}{3q} \frac{3q+1}{3q} e^{3q} v i^{3q} \right).
 \end{aligned}$$

Cherchons enfin W'^q , c'est-à-dire, la probabilité que v obtiendra sur i & e la pluralité exigée, nous aurons

$$\begin{aligned}
 W'^q &= v^{6q+2} + (6q+1) \cdot v^{6q} \cdot (e+i) \dots \dots \dots \\
 & + \frac{6q+1}{3q} v^{3q+1} (e+i)^{3q} + \frac{6q+1}{3q+1} v^{3q} \cdot (e+i)^{3q+1} [1 - (E'_{3q-1} + I'_{3q-1})] \\
 & + \frac{6q+1}{3q+2} v^{3q-1} (e+i)^{3q+1} [1 - (E'_{3q-2} + I'_{3q-2})] \\
 & + \frac{6q+1}{3q+3} v^{3q-2} (e+i)^{3q+3} [1 - (E'_{3q-7} + I'_{3q-7})] \dots \dots \dots \\
 & + \frac{6q+1}{4q} v^{2q+1} (e+i)^{4q} (1 - E'_{\frac{1}{2}} + I'_{\frac{1}{2}}) = v^{6q+2} + (6q+1) \cdot v^{6q} \cdot (e+i) \cdot \\
 & + \frac{6q+1}{4q} v^{2q+1} \cdot (e+i)^{4q} - \left[\frac{6q+1}{2q+1} v^{3q+1} \cdot (e+i)^{4q} (E'_{\frac{1}{2}} + I'_{\frac{1}{2}}) \dots \dots \dots \right. \\
 & \left. \frac{6q+1}{3q} v^{3q} \cdot (e+i)^{3q+1} (E'_{3q-1} + I'_{3q-1}) \right] = (v+i)^{6q+1} V'^{6q+1} \\
 & + (6q+1) \cdot (v+i)^{6q} e V'^{6q} \dots \dots + \frac{6q+1}{2q} (v+i)^{4q+1} e^{2q} V'^{4q+1} \\
 & + \frac{6q+1}{2q+1} (v+i)^{4q} e^{2q+1} V'^{\frac{1}{2}} + \frac{6q+1}{2q+2} (v+i)^{4q-1} e^{2q+2} V'^{\frac{1}{2}-1} \dots \dots \dots \\
 & + \frac{6q+1}{3q} (v+i)^{3q+1} e^{3q} V'^{\frac{1}{2}+1}.
 \end{aligned}$$

On pourroit chercher encore une fonction W''^q , c'est-à-dire, la probabilité que v surpassera un des deux i ou e , & pourra cependant être égal à l'autre, & nous aurons

$$\begin{aligned}
 W''^q &= v^{6q+2} + (6q+1) \cdot v^{6q} \cdot (e+i) \dots \dots \dots \\
 & + \frac{6q+1}{4q} v^{2q+1} \cdot (e+i)^{4q} - \frac{6q+1}{2q+1} v^{2q+2} \cdot (e+i)^{4q} (E'_{\frac{1}{2}} + I'_{\frac{1}{2}}) \dots \dots \dots \\
 & + \frac{6q+1}{3q} v^{3q} \cdot (e+i)^{3q+1} (E'_{3q+1} + I'_{3q+1}), \text{ ou bien} \\
 W''^q &= (v+i) \cdot V'^{6q+2} + (6q+1) \cdot (v+i)^{6q} e V'^{6q} \dots \dots \dots \\
 & + \frac{6q+1}{2q} (v+i)^{4q+1} e^{2q} V'^{4q+1} + \frac{6q+1}{2q+1} (v+i)^{4q} e^{2q+1} V'^{\frac{1}{2}} \\
 & + \frac{6q+1}{2q+2} (v+i)^{4q-1} e^{2q+2} V'^{\frac{1}{2}-1} \dots \dots + \frac{6q+1}{3q} (v+i)^{3q+1} e^{3q} V'^{\frac{1}{2}+1}.
 \end{aligned}$$

On trouvera pour W'_1, W'^1, W''_1 , la manière de tirer une de ces quantités de la valeur connue des précédentes, par la même méthode que nous avons employée pour W^1 .

Après avoir donné ces formules, il nous reste à examiner ce qu'elles deviennent dans le cas où $q = \frac{1}{2}$. Examinons d'abord la formule W'^1 . Soit $v > i$; dans ce cas $V^{6q+1}, V'^{6q}, \&c.$ deviennent 1, & par conséquent la première partie de W'^1 devient $(v+i)^{6q+1} \dots \frac{6q+1}{2q} (v+i)^{4q+1} e^{2q}$, qui est 1 tant que $v+i > 2e$; ainsi nous aurons $W'^1 = 1$ si $v > i$ & $e < \frac{1}{3}$. Soit dans l'hypothèse de $e < \frac{1}{3}$, $v = i$, la première partie de W'^1 sera $= \frac{1}{2}$ à cause de $V = \frac{1}{2}$; mais dans ce même cas la formule semblable pour i seroit aussi $\frac{1}{2}$; & comme la somme des termes, soit que v surpasse e & i , soit que i surpasse v & e , a pour limite l'unité, il est clair que la seconde partie est encore zéro dans ce cas. Donc lorsque $v = i$ & $e < \frac{1}{3}$, $W'^1 = \frac{1}{2}$. Si $e < \frac{1}{3}$ & $i > v$, il est clair que $W'^1 = 0$, puisqu'alors la somme seule des termes où i obtient la pluralité, est égale à l'unité.

Soit maintenant $e > \frac{1}{3}$, en substituant i à e dans l'article précédent, on trouvera $W'^1 = 1$ si $v > e$, $W'^1 = \frac{1}{2}$ si $v = e$, $W'^1 = 0$ si $v < e$.

Soit enfin $e = \frac{1}{3}$; substituant toujours i à e , nous trouverons encore, par l'article premier, $W'^1 = 1$ si $v > e$, & $W'^1 = 0$ si $v < e$; en sorte que le seul terme à déterminer sera celui de $e = \frac{1}{3}$, & $v = i = \frac{1}{3}$. Pour déterminer ce cas, nous supposerons d'abord $v = e$, ce qui nous donne $W'^1 = \frac{1}{2}$ ou 0, selon que $v >$ ou $< i$, & par conséquent la valeur moyenne est $\frac{1}{4}$. Si nous supposons $v = i$, nous aurons de même pour valeur moyenne $W'^1 = \frac{1}{4}$. Si enfin nous supposons $e = i$, nous aurons $W'^1 = 1$, ou $= 0$, selon que $v >$ ou $< e$, & $\frac{1}{2}$ pour valeur moyenne. Prenant donc une valeur moyenne entre ces trois valeurs, nous aurons $W'^1 = \frac{1}{3}$.

L'examen de la formule qui exprime W''_1 , nous donnera les mêmes valeurs pour les cas semblables.

Si maintenant nous cherchons la valeur de W^q , nous trouverons que W^q est égal à l'unité moins la somme des valeurs de W'^q , où l'on auroit mis v pour e , & réciproquement v pour i , & réciproquement. Donc, 1.^o si $v > e$ & $v > i$, $W^q = 1$; 2.^o si $v > e$ & $< i$, ou $< e$ & $> i$, on aura $W^q = 0$; 3.^o si $v = e$ & $v > i$, ou si $v = i$ & $v > e$, on aura $W^q = \frac{1}{2}$; 4.^o si $v = e$ & $v < i$, ou $v = i$ & $v < e$, on aura $W^q = 0$; 5.^o enfin que si $v = e = i$, on aura $W^q = \frac{1}{3}$; & il en sera de même de W'^q .

Tout ce qu'on vient de dire, a lieu également pour le cas où la pluralité seroit d'un nombre déterminé. A l'égard du cas où la pluralité seroit proportionnelle au nombre des Votans, on trouvera de même les quantités W^q , W'^q égales à 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 0 dans les différens cas suivans. 1.^o Toutes les fois que comparant v à e & à i séparément, on auroit V'^q ou $V^q = 1$ pour les deux cas, on aura W'^q ou $W^q = 1$; 2.^o toutes les fois que dans la même comparaison V'^q ou V^q sera $= 1$ pour e ou i , & égal à $\frac{1}{2}$ pour i ou e , on aura W'^q ou $W^q = \frac{1}{2}$; 3.^o si l'on a pour e $\frac{1}{2}$, & pour i $\frac{1}{2}$, on aura W'^q ou $W^q = \frac{1}{3}$; 4.^o ils seront égaux à zéro si V'^q ou V^q est pour un seul des e ou i égal à zéro. En poussant ce raisonnement plus loin, on trouvera de même que pour quatre voix, les W'^q ou W^q pourront être 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 0, & on déterminera de la même manière les cas de ces différentes valeurs, & en général pour p avis, où ces quantités peuvent être 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{p}$, 0.

Après avoir exposé ici les différentes formules qui peuvent avoir lieu pour la pluralité entre trois avis, il nous reste à examiner, comme ci-dessus, ce que peuvent désigner ici les quantités v , e & i .

Puisqu'il y a ici trois avis, il est évident que chacun ne peut être composé d'une seule proposition; sans cela il n'y auroit que deux avis, celui de la proposition & celui de la contradictoire. Cela posé, appelons les avis a , b , c , & supposons qu'il y ait seulement deux propositions; désignons ces deux

deux propositions par A & A' , & les deux contradictoires de chacune par N & N' . Supposons encore que l'avis a soit formé des deux propositions A & A' , & voyons quels peuvent être les avis b & c ; ces deux avis ne peuvent être que A & N' , A' & N , N & N' . Il y a donc ici réellement quatre avis; & si les propositions sont indépendantes l'une de

l'autre, soit δ le quatrième avis, & qu'on ait $\frac{a}{A \& A'}$, $\frac{b}{A \& N'}$, $\frac{c}{A' \& N}$, $\frac{\delta}{N \& N'}$; il est aisé de voir que l'on aura les voix pour a & b également pour A , & les voix pour c & δ également pour N , les voix pour a & c également pour A' , & les voix pour b & δ également pour N' . Supposons maintenant que l'on ait voté pour ces quatre avis a , b , c , δ ; qu'il y ait q voix pour a , q' pour b , q'' pour c , & q''' pour δ ; que q soit le plus grand de ces nombres, & qu'on ait en conséquence admis l'avis a , on admettra donc les propositions A & A' ; cependant la proposition A a pour elle dans la réalité $q + q'$ voix, $q'' + q'''$ contre; & la proposition A' a pour elle $q + q''$ voix, & contre elle $q' + q'''$. Il est évident que l'on peut avoir $q + q' < q'' + q'''$. En effet, faisant $q' = q - m$, $q'' = q - n$, $q''' = q - p$, il suffira d'avoir $n + p < m$. Il est clair de même que l'on pourra avoir $q + q'' < q' + q'''$; il suffiroit d'avoir $m + p < n$, mais que ces deux conditions ne peuvent avoir lieu en même-temps. Ainsi en prenant de cette manière la pluralité entre quatre avis, on sera exposé à décider en faveur d'une proposition qui a contre elle la pluralité réelle. Cette méthode est donc défectueuse.

Si les avis renfermoient trois propositions distinctes & indépendantes, il pourroit y avoir huit différens avis, seize pour quatre, & en général 2^n avis pour n propositions. Donc toutes les fois que les avis doivent se réduire à trois, à cinq, à des nombres intermédiaires à ceux qui entrent dans la série 2, 4, 8, 16, &c. c'est une preuve que les avis, tels qu'ils sont proposés, ne se réduisent point à un système de propositions

O

distinctes & indépendantes, & des contradictoires de ces propositions.

Examinons maintenant dans quel cas, la proposition étant composée de deux autres, il peut n'y avoir que trois avis. Nous trouvons ici deux cas, celui où des quatre combinaisons $A \& A'$, $A \& N'$, $N \& A'$, $N \& N'$, il y en a une qui implique contradiction; ce qui a lieu, par exemple, lorsque N étant la contradictoire de la proposition A , la proposition A' est une proposition contraire de la proposition A . Le second cas aura lieu lorsqu'on prend un avis a , par exemple, qui prononçant la proposition A , ne forme aucune décision entre les propositions $A' \& N'$, ce qui se subdivise en deux cas, l'un où celui qui forme l'avis a , ne peut voter entre $A' \& N'$, l'autre où il peut voter.

Ces trois hypothèses peuvent se présenter. Supposons d'abord ces trois avis b, c, d : *il est prouvé que l'accusé est coupable, il est prouvé qu'il n'est pas coupable, il n'est prouvé ni qu'il soit coupable ni qu'il ne le soit pas*, on aura, 1.^o les deux propositions $A \& N$, *il est prouvé que l'accusé est coupable, il n'est pas prouvé que l'accusé est coupable*; 2.^o les deux propositions $A' \& N'$, *il est prouvé que l'accusé est non-coupable, il n'est pas prouvé que l'accusé soit non-coupable*, il est clair que les deux propositions $A \& A'$ ne peuvent se combiner ensemble. Nous n'aurons donc que trois avis, l'un b , formé de $A \& N'$, qui est renfermé dans la seule proposition, *il est prouvé que l'accusé est coupable*; l'autre c , formé par les deux propositions $N \& A'$, *il n'est pas prouvé que l'accusé soit coupable, il est prouvé que l'accusé n'est pas coupable*, & qui peut être renfermé dans la seule proposition, *il est prouvé que l'accusé n'est pas coupable*; enfin l'avis d , formé par les deux propositions, *il n'est pas prouvé que l'accusé soit coupable, il n'est pas prouvé que l'accusé ne soit pas coupable*.

Soient ces trois avis portés; b par q Votans, c par q' Votans, d par q'' Votans, il est clair que l'on aura pour A q voix, & $q' + q''$ contre, que nous aurons pour A' q' voix, &c.

$q + q''$ pour N' . Soit donc $q > q'$ & q'' , si on en conclut une décision en faveur de l'opinion b , on adoptera réellement la proposition A avec q voix contre $q' + q''$, & la proposition N' avec $q + q''$ voix contre q' ; il sera donc très-possible que la proposition A soit adoptée avec l'avis de la minorité, quoiqu'on ait paru suivre la pluralité.

Si nous cherchons maintenant quels seroient dans ce cas les valeurs de v , i & e , employées dans les formules ci-dessus, nous supposerons d'abord que v' & e' représentent en général la probabilité que l'avis de chaque Votant sur une question simple sera conforme ou contraire à la vérité. Si nous considérons l'avis b , nous aurons donc v'^2 la probabilité que les deux décisions qui le forment sont conformes à la vérité; e'^2 la même probabilité pour l'avis c , & $v'e'$ pour l'avis d ; ainsi nous

pouvons supposer $v = \frac{v'^2}{v'^2 + e'v' + e'^2}$, $e = \frac{e'^2}{v'^2 + e'v' + e'^2}$, & $i = \frac{v'e'}{v'^2 + e'v' + e'^2}$, ce qui nous donnera, dans le cas

d'une pluralité constante, les W & les W' égaux à 1 si le nombre des Votans est $\frac{1}{2}$ lorsque $v' > e'$, & en général lorsque v' est, par rapport à e' , dans les limites où les V & les V' deviendroient 1, en ne considérant que v' & e' .

Si nous considérons l'avis c , & que v'^2 soit la probabilité de la vérité des deux décisions qui le forment, la probabilité de la vérité de b sera e'^2 , & celle de d sera $e'v'$. On aura donc encore pour v , e , i les mêmes valeurs que ci-dessus, qui conduiront aux mêmes résultats.

Considérons enfin l'avis d . Si sa probabilité est v'^2 , celle de c sera $v'e'$, & celle de b aussi $v'e'$, ce qui donnera

$v = \frac{v'^2}{v'^2 + 2v'e'}$, & i & e égaux $\frac{v'e'}{v'^2 + 2v'e'}$, ou

$v = \frac{v'}{v' + 2e'}$, $e = \frac{e'}{v' + 2e'}$, $i = \frac{e'}{v' + 2e'}$, & un

résultat semblable aux précédens pour les valeurs des W & des W' .

Supposons que l'on ait pris les avis séparément sur les deux propositions; la probabilité que l'avis qui réunit la pluralité sera vrai, sera exprimée par V'^2 , mais il ne faut pas supposer ici que V'^2 soit divisé par l'unité, mais seulement par le nombre des cas possibles. Soit donc V' la probabilité qu'une proposition aura la pluralité & sera vraie, E' qu'elle aura la pluralité & ne sera pas vraie, $\frac{V'^2}{V'^2 + 2V'E' + E'^2}$ exprimera la probabilité que deux opinions consécutives seront vraies, mais cela suppose la possibilité des opinions V'^2 , $V'E'$, $E'V'$ & E'^2 . Or ici, dans le cas de l'avis b , la combinaison $V'E'$ est contradictoire, puisqu'elle supposerait que, la proposition *l'accusé est prouvé coupable*, étant vraie, la proposition *l'accusé est prouvé n'être pas coupable* est vraie aussi. Ainsi dans ce cas la probabilité de l'avis b sera $\frac{V'^2}{V'^2 + V'E' + E'^2}$, celle de l'avis c étant $\frac{E'^2}{V'^2 + V'E' + E'^2}$, & celle de l'avis d étant $\frac{V'E'}{V'^2 + V'E' + E'^2}$. On trouvera un résultat semblable pour l'avis c , & pour l'avis d on aura la probabilité de d égale à $\frac{V'^2}{V'^2 + 2V'E'}$, celle de c égale à $\frac{V'E'}{V'^2 + 2V'E'}$, & celle de b égale à $\frac{V'E'}{V'^2 + 2V'E'}$, résultat analogue à celui que l'on a eu pour trois avis.

Voyons maintenant ce qui arrive lorsque la pluralité est connue, & supposons qu'on ait q voix pour b , q' voix pour c , q'' voix pour d , ce qui donne nécessairement pour A q voix; pour N , $q' + q''$ voix; pour A' , q' voix; pour N' , $q + q''$ voix. Considérons d'abord les trois avis, nous aurons, en examinant l'avis b ,

pour la probabilité que cet avis est vrai $v^{1^2q+q''} e^{1^2q'+q''}$
 pour la probabilité que la seconde proposition seulement
 est vraie $v^{1^2q''+q+q'} e^{1^2q'+q''}$
 pour la probabilité que toutes deux sont fausses $v^{1^2q'+q''} e^{2q+q''}$
 pour l'avis c maintenant; la probabilité qu'il est vrai,
 fera $v^{1^2q'+q''} e^{1^2q+q''}$
 la probabilité qu'une proposition seule en est vraie,
 fera $v^{1^2q'+q+q'} e^{1^2q+q''}$
 la probabilité que toutes deux sont fausses $v^{1^2q+q''} e^{1^2q'+q''}$
 enfin pour l'avis d , la probabilité qu'il est vrai, fera . . . $v^{1^2q''+q+q'} e^{1^2q+q''}$
 la probabilité qu'une proposition seule est vraie, si
 c'est N , fera $v^{1^2q'+q''} e^{1^2q+q''}$
 & si c'est N' , fera $v^{1^2q+q''} e^{1^2q+q''}$

Supposons donc d'abord q plus grand que q' & q'' , & qu'en conséquence l'avis b soit adopté, la probabilité qu'il est vrai fera

$$\frac{v^{1^2q+q''} e^{1^2q'+q''}}{v^{1^2q+q''} e^{1^2q'+q''} + v^{1^2q+q''} e^{1^2q'+q''} + v^{1^2q''+q+q'} e^{1^2q'+q''}}$$

sera $e^{1^2q+q''} v^{1^2q'+q''}$, avec le même dénominateur, & celle qu'il n'est vrai que quant à la proposition N' , $v^{1^2q''+q+q'} e^{1^2q+q''}$, divisé par le même dénominateur. Donc 1.° si nous avons $q'' + q' - q > 0$, il sera plus probable que N' seulement est vrai, & que, quoique la pluralité soit en faveur de b , c'est l'avis d qui doit être préféré; 2.° Supposant même $q = q' + q'' + r$, nous aurons la probabilité en faveur

de b égale à $\frac{v^{1^2q'+3q''+2r} e^{1^2q'+q''}}{v^{1^2q'+3q''+2r} e^{1^2q'+q''} + v^{1^2q'+q''} e^{1^2q'+3q''+2r} + v^{1^2q''+2q'+r} e^{1^2q'+q''+r}}$
 $= \frac{v^{1^2q'+2r}}{v^{1^2q'+2r} + e^{2q''+2r} + v^{1^2q''+r} e^{1^2q'+r}}$; donc négligeant même le

terme $e'^2 q'' + 2r$, il faudra pour avoir une grande probabilité en faveur de b , que $\frac{v'^r}{v'^r + e'^r}$ soit une quantité suffisamment grande.

Supposons maintenant $q' > q$ & q'' , nous trouverons, comme ci-dessus, que la conclusion formée à la pluralité des voix, n'aura qu'une probabilité moindre que $\frac{1}{2}$ si on a $q'' + q - q' > 0$; & ensuite faisant $q' = q + q'' + r$, qu'il faudra, pour avoir une probabilité suffisante, que $\frac{v'^r}{v'^r + e'^r}$ soit une quantité assez grande.

Supposons enfin $q'' > q$ & q' , nous aurons la probabilité de la vérité de l'avis δ exprimé par $v'^2 q'' + q + q' e'^q + q'$, divisé toujours par le même dénominateur, ce qui exige, 1.° comme ci-dessus, $q'' + q' > q$ & $q'' + q > q'$, ce qui a lieu toujours dans l'hypothèse; 2.° que $\frac{v'^{q''+q-1}}{v'^{q''+q-1} + e'^{q''+q-1}}$ ou $\frac{v'^{q''+q-1}}{v'^{q''+q-1} + e'^{q''+q-1}}$, selon que $q >$ ou $< q'$ soit suffisamment grand,

Nous supposons même ici que les termes $e'^{2r} e'^{2q}$ ou $e'^{2q'}$ peuvent être négligés devant les termes v'^{2r} , $v'^{2q''}$; car si ces termes ne pouvoient pas être négligés, il faudroit que les quantités

$$\frac{v'^{2r}}{v'^{2r} + v'^r e'^r + e'^{2r}}, \quad \frac{v'^{2q''}}{v'^{2q''} + v'^{q''+q-1} e'^{q''+q-1} + v'^{q''+q-1} e'^{q''+q-1}}$$

exprimassent des probabilités suffisantes.

Si nous supposons ensuite que l'on demande successivement aux mêmes Votans leur avis, 1.° sur les propositions A & N ; 2.° sur les propositions A' & N' , nous aurons q voix pour A , & $q' + q''$ pour N , q' voix pour A' , & $q + q''$ pour N' ,

en sorte que $\frac{v'^q e'^q + q''}{v'^q e'^q + q'' + v'^{q'+q''} e^q}$ & $\frac{e'^q v'^{q'+q''}}{v'^q e'^q + q'' + v'^{q'+q''} e^q}$ exprimant les probabilités de A & de N , & $\frac{v'^q e'^q + q''}{v'^q e'^q + q'' + v'^{q'+q''} e^q}$,

$\frac{v^q + v'' e^q}{v^q e^{q+q''} + v^{q+q''} e^q}$ les probabilités de A' & de N' , & les décisions A , A' étant contradictoires, on aura pour les trois avis possibles les probabilités suivantes,

$$\frac{v^{2q} + q'' e^{2q} + q''}{v^{2q} + q'' e^{2q} + q'' + v^{q+q'} + 2q'' e^{q+q'}} \text{ pour } A \text{ \& } N',$$

$$\frac{v^{2q} + q'' e^{2q} + q''}{v^{2q} + q'' e^{2q} + q'' + v^{q+q'} + 2q'' e^{q+q'}} \text{ pour } N \text{ \& } A', \text{ \&}$$

$$\frac{v^{q+q'} + 2q'' e^{q+q'}}{v^{2q} + q'' e^{2q} + q'' + v^{2q} + q'' e^{2q} + q'' + v^{q+q'} + 2q'' e^{q+q'}} \text{ pour } N \text{ \& } N',$$

comme ci-dessus. Or, pour que l'avis b doive être choisi, il faudra, 1.° $q > q' + q''$; 2.° $q + q'' > q'$, condition comprise dans la première. Pour que l'avis c doive être préféré, il faudra de même, 1.° $q' > q + q''$; 2.° $q' + q'' > q$; enfin pour que l'avis d doive être préféré, il faudra, 1.° $q' + q'' > q$; 2.° $q + q'' > q'$. Ces conclusions sont les mêmes que ci-dessus; & il résulte de ces formules que dans le cas, où l'on propose de délibérer sur trois avis, il ne faut pas prononcer à la pluralité de l'avis qui a le plus de voix, mais q , q' , q'' exprimant les voix pour les avis b , c , d , prononcer b , c , d , suivant que $q > q' + q''$, $q' > q + q''$ & $q' + q'' > q$.

$$q + q'' > q'.$$

Si on compte les voix de cette manière, il devient indifférent dans la théorie, ou de prendre les avis sur les trois propositions à la fois, ou sur deux successivement, en prenant les avis deux fois, mais cela peut ne pas être indifférent dans la pratique. Il sera nécessaire d'abord de partager les trois avis de manière qu'avant la délibération, les avis, b formé de A & de N' , c de N & de A' , d de N & de N' , soient bien distingués, afin que les voix q , q' , q'' soient bien distinctes les unes des autres si on prend les trois avis à la fois, ou bien si on prend deux fois les voix entre deux avis seulement pour que les avis soient bien établis. Si ensuite les avis ne sont pas donnés publiquement, ou signés, & qu'on procède

par scrutin, il peut y avoir un inconvénient à prendre successivement les deux avis, parce qu'il devient physiquement possible que le même Votant donne successivement l'avis A & l'avis A' , qui sont contradictoires entr'eux. Ainsi dans ce cas, il peut y avoir de l'avantage à ne point partager la question entre deux avis contradictoires, mais il y en auroit davantage encore à ne la point partager, si on adoptoit la méthode ordinaire de prendre la pluralité.

Nous avons vu qu'il y a deux autres cas, où dans la combinaison de deux systèmes de deux propositions contradictoires, les quatre avis qui en résultent paroissent se réduire à trois; le premier cas est celui où l'avis formé de la proposition A , ne prononce rien sur les propositions A' ou N' . Supposons, par exemple, que l'on propose deux moyens d'exécuter un projet, & que l'on admette ces trois avis, l'un pour le projet A' , l'autre pour le projet N' , & un troisième pour ne faire ni l'une ni l'autre des opérations proposées. Soit A ce dernier avis, N & A' celui du premier projet, N & N' celui du second, & supposons que A peut voter pour A' ou pour N' , ce qui a lieu si la vérité des propositions A' & N' est indépendante de la vérité des propositions A & N ; comme si, par exemple, il s'agissoit de choisir entre deux projets A' & N' d'amener une telle eau dans une ville, & que l'avis A fût qu'il faut les rejeter tous deux, parce que cette eau est mauvaise, il est clair que la supériorité de l'un de ces projets sur l'autre est indépendante de la première question. Si donc on a q voix pour A , q' pour N & A' , q'' pour N & N' , on auroit tort de prononcer en faveur de q lorsque q est plus grand que q' & q'' , puisque si $q < q' + q''$, on concluroit alors réellement que l'eau est mauvaise, d'après l'avis de la minorité. De même il ne faudroit pas conclure en faveur de q' lorsque q' est plus grand que q & que q'' , parce que supposé que ceux qui ont formé l'avis A , interrogés pour prononcer entre A' & N' votent, au nombre de q_1 pour q' , & de q_2 pour q'' , il peut arriver que $q' + q_1 > q'' + q_2$. Il ne faut donc pas, sur une question de ce genre, admettre trois avis, mais prendre successivement deux

deux fois les voix, chacune entre deux avis seulement. Ce que nous venons de dire de ce second cas est très-simple, & il auroit été inutile de nous y arrêter, si nous n'avions occasion de remarquer dans la suite que ce qui nous paroît absurde dans l'hypothèse que nous venons d'examiner, a constamment été pratiqué presque par-tout, & dans tous les temps, pour une hypothèse semblable, mais plus compliquée.

Mais ne peut-il pas arriver que la proposition qui forme l'avis *A*, soit telle que celui qui le prononce ne puisse voter ni pour *A'* ni pour *N'*? Cette supposition forme un second cas: l'exemple le plus simple qu'on en puisse choisir, est celui où l'avis *A* seroit; *on n'a pas les lumières nécessaires pour prononcer*. Alors il est clair que ceux qui ont eu cet avis *A* ne peuvent, sans se contredire, voter pour *A'* ou pour *N'*. Or dans ce cas on ne doit point, si q est plus grand que q' & que q'' , adopter l'avis *A*, mais rejeter cet avis tant que $q < q' + q''$, & adopter q' ou q'' , selon que $q' >$ ou $< q''$. Ce cas rentre absolument dans le premier, & on doit en tirer la même conclusion, c'est-à-dire, qu'il vaudra mieux demander à la fois la voix sur les trois avis, pourvu que l'on n'admette pas la manière ordinaire de prendre la pluralité. Voyez ce que nous avons dit ci-dessus.

Il se présente un quatrième cas; c'est celui où l'avis *A* paroît rejeter à la fois les avis *A'* & *N'*. Comme ces avis sont contradictoires, cette hypothèse est impossible à la rigueur; ainsi elle ne paroît se présenter que dans des cas où le système des trois avis n'est pas formé par deux systèmes de deux propositions contradictoires, mais par un plus grand nombre.

Par exemple, soient ces trois avis; *toute restriction mise au commerce est une injustice; les restrictions mises par des loix générales, peuvent seules être justes; les restrictions mises par des ordres particuliers, peuvent être justes*. Il est clair que si nous appelons *A* la proposition générale; *toute restriction est injuste*; *N* la proposition, *il y a des restrictions justes*; *A'* la proposition, *les restrictions mises par des loix générales peuvent seules être justes*; *N'* la proposition, les

restrictions même particulières peuvent être justes, alors ceux qui ont l'avis A , ne peuvent voter pour aucune des propositions A' & N' , puisqu'ils les rejettent toutes deux. Mais il faut observer en même-temps que nous avons ici réellement trois systèmes de propositions contradictoires.

A Toute restriction est injuste.

N Il y a des restrictions justes.

A' Les restrictions mises par des loix générales, peuvent être justes.

N' Les restrictions mises par des loix générales, ne peuvent être justes.

A'' Les restrictions mises par des ordres particuliers, peuvent être justes.

N'' Les restrictions mises par des ordres particuliers, ne peuvent être justes.

Ce système produit huit combinaisons, formant huit avis qui seroient tous possibles si les propositions étoient indépendantes : ces huit avis sont, (1) $AA'A''$, (2) $AA'N''$, (3) $AN'A''$, (4) $AN'N''$, (5) $NA'A''$, (6) $NA'N''$, (7) $NN'A''$ (8) $NN'N''$. Voyons maintenant comment le système de huit avis a pu paroître se réduire à trois.

Il est clair, 1.^o que les avis (1) (2) (3) sont impossibles, puisqu'ils sont formés de propositions qui se contredisent; 2.^o que l'avis (8), formé des propositions N , N' , N'' , est rejeté, parce qu'on suppose qu'il n'y a que ces deux manières de mettre des restrictions au commerce, & qu'ainsi cet avis implique également contradiction; 3.^o que l'avis (7) a pu être rejeté, parce qu'on a pu regarder comme absurde un avis où entreroient les deux propositions N' & A' , en supposant que si les restrictions mises par des loix générales sont injustes, à fortiori celles qui sont mises par des ordres particuliers, doivent l'être aussi. Cela posé, il nous reste seulement les avis (4), (5) & (6).

Soit q le nombre des Votans pour l'avis (4), q' pour

l'avis (5), q'' pour l'avis (6), & voyons ce qu'il en résulte pour la probabilité de chacune des trois décisions.

La probabilité pour A sera ici $\frac{v^q e^{q'+q''}}{v^q e^{q'+q''} + v^{q'+q''} e^q}$, & celle pour N $\frac{v^{q'+q''} e^q}{v^q e^{q'+q''} + v^{q'+q''} e^q}$; la probabilité pour A' sera $\frac{v^{q'+q''} e^q}{v^q e^{q'+q''} + v^{q'+q''} e^q}$, & celle pour N' sera $\frac{v^q e^{q'+q''}}{v^q e^{q'+q''} + v^{q'+q''} e^q}$; enfin la probabilité pour A'' , sera $\frac{v^{q'+q''} e^q}{v^q e^{q'+q''} + v^{q'+q''} e^q}$, & celle de N'' sera $\frac{v^{q'+q''} e^q}{v^q e^{q'+q''} + v^{q'+q''} e^q}$. Les probabilités des avis (4), (5), (6), seront donc comme $v^{3q+q''} e^{3q'+2q''}$, $v^{3q'+2q''} e^{3q+q''}$, & $v^{q+2q'+3q''} e^{2q+q'}$.

Si maintenant nous examinons ces trois termes, nous verrons que les avis (4), (5), (6), ont réellement la pluralité, non lorsqu'on a $q > \frac{q'}{2}$, ou $q' > \frac{q}{2}$, ou $q'' > \frac{q}{2}$, mais quand on a $3q+q'' > \frac{3q'+2q''}{q+3q'+2q''}$, ou $3q'+2q'' > \frac{3q+q''}{q+3q'+2q''}$, ou $q+3q'+2q'' > \frac{3q+q''}{3q'+2q''}$, & qu'ainsi dans ce cas encore; en prenant la décision à la pluralité entre les avis à la manière ordinaire, on pourroit adopter l'avis de la minorité.

En effet en examinant ces formules, on trouvera que $3q+q'' > \frac{3q'+2q''}{q+2q'+3q''}$ donne $2q > 2q' + 2q''$ ou $q > q' + q''$; d'où il résulte; 1.° qu'on ne doit adopter l'avis (4) que lorsque $q > q' + q''$; 2.° que dans ce cas, le nombre des voix pour A étant q , le nombre des voix pour N' aussi q , le nombre des voix pour N'' , $q + q''$, chacune des trois propositions qui forment l'avis (4) aura la pluralité en sa faveur.

De même si $3q'+2q'' > \frac{3q+q''}{q+2q'+3q''}$, on aura $q' > q + q''$; d'où il résulte, 1.° qu'il faut que $q' > q + q''$ pour que l'avis (5)

puisse être adopté; 2.^o que le nombre de voix pour N étant $q' + q''$, pour A' aussi $q' + q''$, & pour A'' , q' , chacune des trois propositions qui forment l'avis (5) aura la pluralité en sa faveur.

Enfin si $q + 2q' + 3q'' > \frac{3q + q''}{3q' + 2q''}$, il faudra que $q + q'' > q'$ & $q' + q'' > q$. Ces deux conditions sont donc nécessaires pour l'avis (6); & comme le nombre des voix pour N & A' est $q' + q''$, & pour N , $q + q''$, il est clair qu'elles ne peuvent avoir lieu, sans que les trois propositions, qui forment l'avis (6), n'aient en même-temps la pluralité.

Ainsi dans cette hypothèse, comme dans la première & la troisième ci-dessus, il peut être avantageux de demander qu'on prononce entre trois avis, pourvu que l'on suive dans la manière de compter la pluralité, la méthode indiquée par le calcul.

Ce que nous avons dit jusqu'ici suffit pour indiquer les principes que l'on doit suivre lorsque dans un système de n propositions contradictoires deux à deux, les 2^n combinaisons d'avis possibles se réduisent à trois, quatre, & en général à un nombre d'avis moindre que 2^n . Nous remarquerons ici de plus qu'il se présente une différence importante entre la première hypothèse de trois avis, que nous avons considérée, & cette quatrième hypothèse. Dans la première, les avis étoient réduits à trois par la nature même de la question; mais dans celle-ci les avis ne sont réduits à trois qu'en vertu de suppositions, dont une au moins, celle qui exclut l'avis (7), n'est pas d'une vérité nécessaire. En effet, cet avis seroit; *il y a des restrictions justes, les restrictions mises par des loix générales ne peuvent être justes; celles qui sont mises par des ordres particuliers peuvent être justes.* Or il n'y a rien dans cet avis qui soit rigoureusement contradictoire dans les termes mêmes, ainsi il ne doit être rejeté de la délibération que dans la supposition qu'aucun des Votans ne l'admettroit. Ce qui a lieu ici pour un avis pourroit avoir lieu pour un plus grand nombre dans des questions plus compliquées.

On peut conclure de-là, 1.^o que lorsqu'il s'agit de prononcer à la pluralité des voix sur des questions compliquées, il est nécessaire de réduire ces questions à un système de propositions contradictoires deux à deux; 2.^o qu'il faut examiner ensuite si ce système peut se résoudre en deux ou plusieurs systèmes indépendans l'un de l'autre, & dans ce cas prendre séparément les avis sur chaque système; 3.^o qu'il faut prendre toutes les combinaisons d'avis possibles qui résultent de chaque système & en exclure les avis qui sont contradictoires dans les termes; 4.^o quant à ceux qui, comme l'avis (8) de la quatrième hypothèse que nous avons considérée, ne sont exclus que parce qu'ils renferment une contradiction avec une vérité reconnue, ou qui, comme l'avis (7), renferment des propositions dont la contradiction paroît claire sans être dans les termes, & par conséquent sans être évidente par elle-même, ils ne doivent être rejetés qu'avec précaution, & la sûreté de la décision paroît exiger qu'avant de les exclure, on s'assure qu'ils ne seroient adoptés par aucun des Votans; 5.^o après avoir ainsi réduit ces avis, on doit choisir celui qui a la pluralité, en la prenant suivant le principe que nous avons indiqué ci-dessus, mais en observant que, si par la nature de la question, on exige une certaine pluralité pour pouvoir adopter une décision, il faut exiger cette pluralité pour toutes les propositions qui entrent dans la décision.

On voit donc combien il faut de précautions pour obtenir, à la pluralité des voix, une décision probable sur des questions compliquées, & que cela exige de la part de ceux qui proposent les objets de délibération, de la sagacité & des lumières. Cependant, dans la plupart des pays où les affaires les plus importantes sont décidées à la pluralité des voix, on n'a paru attacher aucune importance à cet objet, quoiqu'il résulte de ce que nous avons dit, que, faute de cette attention, on est exposé à regarder comme faites à la pluralité des voix, des décisions qui n'ont réellement que la minorité. Il ne faut donc pas s'étonner si on a eu lieu d'observer que les décisions rendues

par des assemblées nombreuses, sont souvent contraires à la vérité, puisque, indépendamment du peu de probabilité que peut avoir le suffrage de chaque Votant, lorsqu'ils sont un grand nombre, il arrive encore qu'il se glisse des erreurs dans la manière de recueillir les suffrages. Cette observation conduit naturellement à deux réflexions qui nous paroissent importantes; la première, que ce n'est point uniquement à la nature de l'esprit humain qu'il faut attribuer le peu de confiance que méritent souvent les décisions des grandes assemblées, mais que la mauvaise méthode d'y prendre les avis, est une source d'erreurs très-fréquente; la seconde, que la connoissance de la méthode qu'il faut suivre pour obtenir d'une assemblée des décisions sur la vérité desquelles on puisse raisonnablement compter, dépend d'une théorie plus compliquée qu'on ne le croit communément.

Ce que nous avons dit jusqu'ici, suffira pour apprécier l'usage établi dans quelques pays, d'obliger ceux qui ont voté pour un certain nombre d'avis plus grand que deux, de se réunir pour un des deux avis qui ont eu le plus de voix. En effet, connoissant les voix qui ont été données pour chacun des avis, il est aisé, en formant de ces avis un système de propositions contradictoires deux à deux, de voir dans quel cas un des deux avis les plus nombreux a réellement la pluralité; dans quel cas ceux qui ont été d'un autre avis, peuvent se réunir à l'un des deux par un nouveau jugement, où ont déjà formé leur vœu pour l'un des deux, ou ne peuvent adopter ni l'un ni l'autre.

On voit en effet qu'il seroit absurde d'exiger en général de ceux qui ont voté pour un avis, de se réunir à l'un des deux qui ont la pluralité, puisqu'il y a des cas où ils ne peuvent voter, & d'autres où ils ne doivent pas être libres de choisir, & il ne paroît pas qu'on ait fait une assez grande attention à cette distinction dans les pays où cet usage est établi.

Nous ne nous sommes pas arrêtés à chercher en général dans tous les cas que nous avons examinés, la probabilité d'avoir une décision conforme, ou non à la vérité, parce qu'il suffit

pour y parvenir, d'une application très-simple des formules que nous avons développées ci-dessus.

Il nous reste maintenant pour terminer ce que nous avons à dire sur les décisions prises entre trois ou un grand nombre d'avis, à examiner le cas d'une élection : nous supposerons trois Candidats seulement.

Appelons les trois Candidats A, B, C , il est clair que celui qui élit A , prononce les deux propositions $A > B$; $A > C$ (Nous employons ici l'expression $A > B$ pour exprimer que A vaut mieux que B); celui qui élit B , prononce les deux propositions $B > A$, $B > C$, & celui qui élit C , les deux propositions $C > A$, $C > B$; mais le premier ne décide rien sur la proposition $B \gtrsim C$, le second sur la proposition $A \gtrsim C$, le troisième sur la proposition $B \gtrsim A$. Il résulte de cette première observation, qu'il est très-possible que A ait la pluralité suivant la méthode ordinaire de compter, & que cependant il ne l'ait pas réellement. En effet, supposons que des q voix pour A il y en ait q_1 qui eussent prononcé $B > C$, & q_2 qui eussent prononcé $B < C$; que des q' pour B toutes eussent prononcé $C > A$, & que des q'' pour C , toutes eussent prononcé $B > A$; il y aura donc pour $B > C$, $q' + q_1$; pour $C > B$, $q'' + q_2$; pour $A > B$, q voix; pour $A > C$, aussi q voix; pour $A < B$, $q' + q''$; pour $A < C$, $q' + q''$; d'où il résulte que si $q' + q'' > q$, & $q' + q_1 > q'' + q_2$, la véritable pluralité sera en faveur de B . Soit, par exemple, $q = 11$, $q' = 10$, $q'' = 10$, $q_1 = 8$, $q_2 = 3$, il y aura vingt voix contre onze pour décider que B & C sont supérieurs à A , & dix-huit contre treize pour décider que B est supérieur à C , cet exemple suffit pour montrer que la méthode ordinaire de déterminer la pluralité dans les élections est absolument défectueuse.

Il est même très-possible que la vraie pluralité appartienne réellement à celui qui a eu le moins de voix. En effet, on peut avoir $q > q' > q''$, & cependant $q < q' + q''$, & $q' + q_1 < q'' + q_2$. Soit, par exemple, $q = 11$, $q' = 10$,

$q'' = 9$, $q' = 3$, $q''' = 8$, A sera inférieur à B comme à C , à la pluralité de 19 contre 11, & C sera supérieur à B , à la pluralité de 17 contre 13.

Pour chercher maintenant quelle méthode on peut prendre pour ne commettre aucune autre erreur dans les élections, que celles qui naissent des erreurs commises dans le jugement des Votans, nous allons rappeler cette question aux principes que nous venons d'établir.

Il est clair, 1.^o que nous avons ici un système de trois propositions & de leurs contradictoires, $A > B$, $A > C$, $B > C$.

$$A < B \quad A < C \quad B < C$$

Nous avons donc huit combinaisons possibles;

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| (1) $A > B$, | (2) $A > B$, | (3) $A > B$, | (4) $A > B$, |
| $A > C$ | $A > C$ | $A < C$ | $A < C$ |
| $B > C$ | $B < C$ | $B > C$ | $B < C$ |
| | | | |
| (5) $A < B$, | (6) $A < B$, | (7) $A < B$, | (8) $A < B$, |
| $A > C$ | $A > C$ | $A < C$ | $A < C$ |
| $B > C$ | $B < C$ | $B > C$ | $B < C$ |

2.^o Qu'en examinant ces huit combinaisons, (1) & (2), nous donneront $A > B$ & C ; (5) & (7) $B > A$ & C ; (4) & (8) $C > A$ & B , & que (3) & (6) sont contradictoires dans les termes, puisque deux des propositions quelconques qui les forment, ne peuvent subsister avec la troisième. Il n'y a donc réellement que six avis possibles, comme on l'auroit trouvé en observant qu'il ne reste à celui qui vote pour un des trois qu'à prononcer sur la supériorité des deux autres.

3.^o En supposant donc qu'on admette ces six avis seulement, & qu'on cherche ensuite la probabilité sur chaque proposition: soient q' , q'' , q''' , q'''' , q'''''' , q'''''''' le nombre des voix pour les avis (1), (2), (4), (5), (7) & (8), nous aurons

pour $A > B$ $q' + q'' + q'''$ voix,

pour $A < B$ $q'''' + q'''''' + q''''''''$,

pour

- pour $A > C$ $q' + q'' + q^v$ voix,
- pour $A < C$ $q^{iv} + q^{vii} + q^{viii}$,
- pour $B > C$ $q' + q^v + q^{vii}$,
- pour $B < C$ $q'' + q^{iv} + q^{viii}$.

4.° On pourroit donc choisir pour celui des six avis qu'on doit adopter, celui où la somme des trois nombres de ces suites qui y répondent, est la plus grande, comme on a fait précédemment; mais il faut observer que dans les cas que nous avons examinés, l'avis pour lequel cette somme étoit la plus grande, étoit formé de manière que chacune des trois propositions qui le composoit, avoit la pluralité en sa faveur; en sorte que cet avis étoit toujours formé des trois propositions qui avoient la pluralité, & que celle des combinaisons à laquelle appartenoit cette propriété, ne pouvoit être du nombre de celles qui renferment une contradiction dans les termes: or c'est ce qui n'a pas lieu ici. Prenant en effet la combinaison (3) qui est exclue, nous aurons, pour que les trois propositions qui la forment aient la pluralité, les trois conditions $q' + q'' + q^{iv} > q^v + q^{vii} + q^{viii}$, $q^{iv} + q^{vii} + q^{viii} > q' + q'' + q^v$ & $q' + q^v + q^{vii} > q'' + q^{iv} + q^{viii}$; conditions auxquelles on peut satisfaire, pourvu que l'on ait $q' > q^{viii}$, $q^{iv} > q^v$, $q^{vii} > q''$, & la différence entre ces quantités, prises ainsi deux à deux, telle que la somme de deux différences soit plus grande que la troisième. Soit, par exemple, $q' = 9$, $q^{viii} = 3$, $q^{iv} = 7$, $q^v = 4$, $q^{vii} = 6$, $q'' = 2$, on aura pour la première proposition 18 voix contre 13, pour la seconde 16 contre 15, pour la troisième 19 contre 12.

D'ailleurs il faut observer que deux des six avis, donnent le même résultat, ce qui les réduit réellement à trois, & qu'ainsi ce ne seroit pas celui des six avis qui obtient la pluralité qu'il faudroit choisir, mais la combinaison de deux avis qui auroit cet avantage, & que par conséquent on supposeroit que les voix ont été données pour A , pour B ou pour C , selon que l'un des nombres $2q' + 2q'' + q^{iv} + q^v$,

Q

$2q^v + 2q^{v''} + q' + q^{v''''}$, $2q^{iv} + 2q^{v''''} + q'' + q^{v''}$,
surpasseroit les deux autres.

Si le premier nombre est supposé plus grand que les deux autres, nous aurons pour conditions $q' - q^{v''''} + q^{iv} - q^v > 2(q^{v''} - q'')$ & $2(q' - q^{v''''}) > q^{iv} - q^v + q^{v''} - q''$; conditions auxquelles satisfont les nombres pris ci-dessus. On choisiroit donc dans ce cas l'avis (1); or cet avis renferme la proposition $A > C$, qui dans l'hypothèse seroit admise à la minorité de quinze voix contre seize; & on trouvera de même, que quelque décision que l'on préfère, elle renfermera toujours une proposition adoptée avec la minorité.

5.° Il se présente ici nécessairement une distinction à faire. En effet, on peut supposer ou qu'il est nécessaire de choisir un des Élus, ou que cela n'est pas nécessaire. Dans ce second cas, on peut prendre également deux partis, l'un plus simple, qui seroit, par exemple, d'exiger qu'un des trois Candidats eût plus que la moitié des voix, parce qu'il est aisé de voir, d'après les formules précédentes, que dans ce cas les avis (3) & (6) ne peuvent avoir lieu, & qu'il n'y a aucune hypothèse où ce Candidat n'ait pas la pluralité; mais cette méthode a l'inconvénient d'exposer souvent à regarder comme indécise une élection qui est réellement décidée: le second parti seroit d'examiner si, en prenant les voix qui résultent des six avis seuls possibles, on peut avoir pour les trois systèmes de propositions, $A > B$, $B > A$, $C > A$ la pluralité pour les deux propositions $A > C$, $B > C$, $C > B$

à la fois, & d'adopter le système pour lequel cette propriété a lieu. Il faut donc chercher ici quelle peut être, dans cette manière de prendre les décisions, la probabilité de leur vérité. Supposons, par exemple, que nous ayons pour $A > B$ 18 voix, pour $A > C$ 18 voix, pour $B > A$ 15 voix, pour $C > A$ 15 voix, pour $B > C$ 32 voix, pour $C > B$ une voix, & qu'on demande la probabilité de la décision, qui est ici en faveur de la combinaison $A > B$, $A > C$, nous aurons, pour la probabilité de la proposition $A > B$

$\frac{v^{18}e^{15}}{v^{18}e^{15} + v^{15}e^{18}} = \frac{v^3}{v^3 + e^3}$, de même $\frac{v^3}{v^3 + e^3}$ pour la probabilité de la proposition $A > C$, & par conséquent pour la probabilité des deux jugemens combinés $\frac{v^6}{v^6 + 2v^3e^3 + e^6} = \frac{1}{1 + \frac{2e^3}{v^3} + \frac{e^6}{v^6}}$. Comparons maintenant cette pro-

babilité avec celle des deux propositions combinées $B > C$, $B > A$; la probabilité de la première étant $\frac{v^{31}}{v^{31} + e^{31}}$, & celle de la seconde $\frac{e^3}{v^3 + e^3}$, la probabilité combinée sera

$$\frac{v^{31}e^3}{v^{31} + v^{31}e^3 + v^3e^{31} + e^{34}} = \frac{e^3}{v^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{e^3}{v^3} + \frac{e^{31}}{v^{31}} + \frac{e^{34}}{v^{34}}}$$

d'où comparant ces deux quantités, pour que la probabilité de $A > B$ surpasse celle de $B > C$, il faudra que $1 + \frac{e^3}{v^3}$

$$A > C \qquad B > A$$

$$+ \frac{e^{31}}{v^{31}} + \frac{e^{34}}{v^{34}} > \frac{e^3}{v^3} + \frac{2e^6}{v^6} + \frac{e^9}{v^9}. \text{ Or il est aisé}$$

de voir que cette condition n'a pas lieu pour toutes les valeurs de $v > e$; ce qui a lieu dans cet exemple peut avoir lieu pour d'autres valeurs de $q, q'' \dots q^{111}$. Ainsi le système de propositions pour lequel on conclut la pluralité, n'est pas nécessairement celui qui a la plus grande probabilité.

Cette conséquence doit-elle faire rejeter cette méthode? telle est la question qui nous reste à examiner ici.

1.° Celui qui donneroit la préférence à A , d'après une élection faite sous cette forme, raisonneroit ainsi: j'ai lieu de croire que A vaut mieux que C , & j'ai aussi lieu de croire que A vaut mieux que B ; donc je dois préférer A à B & à C . Celui qui donneroit la préférence à B , parce que la probabilité de la vérité de la combinaison $B > C, B > A$ est plus grande, raisonneroit ainsi: j'ai lieu de croire très-fortement

Q ij

que B vaut mieux que C , & j'ai lieu de croire que A vaut mieux que B ; donc je dois préférer B à C & à A . Or ce dernier raisonnement paroît absurde.

2.° La combinaison $B > C, B > A$, qui a une probabilité plus grande que la combinaison $A > B, A > C$, n'a cet avantage que parce qu'une des propositions qui la composent a une très-grande probabilité; ce qui fait que, quoique la seconde ait une probabilité au-dessous de $\frac{1}{2}$, la probabilité de la combinaison totale est supérieure à celle de deux propositions, qui toutes deux ont une probabilité au-dessus de $\frac{1}{2}$. Mais il ne peut résulter de cela que l'on doive admettre une proposition dont la probabilité est plus petite que $\frac{1}{2}$ de préférence à la proposition contradictoire, dont la probabilité est plus grande que $\frac{1}{2}$.

3.° Dans le cas que nous considérons ici, la préférence ne peut être donnée à C sur A & B . Il ne peut donc y avoir de doute qu'entre A & B , mais $A > B$ est plus probable que $B > A$; donc A doit être préféré.

4.° Il faut observer encore que ce cas ne peut arriver que lorsque la probabilité de la combinaison $A > B, A > C$ est plus petite que $\frac{1}{2}$, puisqu'un des termes, qui par l'hypothèse entrent comme facteurs dans la probabilité de la combinaison $B > C, B > A$, est nécessairement au-dessous de $\frac{1}{2}$, & l'autre au-dessous de l'unité. Ce cas est donc un de ceux où l'on ne doit choisir que lorsqu'il y a nécessité de se décider; & dans le cas où l'on est forcé de choisir, c'est à la combinaison des deux avis, dont la probabilité est plus grande, qu'il faut s'arrêter.

Examinons l'autre cas où l'on peut être forcé de choisir, celui où en prenant les voix, on seroit conduit à l'avis (3). On aura alors dans les trois systèmes,

(I) $A > B$, (III) $B > C$, (V) $C > A$, formés des propositions (I) & (II), (III) & (IV), (V) & (VI), les propositions (I), (III), (V) conformes à l'avis de la

pluralité, & les propositions (II), (IV), (VI) conformes à l'avis de la minorité. Soit ici d'abord l'avis $B > C$ qui a la plus grande pluralité, il est clair que la proposition (V) aura une moindre pluralité, & la proposition (VI) une plus grande minorité. Le troisième système doit donc être absolument exclu, & la décision ne peut être supposée en faveur de C contre B . Comparons ensuite les deux autres systèmes; il pourra d'abord arriver que la proposition (I) ait une moindre probabilité que la proposition (V). Dans ce cas, (II) sera plus improbable que (IV), & par conséquent, en adoptant le second système, on adoptera non-seulement celui pour lequel la probabilité des deux propositions combinées est la plus grande, mais celui où chacune des deux propositions qui le composent l'emporte sur chacune des deux propositions qui composent l'autre système: mais si au contraire la proposition (I) est plus probable que la proposition (V), la proposition (II) sera moins improbable que la proposition (IV); & dans ce cas, quand même la probabilité du second système surpasseroit celle du premier, il vaut mieux adopter le premier qui n'oblige pas à admettre une proposition si improbable.

Si l'on ne s'arrête pas à réunir tous les avis qui conduisent au même résultat, & qu'on ne considère que l'avis le plus probable; dans le premier cas, où nous avons proposé de rejeter la combinaison la plus probable dans certaines circonstances, l'avis adopté se trouve résulter des trois propositions qui ont eu le plus de voix; & de même dans ce second cas, où les trois avis ne peuvent subsister ensemble, l'avis adopté résulte des deux qui sont les plus probables. C'est donc réellement à la combinaison d'avis la plus probable qu'on donne la préférence, & on ne paroît en préférer une moins probable, que parce qu'on avoit fait entrer dans le jugement des combinaisons moins probables qui conduisent au même résultat.

Si on veut appliquer ce que nous venons de dire au cas où il y a un nombre n de Candidats, on pourra suivre les règles suivantes: 1.° tous les avis possibles, & qui n'impliquent

pas contradiction, se réduisent à indiquer l'ordre de mérite que l'on juge avoir lieu entre les Candidats. Par exemple, les six avis ci-dessus se réduisent aux six combinaisons (1) A, B, C ; (2) A, C, B ; (4) C, A, B ; (5) B, A, C ; (7) B, C, A ; (8) C, B, A , que nous marquons ici des mêmes numéros que les avis qui y répondent (*voyez page 120*), & qui indiquent les différens ordres, suivant lesquels A, B, C peuvent être rangés. Donc pour n Candidats, on aura $n \cdot n - 1 \dots 2$ avis possibles; 2.° Chaque Votant ayant donné ainsi son avis, en indiquant l'ordre de valeur des Candidats, si on les compare deux à deux, on aura dans chaque avis $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ propositions à considérer séparément. Prenant le nombre de chaque fois que chacune est comprise dans l'avis d'un des q Votans, on aura le nombre de voix qui adoptent chaque proposition; 3.° on formera un avis des $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$ propositions qui réunissent le plus de voix. Si cet avis est du nombre des $n \cdot n - 1 \dots 2$ avis possibles, on regardera comme élu le Sujet à qui cet avis accorde la préférence. Si cet avis est du nombre de $2^{\frac{n \cdot n - 1}{2}} - n \cdot n - 1 \dots 2$ avis impossibles, alors on écartera de cet avis impossible successivement les propositions qui ont une moindre pluralité, & l'on adoptera l'avis résultant de celles qui restent; 4.° dans le cas où l'on ne sera pas obligé d'élire, & où l'on pourra différer, on examinera la probabilité des avis réunis qui donnent la préférence à A , à B , à C , &c. & on n'admettra l'élection que lorsqu'il résulte en faveur d'un des Candidats une probabilité plus grande que $\frac{1}{2}$; ce qui ne peut avoir lieu dans le cas où le résultat des voix conduit à un des $2^{\frac{n \cdot n - 1}{2}} - n \cdot n - 1 \dots 2$ avis absurdes, & n'a lieu dans le cas des $n \cdot n - 1 \dots 2$ autres avis, que lorsque chacune des $n - 1$ propositions $A > B$, $A > C$, &c. qui forment essentiellement l'avis en faveur de A , par exemple, sont celles qui réunissent

le plus de voix ; il y a cependant une très-grande différence entre ce cas & celui d'un avis impossible. Dans ce dernier cas, on est obligé d'admettre une proposition qui a réellement la pluralité contr'elle, ce qui n'a pas lieu ici : ainsi lorsqu'il y a des inconvéniens à différer l'élection, on peut admettre l'avis possible, pris comme nous l'avons exposé ci-dessus ; au lieu qu'il faut une véritable nécessité d'élire pour adopter l'avis lorsque les propositions qui le forment impliquent contradiction ; 5.° on ne peut choisir une méthode plus simple. Supposons en effet pour trois Candidats, qu'on se borne à demander si $A > B$, si $A > C$, & qu'il en résulte une votation positive en faveur des deux énoncés, on aura à la vérité une décision conforme à celle que nous avons montré ci-dessus qu'il falloit choisir, *pages 123 & suiv.* Si on a une votation positive pour la première proposition, négative pour la seconde, alors on ne sera pas en droit d'en conclure en faveur de C , comme ces deux propositions paroissent l'indiquer, puisque nous avons vu que, dans le même cas, la décision peut être en faveur de A , si on décide que $B > C$, & que des trois propositions $A < C$ soit la moins probable ; en faveur de B , si de trois propositions $A > B$ est la moins probable ; en faveur de C , si des trois propositions $B > C$ est la moins probable, ou dans le cas de la votation en faveur de $C > B$, cas qui est compris dans celui où $B > C$ est supposée la moins probable des trois propositions. De plus, il est évident qu'en admettant cette méthode, on auroit des résultats différens, suivant qu'on commenceroit à délibérer sur la suite des propositions $A > B$, $A > C$ ou $B > A$, $B > C$, ou $C > A$, $C > B$; 6.° il est nécessaire de connoître le nombre des Candidats, & toute élection exige nécessairement que par une première votation on ait décidé sur la capacité des Candidats, dans le cas où l'avis seroit adopté, même s'il n'étoit pas formé des $n - 1$ propositions qui ont la pluralité ; 7.° si le nombre des Votans est très-grand, & la probabilité de l'avis de chacun très-peu au-dessus de $\frac{1}{2}$, il devient très-difficile, à proportion que le nombre des Candidats est plus grand,

d'obtenir une décision qui ait un degré de probabilité au-dessus de $\frac{1}{2}$. Ainsi on ne doit confier à une grande assemblée le choix qu'entre des Candidats qui ont été d'ailleurs jugés très-capables, avec une probabilité très-grande, ou bien le droit de présenter à une assemblée moins nombreuse & plus éclairée un certain nombre de Candidats. En général toute élection faite par un grand nombre d'hommes, conduit à une très-petite probabilité que l'on a choisi le meilleur.

Dans tout ce que nous avons dit, on suppose que tous votent de bonne foi. Nous verrons dans la quatrième Partie ce qu'il faut modifier de ces conclusions dans la supposition contraire.

Examinons maintenant le cas où il y a partage, & prenons celui de trois Candidats seulement. L'égalité peut avoir lieu de deux manières, ou parce qu'il y a partage entre A & B , en sorte que $A > B$ & $A < B$ ont un nombre égal de voix, ou bien lorsqu'il y a égalité entre deux propositions indépendantes, comme $A > B$ ou $A < B$, $A > C$, ou $C > A$, $B > C$, ou $C > B$. Par exemple, soit $A = B$ à substituer dans les huit résultats ci-dessus ; ils se réduiront à quatre :

$$\begin{array}{cccc} A = B, & A = B, & A = B, & A = B \\ A > C & A > C & A < C & A < C \\ B > C & B < C & B > C & B < C \end{array}$$

Le quatrième qui comprend (4) & (8), est en faveur de C ; le troisième, qui comprend (3) & (7), est en faveur de B ; le second, qui contient (2) & (6); est en faveur de A ; le premier enfin, qui contient (1) & (5), est indécis, quoique l'on puisse supposer un peu plus de présomption pour A que pour B , selon que $A > C$ est plus ou moins probable que $B > C$.

Supposons maintenant $A > B$ & $A > C$ égaux, ce qui ne peut avoir lieu que dans les décisions (1) & (2), où l'on aura toujours la décision en faveur de A , & dans les décisions (7) & (8), dont l'une est en faveur de B , & l'autre en faveur de C .

Supposons

Supposons enfin $A > B$ & $B > C$ égaux, nous aurons (1) en faveur de A , (3) en faveur de A si $A > B$ a plus de voix que $C > A$, indécis entre B & C dans le cas contraire, mais avec quelque présomption en faveur de B . Dans le (6) nous aurons une décision en faveur de C si $A > C$ a moins de voix que $B > A$, & nulle décision dans le cas contraire, mais avec quelque avantage pour B , & enfin nous aurons pour (8) la décision en faveur de C . Nous avons jugé ici des résultats d'après les principes exposés ci-dessus, pages 123 & suivantes; & il faut distinguer également les cas où l'on forme le résultat de propositions, toutes plus probables que leur contradictoire, & ceux où l'on ne peut avoir le même avantage.

Si les trois A , B , C ont un nombre égal de voix, il est clair qu'il n'y aura rien de décidé; & s'il y a égalité entre trois propositions, cela ne changera rien pour les cas (1), (2), (4), (5), (7), (8); & pour les cas (3) & (6) il n'y aura aucune décision.

Ces principes s'appliqueront au cas où il y a plus de trois Candidats, & suffiront pour les résoudre.

Ce que nous avons dit des élections, s'applique au cas où les délibérations portent sur un système de propositions contradictoires deux à deux & liées entr'elles, dont il résulte plus de trois propositions possibles.

Il ne nous reste à examiner sur les élections que deux questions; la première, la probabilité des erreurs où l'on peut être entraîné en suivant la méthode ordinaire. Nous supposons ici trois Candidats A , B , C , & que sur q Votans A a obtenu q' suffrages; B , q'' suffrages; C , q''' suffrages. Cela posé, puisque les Votans pour A ont prononcé les deux propositions $A > B$, $A > C$, ils n'ont laissé de doute que sur la proposition $B > C$; mais puisque v' & e' sont la probabilité du jugement de chaque Votant, & que $B > C$ a eu q'' voix en sa faveur, & q''' contre, la probabilité de la vérité de $B > C$ sera exprimée par $\frac{v'q'' - e'q''}{v'q'' - e'q'' + e'q''' - v'q'''}$, & la probabilité de sa fausseté

R

par $\frac{v^{q'} - v^{q''}}{v^{q'} - v^{q''} + v^{q''} - v^{q'''}}$, & celle que chacun des q' Votans votera en faveur de $B > C$ ou de $B < C$, par $\frac{v^{q''} - v^{q'''}}{v^{q''} - v^{q''+1} + v^{q''} - v^{q'''}}$ & $\frac{v^{q''} - v^{q''+1} + v^{q''} - v^{q'''}}{v^{q''} - v^{q''} + v^{q''} - v^{q'''}}$. Nommant v & ϵ ces deux probabilités, celles que dans les q' Votans il y en aura $q', q' - 1, q' - 2, \dots, 0$ pour $B > C$, & $0, 1, 2, \dots, q'$ pour $B < C$, feront exprimées par les termes de la série $v^{q'} + q'v^{q'-1}\epsilon + \frac{q'}{2}v^{q'-2}\epsilon^2 + \dots$

On aura de même la probabilité des avis qu'auroient donné pour $A > C, A < C$ ceux qui ont voté pour B , ou des avis qu'auroient donné pour $A > B, A < B$ ceux qui ont voté pour C ; & appelant v' & ϵ' , v'' & ϵ'' ces probabilités, les termes des suites formées par $(v' + \epsilon')^{q'}$, $(v'' + \epsilon'')^{q''}$, donneroient les probabilités de tous les nombres possibles de décisions pour ou contre $A > C$, & pour ou contre $A > B$. Supposons maintenant $q' > q''$, & que l'on ait $q' = q'_1 + q'_2$, le premier de ces nombres représentant le nombre inconnu des voix pour $B > C$, & q'_2 le nombre des voix pour $B < C$; soit de même $q'' = q''_1 + q''_2$, q''_1 étant le nombre des voix pour $A > C$, & q''_2 le nombre des voix pour $A < C$; soit enfin $q''' = q'''_1 + q'''_2$, q'''_1 étant le nombre des voix pour $A > B$ & q'''_2 le nombre des voix pour $A < B$, & que nous cherchions quels doivent être les nombres $q'_1, q'_2, q''_1, q''_2, q'''_1, q'''_2$, pour que la pluralité soit encore en faveur de A . Nous aurons pour première condition, que la pluralité doit avoir lieu en faveur de $A > B$ & de $A > C$; mais il suit de ce que nous venons de dire, que le nombre des voix pour $A > B$ est $q'_1 + q'''_1$, & celui des voix pour $A < B$, $q'_2 + q'''_2$, il faudra donc que $q'_1 + q'''_1 > q'_2 + q'''_2$, ou $q'_1 - q'_2 > q'''_2 - q'''_1$. La probabilité que A aura encore la pluralité sur B , sera exprimée par $V_1 = v''^{q''} + q''v''^{q''-1}\epsilon'' + \dots + \frac{q''}{q''_1 - 1}v''^{q'' - q''_1 + 1}\epsilon''^{q''_1 - 1}$, q''_1 étant le premier nombre où $q''_1 - q'''_1 > q'_1 - q'_2$.

De même pour que $A > C$ ait encore la pluralité, il faudra que $q' + q_1'' > q''' + q_1''$, ce qui donne $q' - q''' > q_1'' - q_1''$, & la probabilité que cela aura lieu, sera exprimée par

$$V_n = v'^{q''} + q'' v'^{q''-1} \epsilon \dots \dots \dots + \frac{q''}{q_n'' - 1} v'^{q'' - q_n'' + 1} \epsilon^{q_n'' - 1}, q_n'' \text{ étant le nombre}$$

où $q_n'' - q_1''$ devient plus grand que $q' - q'''$, & le produit de ces deux quantités donnera la probabilité d'avoir encore $A > B$, $A > C$ à la pluralité des voix. Supposons, comme ci-dessus, $q = 31$, $q' = 11$, $q'' = 20$, $q''' = 10$, nous aurons $v' = v'^2 + \epsilon^2$, $\epsilon' = 2v'\epsilon'$, $v'' = v'^2 + \epsilon^2$, $\epsilon'' = 2v'\epsilon'$, $q_n'' = q_n''' = 6$, & la probabilité que la pluralité est réellement en faveur de $A > B$ & de $A > C$

$$\text{égale à } (v'^{10} + 10v'^9\epsilon' + \frac{10 \cdot 9}{2} v'^8 \epsilon'^2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} v'^7 \epsilon'^3 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v'^6 \epsilon'^4)^2, v' \text{ étant } v'^2 + \epsilon^2, \text{ \& } \epsilon' \text{ étant } 2v'\epsilon'.$$

S'il s'agit de comparer cette probabilité, non à l'unité, mais à celle de n'avoir point à la fois $B > C$, $B > A$ ou $C > A$, $C > B$, nous aurons pour condition de $B > C$, $q_1' + q'' > q_1'' + q'''$ & $q'' - q''' > q_1'' - q_1'$, ce qui donne la probabilité $V_m = v'^{q''} + q'' v'^{q''-1} \epsilon \dots \dots \dots$

$$+ \frac{q''}{q_n'' - 1} v'^{q'' - q_n'' + 1} \epsilon^{q_n'' - 1}, q_n'' \text{ étant le nombre où } q_1'' - q_1' \text{ devient plus petit que } q'' - q''', \text{ \& pour } B > A$$

$q'' + q_n''' > q' + q_1''$, ou $q_n''' - q_1''' > q' - q''$, ainsi la probabilité sera $\epsilon^{q''} + q'' \epsilon^{q''-1} v' \dots + \frac{q''}{q_n''' - 1} \epsilon^{q_n''' - 1} v'^{q_n''' - 1}$, ce terme étant le dernier de la série, ou $q_n''' - q_1''' > q' - q''$, ou $1 - V_1$, enfin le produit de ces deux quantités donne la probabilité d'avoir à la fois $B > A$, $B > C$. Cette probabilité devient dans le cas que nous avons donné pour exemple, à cause de $v' = \frac{1}{2}$, $\epsilon = \frac{1}{2}$, $q_n'' = q_n''' = \frac{1}{2} (v'^{10} + 10\epsilon^9 v' \dots \dots$

$$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \epsilon^6 v'^4). \text{ De même nous aurons pour condition}$$

de $C > B$, $q'' + q''' > q' + q''$, ou $q'' - q''' > q' - q''$
 ce qui donne la probabilité $\epsilon^{q'} + q' \epsilon^{q'-1} v \dots$

$+ \frac{q''}{q''} \epsilon^{q''} v^{q''}$, ce terme étant le dernier, ou
 $q'' - q''' > q' - q''$, ou $1 - V'''$; & pour $C > A$,
 $q''' + q'' > q' + q''$, ou $q''' - q'' > q' - q''$, & la
 probabilité égale à $\epsilon^{q''} + q'' \epsilon^{q''-1} v \dots$

$+ \frac{q''}{q''} \epsilon^{q''} v^{q''}$, q'' & q'' exprimant le dernier terme,
 ou $q''' - q'' > q' - q''$, ou bien $1 - V''$. Le produit de
 ces probabilités donne celle d'avoir à la fois $C > B$, $C > A$,
 qui, dans l'exemple que nous avons choisi, est encore $\frac{1}{2}$

$(\epsilon^{10} + 10 \epsilon^9 v \dots + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \epsilon^6 v^4)$; & la somme
 de ces probabilités combinées, est celle d'avoir plutôt $C > B$
 & $C > A$, ou $B > C$ & $B > A$, que $A > C$ & $A > B$. Ainsi
 dans l'exemple ci-dessus, elle sera $\epsilon^{10} \dots + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \epsilon^6 v^4$.

Comparant cette probabilité avec celle de $A > B$, $A > C$,
 nous trouverons que si on nomme V , la fonction $v^{10} \dots$

$+ \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^6 \epsilon^4$, nous aurons la probabilité pour A
 égale à V^2 , celle pour B ou C égale à $1 - V$, $- \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 \epsilon^5$,
 & il faudra, pour que la probabilité pour A l'emporte sur les
 deux autres, que $V + V^2 + V \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} v^5 \epsilon^5 > 1$.

Mais nous avons vu qu'on pouvoit prononcer en faveur
 de A lorsqu'on n'a pas $A > B$, $A > C$, mais seulement
 $A > B$, $A < C$, pourvu que $A > C$ soit la moins improbable
 des trois propositions dont la pluralité est au-dessous de $\frac{1}{2}$.
 Il en est de même de B & de C . On prendra donc les
 différentes pluralités qui ont lieu pour ces différens cas: ils
 sont tous renfermés dans les avis (3) & (6), page 120, &
 la probabilité du premier de ces avis est $V'' V' \cdot (1 - V'')$.

qui donne une décision pour A , pour B ou pour C , selon que $A > B$ & $B > C$, $C > A$ & $B > C$, $C > A$ & $A > B$, seront les deux propositions les plus probables, ou auront le plus de voix; ainsi l'on prendra pour A tous les termes de $V''' V_1 \cdot (1 - V_2)$, ou (soit q_1''' le coefficient de v'' , q_2''' celui de ϵ'' , q_1'' celui de v' , q_2'' celui de ϵ' , q_1' celui de v , q_2' celui de ϵ), des trois nombres $q_1' - q_2'' + q_1''' - q_2'''$, $q_2'' - q_1''' + q_1' - q_2'$, $q_2''' - q_1'' + q_2'' - q_1'$, le dernier sera le plus petit; pour B , les termes où le premier de ces trois nombres sera le plus petit; pour C , les termes où le second sera le plus petit.

De même la probabilité de l'avis (6) sera $(1 - V_1) \cdot (1 - V_2) \cdot V_3$, & l'on aura dans chacun la probabilité pour A , B , C , selon que des nombres $q_1'' - q_2' + q_1''' - q_2'''$, $q_2' - q_1''' + q_1'' - q_2''$, & $q_2''' - q_1'' + q_2'' - q_1'$, le premier, le troisième & le second seront les plus petits.

Si ayant $A > B$, $A > C$, on exige encore que la pluralité pour $B > C$ ou $C > B$ soit plus petite que les deux ci-dessus, il faudra dans $V_1 V_2 (v + \epsilon)^{q_1'}$, prendre seulement les termes qui donneront $q_1' - q_2'' + q_1''' - q_2'''$ & $q_2' - q_1''' + q_1'' - q_2''$ plus grands $q_2'' - q_1''' + q_1' - q_2'$ ou $q_2''' - q_1'' + q_2'' - q_1'$.

Dans les formules précédentes, nous n'avons pas eu égard aux termes qui, par l'égalité des voix entre A & B , ou l'égalité de pluralité entre $A > B$ & $A > C$, ou entre $A > B$ & $B > C$, & les égalités semblables pourroient changer les déterminations; ainsi il faudra en retrancher les termes qui répondent à ces cas particuliers, & les placer ou avec les probabilités pour celui des Candidats qui alors a la pluralité, ou, s'il n'en résulte pas de décision, en former la probabilité qu'il n'y aura rien de décidé, soit entre les trois, soit entre deux des concurrents.

Si l'on veut avoir en général la probabilité qu'avec une assemblée composée de q Votans, la pluralité donnée par une élection faite à la manière ordinaire, sera en faveur du même Candidat, que la pluralité résultante de tous les jugemens, pris comme nous l'avons indiqué, on développera en

serie l'expression $(A + B + C)^q$, & pour chaque terme on cherchera la probabilité, comme nous venons de l'expliquer pour le terme $\frac{q}{q' \cdot q''} A^{q'} B^{q''} C^{q'''}$; on multipliera chacune de ces probabilités par le coefficient du terme correspondant, & on en divisera la somme par 3^q .

Les formules précédentes mettront en état de déterminer quelle espèce de pluralité il conviendra d'établir, pour que, connoissant la probabilité de l'opinion de chaque Votant, on puisse, en prenant les voix à la manière ordinaire, avoir une probabilité suffisante qu'il n'y a pas erreur dans l'élection, ce qui exige, 1.^o qu'il y ait une probabilité très-grande que le jugement formé de cette manière sera le même que celui qui auroit été porté si chaque Votant avoit opiné sur les $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ propositions qui résultent de la proposition de choisir entre n Candidats; 2.^o qu'il y ait une probabilité suffisante que cet avis sera conforme à la vérité; mais il y auroit toujours ici, comme dans les cas discutés, *pages 10 & 114*, l'inconvénient de s'exposer volontairement à une erreur, produite non par l'incertitude de chaque jugement, mais par la forme d'élection qui a été adoptée.

Il nous reste à parler du cas où l'élection n'est censée faite que lorsqu'un des Candidats a ou plus de la moitié, ou les deux tiers, &c. des suffrages. Il est aisé de voir que dans ce cas, la probabilité de la bonté du choix se trouvant, en prenant, *hypothèses 2^e, 3^e*, la valeur de V' pour cette pluralité, & en supposant v' & e' la probabilité que le jugement de chaque Votant est conforme ou contraire à la vérité, & la valeur de E' dans le même cas, alors on aura $V' + E'$ pour la probabilité qu'il y aura une élection, $\frac{V'}{V' + E'}$ pour la probabilité que l'élection sera bien faite, & $\frac{E'}{V' + E'}$ qu'elle sera mal faite. Si q' est la pluralité connue, $\frac{q'}{q' + d}$

exprimera la probabilité de la justice de l'élection dans ce cas ;
& si q' est la plus petite pluralité possible , $\frac{v'}{v' + d'}$

exprimera la plus petite probabilité possible de l'élection.

Nous terminerons ici cette première Partie , en nous bornant à rappeler les conséquences les plus importantes qui ont paru en résulter.

1.° Pour remplir les deux conditions essentielles d'avoir une probabilité très-grande de ne pas décider contre la vérité ; & une probabilité suffisante de décider en faveur de la vérité , on doit chercher une assemblée formée de manière , que l'avis de chaque Votant ait une probabilité assez grande ; & comme en multipliant le nombre des Votans on s'expose à diminuer cette probabilité , il sera très-difficile de remplir ces deux conditions si le nombre des Votans est très-grand , quelque forme qu'on donne à la manière de donner les décisions , à moins que les objets sur lesquels on délibère ne soient très-simples.

2.° Les formes les plus simples sont en général les plus avantageuses , voyez page 85 , & il faut exclure toutes celles qui conduisent à la possibilité de regarder comme rendu par la pluralité un jugement qui n'a réellement que la minorité , & c'est une troisième condition non moins essentielles que les deux autres.

3.° La difficulté de réunir les trois conditions précédentes , augmente beaucoup lorsqu'il ne s'agit point de voter entre deux propositions simples , mais de choisir entre différens systèmes de propositions , ce qui arrive toutes les fois qu'il y a plus de deux avis possibles.

4.° Dans ce cas , il est très-important que les propositions sur lesquelles on est obligé de demander un avis , soient bien distinguées , & que l'énumération des avis possibles entre lesquels il faut choisir soit complète ; sans cela on sera exposé à avoir des décisions contraires à la pluralité , sans pouvoir le reconnoître.

5.° Dans ce même cas encore , si les Votans ne sont pas

très-éclairés, il ne sera souvent possible d'éviter une décision contraire à la vérité, qu'en choisissant une forme qui ôte presque l'espérance d'avoir une décision, ce qui est le condamner à conserver les abus & les préjugés.

6.^o Par conséquent il sera difficile d'éviter les erreurs, & sur-tout d'avoir des décisions vraies tant qu'on ne cherchera la sûreté que dans le nombre des Votans ou la forme des assemblées, excepté dans le cas où v , c'est-à-dire, la probabilité qu'un Votant votera en faveur de la vérité, est beaucoup plus grand que e , c'est-à-dire, que la probabilité qu'il votera contre la vérité : mais la plus grande sûreté sera facile à se procurer, lorsque l'assemblée qui décidera sera formée de personnes pour lesquelles v est beaucoup plus grand que e , d'où l'on peut conclure que le bonheur des hommes dépend moins de la forme des assemblées qui décident de leur sort que des lumières de ceux qui les composent, ou en d'autres termes, que les progrès de la raison doivent plus influencer sur leur bonheur que la forme des constitutions politiques.

Fin de la première Partie.



SECONDE

SECONDE PARTIE.

Nous conserverons ici les mêmes expressions que dans la première Partie, & nous regarderons toujours les voix comme égales entr'elles.

Nous avons supposé jusqu'ici que l'on connoissoit la probabilité de la vérité de la décision de chaque Votant, & nous avons cherché à déterminer pour un nombre quelconque donné de Votans, & pour différentes hypothèses de pluralité aussi données ;

1.° La probabilité de ne pas avoir une décision contraire à la vérité.

2.° La probabilité d'avoir une décision conforme à la vérité.

3.° La probabilité la plus petite d'une décision rendue à la pluralité exigée dans chaque hypothèse. Nous appellerons M cette probabilité.

Nous supposerons maintenant que l'on connoît une ou plusieurs de ces trois quantités, & que l'on cherche ou la valeur de v , ou celle de q , ou l'hypothèse de pluralité qu'il convient de choisir.

Les quantités V & V' pourront être données de deux manières.

On peut supposer d'abord qu'elles sont connues par l'expérience, c'est-à-dire, qu'on sache qu'un Tribunal pour lequel on connoît le nombre des Membres & la pluralité exigée, a une probabilité connue de ne pas condamner la vérité, ou de donner une décision qui y est conforme (*voyez la troisième Partie*) ; & dans ce cas on peut chercher à connoître quelle a été la probabilité de la voix de chaque Votant.

On peut supposer aussi que l'on ait fixé pour V ou pour V' des valeurs au-dessous desquelles V & V' ne peuvent tomber sans nuire à l'intérêt public, & chercher dans ce cas, soit

S

l'hypothèse de pluralité & le nombre des Votans étant donné, la valeur de v qui répond à ces valeurs de V ou de V' , soit v étant connu, l'hypothèse de pluralité ou le nombre des Votans qu'il faut choisir pour obtenir ces valeurs de V ou de V' .

La plus petite probabilité à laquelle une décision peut être formée, ne peut être connue qu'en fixant de même un terme au-dessous duquel elle ne peut tomber sans compromettre ou la sûreté ou l'utilité générale, & l'on peut alors ou chercher la pluralité à exiger, v étant connu; ou chercher, cette pluralité étant donnée, la valeur que v doit avoir.

Il faut observer ici que dans ce dernier cas, où l'on suppose V, V', M connus seulement par la condition qu'ils ne doivent pas tomber au-dessous d'une certaine valeur, les valeurs cherchées de v , de g , ou de la pluralité à exiger, doivent satisfaire à cette condition pour chacune de ces trois quantités.

C'est ici le lieu d'expliquer ce que nous entendons par cette limite, au-dessous de laquelle V, V' ou M ne doivent pas tomber.

Un Écrivain, justement célèbre par son éloquence, a établi dans quelques essais qu'il a publiés sur le calcul des probabilités, qu'il y avoit un certain degré de probabilité, que l'on pouvoit regarder dans le calcul comme équivalent à la certitude morale, & il paroît regarder la supposition de cette espèce de *maximum* de probabilité comme un moyen d'expliquer plusieurs paradoxes que renferme la théorie ordinaire de ce calcul.

Nous ne croyons pas que l'on puisse adopter cette opinion, & la grande réputation de celui qui l'a soutenue nous oblige à la combattre ici avec quelque détail.

I. Cette opinion est inexacte en elle-même, en ce qu'elle tend à confondre deux choses de nature essentiellement différente, la probabilité & la certitude: c'est précisément comme si on confondoit l'asymptote d'une courbe avec une tangente menée à un point fort éloigné; de telles suppositions ne pourroient être admises dans les Sciences exactes sans en détruire toute la précision.

II. Cette hypothèse ne peut servir à expliquer aucun paradoxe ni à résoudre aucune difficulté. En effet, elle consiste à regarder une très-grande probabilité comme une certitude, ou, ce qui en est la conséquence, à regarder comme égales deux probabilités dont la différence est très-petite. Or ce qui seroit faux ou paradoxal si on donnoit aux quantités leurs véritables valeurs, ne devient pas vrai ou conforme à la raison commune, parce qu'il paroît tel lorsqu'on donne à ces mêmes quantités une valeur qu'elles n'ont pas.

III. Cette même méthode doit être regardée comme défectueuse dans l'usage du calcul. En effet, on ne peut regarder comme un *maximum* une certaine valeur d'une quantité variable, qui n'est pas un *maximum* réel, que dans le cas où cette limite de la quantité est inconnue. Par exemple, on peut supposer en Astronomie un certain nombre de demi-diamètres terrestres comme la plus grande valeur de la distance de la Terre au Soleil, parce qu'on ignore quelle est précisément cette distance, & qu'ainsi en la supposant un peu plus grande que celle qui est donnée par les observations qui la donnent la plus grande, on est sûr de ne pas s'éloigner beaucoup de sa limite en ce sens. Mais il n'en est pas de même d'une quantité dont la limite réelle est donnée : or ici la limite de la probabilité est connue ; c'est 1 ou la certitude.

IV. Il résulteroit également des inconvéniens dans la pratique de ce principe, qui fait regarder comme égales entr'elles deux probabilités très grandes. En effet, la probabilité d'un évènement ne doit pas se séparer de celle de l'évènement

contraire. Si $\frac{10^{10,000}}{10^{10,000} + 1}$ exprime la probabilité d'un évènement, celle de l'évènement contraire sera $\frac{1}{10^{10,000} + 1}$;

Supposons un autre évènement dont la probabilité soit $\frac{10^{100,000}}{10^{100,000} + 1}$, celle de l'évènement contraire sera $\frac{1}{10^{100,000} + 1}$;

le rapport des probabilités des deux évènements les plus

S ij

probables, sera donc exprimé par $\frac{10^{110,000} + 10^{100,000}}{10^{110,000} + 10^{10,000}}$ ou

$\frac{1 + \frac{1}{10^{10,000}}}{1 + \frac{1}{10^{100,000}}}$; quantité qu'on pourroit regarder comme

sensiblement égale à l'unité, ce qui permettroit de considérer comme égales les deux probabilités dont elle exprime le rapport, si on pouvoit séparer l'idée de ces probabilités de celle de la probabilité des évènements contraires. Mais ici le rapport des probabilités des deux évènements contraires sera exprimé par $\frac{10^{100,000} + 1}{10^{10,000} + 1}$, rapport qui coïncide presque avec celui de

$10^{90,000}$ à l'unité, en sorte que l'un est incomparablement plus probable que l'autre. Supposons donc que ces deux premiers évènements expriment pour deux personnes l'espérance de vivre un certain espace de temps, & les deux évènements contraires le danger de mourir, on ne peut pas dire que ces deux personnes ont une espérance-égale de vivre, puisqu'elles courent un danger de mourir si inégal, mais seulement qu'elles ont toutes deux une très-grande espérance de vivre, toutes deux un très-petit danger de mourir.

Telles sont les raisons qui nous paroissent devoir faire rejeter l'idée d'un *maximum* de probabilité, & employer au contraire un *minimum* de probabilité. En effet, puisque dans le parti que nous suivons sur une affaire importante, nous sommes obligés de décider d'après une certaine probabilité, il doit y avoir un degré de probabilité, tel qu'on ne puisse, sans imprudence, se conduire d'après une proposition qui n'auroit en sa faveur qu'une probabilité moindre, si en se trompant, on tombe dans un mal beaucoup plus grand que celui qui résulteroit de ne point agir, & un autre degré de probabilité, tel qu'on puisse se conduire avec prudence d'après une proposition qui aura ce degré ou un degré supérieur.

Ce *minimum* doit varier dans les différentes questions qu'on se propose, & doit être déterminé d'après la grandeur du mal auquel on s'expose en agissant, & celle des inconvéniens qui

résulteroient de ne point agir. Comme il ne peut y avoir aucun rapport direct entre le nombre qui exprime une probabilité & le motif de juger que cette probabilité est suffisante pour n'être ni imprudent ni injuste en se conduisant d'après elle, on ne peut déterminer ce *minimum* que d'après l'expérience, c'est-à-dire, d'après ce qui est regardé dans l'ordre général des choses humaines comme donnant une probabilité suffisante. Par exemple, si on suppose qu'on cherche la probabilité que doit avoir un jugement qui condamne un homme au supplice, c'est-à-dire, la probabilité que cet homme n'est pas innocent, qui doit être exigée pour la sûreté publique, on peut faire le raisonnement suivant : *Je ne serai point injuste en soumettant un homme à un jugement qui l'expose à un danger, tel que cet homme lui-même, étant supposé de sang froid, jouissant de sa raison, & ayant des lumières, s'exposeroit pour le plus petit intérêt, pour un léger amusement à un danger égal, sans même presque songer qu'il s'y expose.*

Supposons qu'il soit question de la probabilité qu'une loi civile est conforme à la justice ou à l'utilité générale, on peut faire ce raisonnement : *Je ne serai point injuste en soumettant les habitans d'un tel pays à cette loi, s'il est aussi probable qu'elle est juste, & par conséquent qu'elle leur est utile, qu'il est probable que les hommes raisonnables & éclairés qui ont placé leur patrimoine d'une manière qu'ils regardent comme sûre, & sans aucun motif d'avidité & de convenance particulière, ne sont pas exposés à le perdre.*

Nous renverrons donc à la troisième Partie la détermination de ces quantités V , V' & M .

On auroit pu proposer une autre méthode de les déterminer. Supposons en effet que V' soit la probabilité de la vérité d'une décision, $1 - V'$ la probabilité qu'elle est fautive, I le mal qui résulte de l'exécution de cette décision si elle est fautive, I' le mal qui résulteroit de ne pas l'exécuter si elle est vraie, on pourroit faire la proposition suivante;

$V' : 1 - V' = I : I'$, ce qui donne $V' = \frac{I}{I + I'}$. Comme

cette méthode se présenteroit naturellement, sur-tout à ceux qui se sont occupés du calcul des probabilités, parce qu'elle est absolument fondée sur une des principales règles de ce calcul, nous exposerons ici les motifs d'après lesquels nous avons cru devoir ne pas l'adopter; ce qui nous oblige à examiner d'abord la règle en elle-même.

Un des plus grands Géomètres & des plus illustres Philosophes de ce siècle, a proposé contre cette règle des objections qui n'ont point été résolues jusqu'ici; aussi chercherons-nous moins à faire sentir ce qu'elle a de défectueux qu'à montrer sur quels fondemens réels elle est établie, & à faire voir, par les raisons mêmes qui peuvent la faire admettre dans quelques cas, qu'elle ne peut avoir d'application dans celui que nous considérons ici.

Cette règle consiste à supposer que deux conditions sont égales lorsque les avantages de chacune sont en raison inverse de leur probabilité.

Ainsi on voit qu'il n'est pas question d'une égalité absolue, & qu'on ne peut point substituer dans tous les cas une des conditions à l'autre. Cette première restriction n'est point particulière à cette règle; elle a lieu aussi en Mécanique & dans d'autres Sciences. Par exemple, les produits de deux machines sont égaux, lorsque les forces sont en raison inverse des vitesses avec lesquelles elles agissent; cependant on ne peut en conclure que toutes les machines où les forces sont en raison inverse des vitesses, doivent être regardées comme également avantageuses. Ces deux machines ne sont donc égales entr'elles qu'en ce qu'elles ont une égalité de produit. Voyons donc de même ici en quoi on peut regarder comme égales deux conditions différentes, qui sont telles que leurs avantages soient en raison inverse de leur probabilité.

Cela posé, nous verrons d'abord que, si on considère un seul homme & un seul événement, il ne peut y avoir aucune espèce d'égalité. La probabilité $\frac{1}{2}$ d'avoir deux écus ne peut être égale à la certitude d'en avoir un.

Il en sera de même de deux hommes qui joueroient un

seul coup à un jeu inégal ; celui qui auroit la probabilité $\frac{1}{10}$ de gagner neuf écus, n'est point dans une position égale à celle d'un autre homme qui auroit la probabilité $\frac{9}{10}$ de gagner un écu.

Pourquoi donc prescrit-on cependant au premier, pour jouer à jeu égal, de mettre un écu, & au second d'en mettre 9 ? le voici : on considère le jeu comme devant se renouveler un nombre indéfini de fois. En effet, prenons v & e pour les probabilités des deux évènements A & B , & développons la formule $(v + e)^{qv + qe}$, $qv + qe$ étant le nombre des évènements, & qv & qe étant des nombres entiers quelconques ; il est clair,

1.° Que le terme $\frac{qv + qe}{qe} v^{qv} e^{qe}$ est le plus grand de la série. Le cas où A arrivera qv fois & B qe fois, est donc de tous les évènements le plus probable. Donc si l'évènement A fait gagner e , & que l'évènement B fasse gagner v dans le cas de la suite d'évènements la plus probable, A fera gagner $qv e$, & B aussi $qv e$. Donc la règle de faire les gains en raison inverse des probabilités, a l'avantage d'établir l'égalité entre les évènements dans le cas de la suite d'évènements la plus probable.

2.° Prenant la même formule $(v + e)^{qv + qe}$, & supposant z une quantité aussi petite qu'on voudra, &, pour abrégé, $v > e$, il est clair que la somme de tous les termes de cette formule, jusqu'à $\frac{qv + qe}{qe - qz} v^{qv + qz} e^{qe - qz}$, approchera de zéro à mesure que q augmentera. C'est le cas de la page 13, où V' est égal à zéro lorsque $q = \frac{1}{6}$.

Si ensuite nous ordonnons la série par rapport à e , nous trouverons que la somme de tous les termes, jusqu'à $\frac{qv + qe}{qe + qz} v^{qv - qz} e^{qe + qz}$, approchera aussi de zéro à mesure que q augmentera. C'est ici le cas où, page 53, V devient zéro lorsque $q = \frac{1}{6}$. Donc la somme des $2qz - 1$ termes

qui restent, approchera de devenir égale à l'unité à mesure que q augmentera, quelque petit que soit z , & ira toujours en s'approchant de l'unité; supposant donc que chaque événement A produise un gain e , & chaque événement B un gain v , le dernier terme $v^{qv+qz}e^{q^e-qz}$ donnera $qve + qez$ pour les gains de A , & $qve - qvz$ pour ceux de B . La différence sera $q.(v + e).z$ en faveur du gain de A . De même le dernier terme $v^{qv-qz}e^{q^e+qz}$ donnera $qve - qez$ pour le gain de A , & $qve + qez$ pour celui de B , & une différence de $q.(v + e).z$ en faveur de B .

On peut donc acquérir une probabilité aussi grande qu'on voudra que A n'aura pas sur B , ni B sur A un avantage supérieur à $q.(v + e).z$. Or le plus grand avantage possible de A dans les $q.(v + e)$ coups étant égal à $q.(v + e).e$, & celui de B à $q.(v + e).v$, il est clair qu'on parviendra à obtenir telle probabilité qu'on voudra que A n'obtiendra pas un avantage plus grand qu'une portion $\frac{z}{e}$ de tout le gain qu'il peut faire, ni B un avantage plus grand qu'une portion $\frac{z}{v}$ de tout le gain qu'il peut faire, z pouvant être aussi petit qu'on voudra. Enfin $q.(v + e).z$ est pour A comme pour B la limite du point au-delà duquel il peut être très-probable que leur avantage ne s'étendra point, & cette limite est la même pour l'un & pour l'autre.

Or, ces conditions ne peuvent être remplies qu'en supposant les avantages en raison inverse des probabilités; donc ce n'est qu'en suivant cette règle qu'on peut établir dans la supposition d'une suite indéfinie d'événemens, une sorte d'égalité entre deux conditions inégales.

Mais il faut observer ici que dans le cas de $q = \frac{1}{2}$, z ne peut pas être zéro, mais une quantité finie aussi petite qu'on voudra. En effet, les quantités V' & E' , page 53, qui sont zéro tant que z est fini, deviennent subitement chacune $\frac{1}{2}$ lorsque $z = 0$.

3.° Si nous reprenons la même formule $(v + e)^{qv + qe}$, & que nous supposions le gain de A égal à e , & celui de B égal à v , le terme $\frac{qv + qe}{qe} v^{qv} e^{qe}$ étant celui où les avantages sont égaux, tous les termes qui sont avant celui-ci, donneront un avantage pour A ; tous ceux qui sont après donneront un avantage pour B ; mais, page 53, plus q augmente, plus la somme des premiers ou V' , & la somme des seconds ou E , approchent de la valeur $\frac{1}{2}$, & d'être égales entr'elles; & l'on peut observer que cette propriété cesse d'avoir lieu pour tout autre rapport entre les avantages & la probabilité des évènements. Donc cette hypothèse est la seule où, en supposant une suite indéfinie d'évènements, on approche continuellement d'avoir une probabilité égale que les avantages de l'un ne l'emporteront pas sur ceux de l'autre.

Si on suppose au contraire le gain de A , $e + z$, & celui de B , $v - z$, alors le terme où il y aura égalité, sera $\frac{qv + qe}{qe + qz} v^{qv - qz} e^{qe + qz}$, & la somme des termes précédens, ou V' , renfermera tous les cas avantageux pour A . Or, page 53, dans ce cas, plus q augmente, plus V' approche de l'unité; donc il y auroit alors une probabilité toujours croissante que A auroit de l'avantage sur B .

Si l'on suppose le gain de A , $e - z$, & celui de B , $v + z$; alors le terme où il y aura égalité sera $\frac{qv + qe}{qe - qz} v^{qv + qz} e^{qe - qz}$, & la somme de tous les termes au-delà de celui-ci, où E renfermera tous les cas où l'avantage est pour B ; or dans ce cas, page 53, E tend continuellement à devenir égal à 1; donc on aura une probabilité toujours croissante que B aura l'avantage sur A .

Cette règle a donc pu être adoptée, non comme établissant une véritable égalité entre des choses différentes, mais comme étant la seule qui puisse, en considérant la succession & l'ordre des évènements, amener une sorte d'égalité entre ces mêmes

T

choses , & faire disparoître leurs différences le plus qu'il est possible.

L'on voit enfin qu'elle établit entre deux suites d'évènemens inégalement avantageux & inégalement probables , une espèce d'égalité dans ce sens , qu'elle approche continuellement d'être semblable à celle qui existe entre deux Joueurs qui jouent à un jeu égal un grand nombre de coups. Le cas où il n'y a ni perte ni gain , est également l'évènement de tous le plus probable. Il y a également une probabilité croissante à l'infini de ne pas perdre ou de ne pas gagner au-delà d'un nombre de coups ou d'évènemens ayant un rapport aussi petit qu'on voudra , mais fini , avec le nombre total des coups. On approche dans le cas des probabilités inégales d'une égalité de probabilité pour l'avantage de l'un ou de l'autre des évènements , tandis qu'on a toujours cette égalité en jouant un jeu égal.

On voit donc que cette règle , qui dans un sens abstrait est juste , & qui est en même-temps la seule règle générale qu'on puisse établir , n'est point applicable dans la pratique à une infinité de cas , puisqu'elle ne fait qu'établir une sorte de parité entre un jeu égal & un jeu inégal , & seulement lorsqu'on embrasse la suite indéfinie des évènements.

Nous ne nous arrêterons pas ici à faire l'application de ces réflexions aux différentes questions pour la solution desquelles cette règle a été employée ; cette digression nous écarteroit trop de notre objet. D'ailleurs ceux qui sont versés dans le calcul des probabilités , verront sans peine comment il faut appliquer aux différentes questions le principe général auquel nos réflexions conduisent , c'est-à-dire , que la règle qui prescrit de faire les avantages en raison inverse des probabilités , ne peut être admise qu'autant qu'on pourra regarder comme possible une suite assez nombreuse d'évènements , pour établir d'une manière assez approchée l'égalité à laquelle on ne peut rigoureusement atteindre , & qu'il ne résultera de la supposition de cette longue suite d'évènements aucune conséquence qui rende la règle inadmissible.

Si nous considérons maintenant le cas particulier qui nous occupe ici, que nous prenions pour exemple le jugement d'un accusé, & qu'on propose de faire cette proportion : *la probabilité qu'un homme condamné est coupable, doit être à la probabilité qu'il est innocent, comme l'inconvénient de punir un innocent est à celui de renvoyer un coupable.*

Nous observerons que nous devons avoir pour chaque jugement une probabilité suffisante que l'homme condamné est coupable. Or il est évident que la règle proposée ne nous conduit point par elle-même à cette probabilité.

En effet, que résulteroit-il de cette règle même appliquée à une suite de jugemens ? Soit v la probabilité que l'accusé est coupable, e celle qu'il est innocent. Développons la formule $(v + e)^{qv + qe}$. Que résulte-t il de l'égalité considérée sous le point de vue que nous avons présenté ici ? c'est qu'il sera très-probable que dans $qv + qe$ jugemens, on aura

un des cas compris entre $\frac{qv + qe}{qe - qz} v^{qv + qz} e^{qe - qz}$, & $\frac{qv + qe}{qe + qz} v^{qv - qz} e^{qe - qz}$, z pouvant être une quantité très-

petite par rapport à e ou à v , c'est-à-dire, qu'il sera très-probable que le nombre des innocens condamnés sera entre $qe - qz$ & $qe + qz$, & que plus on multipliera le nombre des jugemens, plus on approchera d'avoir une égale probabilité que le nombre des innocens condamnés sera au-dessus ou qu'il sera au-dessous de qe .

Si au contraire on absout avec cette probabilité, on aura une probabilité toujours croissante d'absoudre entre $qv + qz$ & $qv - qz$ coupables, & une probabilité égale que le nombre des coupables absous sera au-dessous ou qu'il sera au-dessus de qv , ce qui conduiroit tout au plus à prouver qu'il y a un égal inconvénient à condamner ou à absoudre avec cette probabilité ; & que par conséquent, pour peu qu'on choisisse de ne condamner qu'à une probabilité plus grande, il y a plus d'inconvénient à absoudre qu'à condamner avec cette

dernière probabilité, tandis que si on en prenoit une plus petite, il y auroit plus d'inconvénient à condamner qu'à absoudre.

Ainsi on pourroit tout au plus employer cette probabilité en raison inverse des inconvéniens de condamner ou d'absoudre pour déterminer M , c'est-à-dire, la limite de la plus petite probabilité où il puisse être permis de condamner avec justice; car nous avons vu dans la première Partie, page 24, qu'on peut avoir à la fois V & V' fort grands, c'est-à-dire, avoir à la fois une très-grande probabilité qu'un Tribunal ne condamnera pas un innocent & n'absoudra pas un coupable.

Mais on voit qu'il ne résulteroit pas de l'admission de ce principe qu'il fût très-probable que l'homme qui a été condamné soit coupable; ainsi cette règle, même appliquée à la seule détermination de M , ne conduiroit qu'à commettre une injustice, sous prétexte qu'il est utile au Public de la commettre, ce qui seroit en législation un principe aussi absurde que tyrannique.

On peut tirer cependant une remarque utile des résultats où nous a conduits l'examen de cette hypothèse. Supposons qu'on ait un Tribunal qui donne pour V & V' des valeurs suffisantes pour la sûreté; que $2q' + 1$ soit la pluralité exigée pour condamner, ce qui donne
$$\frac{v^{2q'+1}}{v^{2q'+1} + e^{2q'+1}} = M.$$

Voyez page 54. Soit N la probabilité à laquelle on doit condamner, en supposant qu'on admette la règle de faire les probabilités de la justice ou de l'injustice de la condamnation en raison inverse des inconvéniens d'absoudre un coupable ou de condamner un innocent. Puisque l'accusé est absous lorsqu'il y a une pluralité de $2q' - 1$ contre lui, & que la probabilité

qu'il est coupable est $\frac{v^{2q'-1}}{v^{2q'-1} + e^{2q'-1}}$, il faudroit avoir

$N > \frac{v^{2q'-1}}{v^{2q'-1} + e^{2q'-1}}$, ce qui pourroit avoir lieu, quoique M

fût beaucoup plus grand que N si v est grand par rapport à e . Cette observation montre encore combien il est avantageux de former d'hommes éclairés les assemblées qui

décident, & qu'il y a même des avantages qu'on ne peut se procurer par aucun autre moyen.

Ces motifs suffisent pour rejeter l'hypothèse que nous venons d'examiner; ainsi nous n'insisterons pas sur la difficulté, & même, dans un grand nombre de cas, sur l'impossibilité presque absolue d'évaluer en nombres les inconvéniens qu'on veut comparer.

Après avoir montré quelle est la nature des quantités V , V' , M , dans les cas où l'on peut les regarder comme connues, nous supposons qu'elles ont été déterminées d'après les règles que nous établirons dans la troisième Partie, & nous allons examiner maintenant comment, ces quantités étant données, on peut déterminer, soit le nombre des Votans; soit l'hypothèse de pluralité, soit la probabilité de chaque Votant.

Premier Cas.

Nous supposons d'abord que V est donné, ainsi que v & l'hypothèse de pluralité, & que l'on cherche q , ou le nombre des Votans; il peut arriver ici ou que la pluralité soit proportionnelle au nombre des Votans, ou qu'elle soit constante.

Si elle est constante, on prendra la formule pour cette hypothèse, pages 14 ou 25; on y substituera les valeurs données de q' & de v ; on continuera jusqu'à ce qu'on ait une valeur de V égale ou supérieure à la valeur donnée; & le terme où l'on s'arrêtera donnera le nombre de Votans le plus petit qui satisfasse à cette valeur de V .

Il peut arriver dans ce cas que la valeur de V , donnée par la formule, soit d'abord décroissante & ensuite croissante, ce qui sembleroit donner deux limites du nombre des Votans; l'une telle qu'on ne doit point le supposer plus grand, l'autre telle qu'on ne doit point le supposer plus petit, pour n'avoir pas une valeur de V inférieure à la valeur exigée; mais on ne doit avoir égard ici qu'à la valeur de V , qui est supérieure à la quantité donnée, dans la partie de la série où les valeurs de V deviennent croissantes. En effet, il est évident que ces valeurs de V , qui sont plus grandes que la valeur exigée pour

un nombre de Votans répondant aux termes où, en augmentant ce nombre, V diminue, correspondroient à des valeurs de V' trop défavorables.

Si la pluralité est proportionnelle avec un nombre constant, ou simplement proportionnelle, on prendra les formules des quatrième, cinquième & sixième hypothèses, pages 27, 41, 48; on y substituera les valeurs de v , de q' & de m, n ; (voyez la sixième hypothèse) & on continuera ces formules jusqu'à ce qu'elles conduisent à une valeur de V , supérieure à celle de la même quantité qui est donnée, & le terme où l'on s'arrêtera donnera la valeur de q . Si la formule donne des premières valeurs de V plus grandes que cette valeur donnée, & qu'elles aillent ensuite en décroissant, on n'aura aucun égard à ces premières valeurs, parce qu'elles répondent à une valeur de V' trop petite.

Second Cas.

Nous supposons que V, v & q nombre des Votans sont donnés, & qu'on cherche la pluralité qu'on doit exiger.

Dans ce cas on prendra la formule $(v + e)^q$; & après l'avoir ordonnée par rapport à v , on y substituera pour v sa valeur, & on la continuera jusqu'à ce que la somme des termes de la formule soit égale à V ou plus grande; &

$\frac{q}{q-1} v^q, e^{q-1}$, étant ce terme, $q - 2q$, exprimera la pluralité demandée.

On pourroit supposer que connoissant V & v , on ne connoisse ni l'hypothèse de pluralité ni q , mais seulement de certaines limites où ces quantités soient renfermées.

Dans ce cas, on prendra les formules des pages 14 & 25, qu'on supposera développées jusqu'à $2q$ & $2q + 1$, $2q$ & $2q + 1$ étant les plus grandes valeurs qu'on puisse supposer pour le nombre des Votans, & $2q'$ ou $2q' + 1$, qui indiquent la pluralité, étant la plus petite valeur qu'il est permis de supposer. Si la valeur de V que donnent ces formules

est plus grande que la valeur exigée, alors il faut préférer cette hypothèse, parce qu'elle donne V' plus grand; sinon

on y ajoutera successivement les termes $\frac{2q}{q+q'+1} v^{q-q'-1} e^{q+q'+1}$,
 $\frac{2q}{q+q'+2} v^{q-q'-2} e^{q+q'+2}$, &c. ou $\frac{2q+1}{q+q'+2} v^{q-q'-1} e^{q+q'+2}$,
 $\frac{2q+1}{q+q'+3} v^{q-q'-2} e^{q+q'+3}$, &c. qui donneront alors les valeurs de V pour le même nombre & pour les pluralités plus grandes.

Troisième Cas.

On suppose que l'on connoisse V' , v & la pluralité, & que l'on cherche le nombre des Votans.

Si la pluralité est constante, on prendra les formules des pages 21 & 26; & comme V' va toujours en croissant, on y substituera les valeurs de v & de q' , & on continuera jusqu'à ce que la valeur de V' , donnée par ces formules, soit égale à la valeur exigée de V' , ou la surpasse.

Si la pluralité est proportionnelle, on prendra les formules que donnent pour V' les quatrième, cinquième & sixième hypothèses; mais il faut observer ici que la formule qui donne V' , peut être telle qu'elle devienne décroissante au bout d'un certain nombre de termes, quoique $v > e$, & dans ce cas il peut arriver que jamais V' ne puisse atteindre à la valeur exigée; supposons qu'il puisse y atteindre, il faut alors examiner laquelle des valeurs de V' , égales ou supérieures à la valeur exigée, donne la plus grande valeur de V , & en donne une suffisante.

Quatrième Cas.

On suppose V' connu, ainsi que v & q , & on cherche la pluralité.

Pour cela, on prendra $(v + e)^q$, qu'on réduira en série, q étant le nombre des Votans, & on s'arrêtera au terme

$\frac{q}{v} v^{q-1} e^q$, tel que V' ait la valeur exigée, & $q - 2q$, exprimera la pluralité, qui sera d'autant plus petite que l'on aura supposé une plus grande valeur de V' , & qui pourra par conséquent devenir impossible à trouver.

Si on suppose la limite du nombre des Votans seulement donnée, il faudra chercher la valeur de V' pour la valeur de v qui est connue, en supposant le plus grand nombre de Votans qu'il soit permis de prendre, & la plus petite pluralité. Si V' est avant ce terme supérieur à la valeur exigée, alors on pourra retrancher les termes qui deviennent superflus, afin que le nombre des Votans soit moindre, ou que la pluralité soit plus grande, en observant que ce dernier moyen doit être préféré, parce qu'il rend V plus grand, & qu'une plus grande pluralité rend aussi M plus grand.

Cinquième Cas.

On suppose M donné, ainsi que v , & on cherche la pluralité.

$$\text{Soit } q' \text{ cette pluralité, on aura } M = \frac{v^{q'}}{v^{q'} + e^{q'}} = \frac{1}{1 + \frac{e^{q'}}{v^{q'}}$$

$$\text{\& } \left(\frac{e}{v}\right)^{q'} = \frac{1-M}{M}, \text{ d'où } q' = \frac{1 + \frac{1-M}{M}}{1 + \frac{e}{v}} = \frac{1M - 1(1-M)}{1v - 1e}.$$

Les méthodes que nous venons d'exposer suffiront pour déterminer la constitution d'un Tribunal, lorsque l'on connoît la probabilité de la voix de chaque Votant.

Supposons en effet que la probabilité de la voix de chaque Votant soit $\frac{1}{4}$, par exemple, & que la plus petite probabilité à laquelle on se permette de décider, soit $\frac{19,999}{20,000}$, on aura pour $q' \frac{\log. 19,999}{\log. 4} = \frac{4,301008}{0,602060} = 8$, parce qu'il faut prendre toujours

toujours le nombre entier plus grand que la valeur rigoureuse. Si on avoit supposé $v = \frac{2}{10}$, il auroit suffi, dans la même hypothèse, de faire $q' = 5$.

Supposons maintenant que l'on veuille, v étant $\frac{4}{5}$, avoir au moins $V' = \frac{99}{100}$, c'est-à-dire, que sur cent décisions, il n'y en ait qu'une qui fasse rejeter la vérité, soit faute d'avoir la pluralité exigée, soit parce que la décision sera conforme à l'erreur, & qu'on cherche le nombre des Votans, on aura $q = 17$; & pour le nombre des Votans, 34.

Mais si, par exemple, on vouloit que V' fût $\frac{999}{1000}$, c'est-à-dire, si on exigeoit qu'il y eût 999 contre 1 à parier que la vérité ne seroit pas condamnée, soit faute de décision, soit par une décision contraire à la vérité, il faudroit un très-grand nombre de Votans, & il en faudroit même plus de cinquante pour que cette probabilité fût seulement $\frac{199}{200}$.

A la vérité, cette seconde probabilité, & même la première, seroient très-suffisantes; & quant à la valeur de V dans cette hypothèse, dès le point où la formule, page 25, commence à avoir ses termes positifs, ce qui a lieu pour quatorze Votans, le risque que la vérité sera condamnée est déjà au-dessous de $\frac{1}{475,500}$; & pour les trente-quatre Votans, on s'assurera aisément qu'elle est moindre qu'un deux millionième environ. On voit donc qu'en ne supposant aux Membres d'un Tribunal destiné, par exemple, à juger des procès criminels, qu'assez de justesse d'esprit & de raison pour ne se tromper qu'une fois sur cinq, on pourroit, en exigeant une pluralité de huit voix, avoir à la fois une probabilité $\frac{65,536}{65,537}$ qu'un innocent ne sera pas condamné dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire, lorsqu'il n'a contre lui que la plus petite pluralité possible, & par conséquent un risque $\frac{1}{65,537}$ qu'il pourra être condamné injustement.

U

Si on suppose ce Tribunal de trente-quatre Juges , on aura dans le même cas , même avant de connoître à quel nombre de voix le jugement a été rendu , une probabilité plus grande que $\frac{99}{100}$ qu'un coupable sera condamné, & un risque moindre que $\frac{1}{100}$ qu'il pourra se sauver.

On aura de même alors environ $\frac{1}{2,000,000}$ pour le risque que court l'accusé innocent , ou pour la probabilité qu'il ne sera pas absous par un jugement , ou renvoyé parce qu'il n'y a pas de décision. S'il y a une décision , le risque qu'elle pourra condamner un innocent sera environ $\frac{1}{1,980,000}$,

On voit donc que ce Tribunal seroit très-favorable aux accusés, que sa forme exposeroit très-peu à des injustices, & qu'il n'auroit d'autre inconvénient que de laisser peut-être plus d'espérance à un coupable que ne l'exigeroit la sûreté publique.

Supposons donc ici $v = \frac{9}{10}$, ce qui donne $2q + 1 = 5$; & prenant pour V' la formule de la page 21, nous trouverons que, si on exige V' égal ou supérieur à $\frac{999}{1000}$, on aura cette valeur dès le sixième terme, ce qui donne 15 Votans; dès lors V ne différera non plus de l'unité que de moins de deux millièmes; en sorte que l'on aura avec un Tribunal ainsi formé, 1.° une probabilité $\frac{59,049}{59,050}$ que le condamné n'est pas innocent lorsque la pluralité la plus petite a lieu, ou un risque qu'il est innocent de $\frac{1}{59,050}$ seulement; 2.° avant le jugement une probabilité plus grande que $\frac{999}{1000}$ qu'un coupable ne sera pas renvoyé faute de réunir pour sa condamnation une assez grande pluralité; 3.° enfin un risque moindre d'un deux millièmes qu'un innocent sera condamné, & un

risque presque aussi petit, c'est-à-dire, d'environ $\frac{1}{1,980,000}$ que si une condamnation est prononcée à la pluralité des voix, elle ne tombera point sur un innocent.

On voit donc qu'un tel Tribunal auroit tous les avantages qu'exigent la sûreté & la justice, & que d'ailleurs il n'aura pas l'inconvénient de laisser aux coupables une trop grande espérance de se sauver. Ainsi, par exemple, en exigeant la présence de quinze Juges pour rendre un jugement, au lieu de sept ou huit seulement, & une pluralité de cinq voix au lieu de deux ou de trois; si l'on pouvoit évaluer à $\frac{9}{10}$ dans tous les cas la probabilité de la voix de chacun, on auroit un Tribunal contre la forme duquel il n'y auroit aucune objection solide à faire.

Au reste, il ne faut regarder ces exemples que comme destinés à donner une idée de la méthode qu'on doit suivre. Nous chercherons dans la Partie suivante à déterminer les valeurs qu'il convient de choisir pour V, V', M & v , & ce sera dans la quatrième que nous examinerons avec plus de détail différentes formes de Tribunaux, & que nous en discuterons les avantages sous tous les points de vue.

..... *Sixième Cas.*

Nous connoissons V, q, q' , & nous cherchons v .

Pour cela, au lieu de la formule pour V^q qui est donnée, page 15, nous prendrons la formule suivante.

$$\begin{aligned}
 V^q = & 1 - \frac{2q+1}{q-q'+1} v^{q-q'+1} e^{q+q'+1} \left(\frac{q-q'+1}{q+q'+1} v - e \right) \\
 & + \frac{2q+3}{q-q'+2} v^{q-q'+2} e^{q+q'+2} \left(\frac{q-q'+2}{q+q'+2} v - e \right) \\
 & + \frac{2q+5}{q-q'+3} v^{q-q'+3} e^{q+q'+3} \left(\frac{q-q'+3}{q+q'+3} v - e \right) \\
 & + \dots \dots \dots \text{ \& ainsi de suite, cette série}
 \end{aligned}$$

étant prolongée à l'infini. Ensuite nous remarquerons qu'au lieu des puissances de v & de e , on peut, en faisant $ve = z$,

U ij

mettre dans ces termes

$e^{2q'} z^{q'+1} - q'$, $e^{2q'} z^{q'+2} - q'$, $e^{2q'} z^{q'+3} - q'$, &c. De plus, nous avons $v = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} - z\right)}$ & $e = \frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{4} - z\right)}$, & par conséquent $\frac{a}{b} v - e = \frac{a-b}{b} \cdot \frac{1}{2} + \frac{a+b}{b} \sqrt{\left(\frac{1}{4} - z\right)}$, ce qui donne pour les termes qui multiplient les puissances de v & de e ,

$$\begin{aligned} & \frac{2q+2}{q+q'+1} \sqrt{\left(\frac{1}{4} - z\right)} - \frac{2q'}{q+q'+1} \frac{1}{2} \\ & \frac{2q+4}{q+q'+2} \sqrt{\left(\frac{1}{4} - z\right)} - \frac{2q'}{q+q'+2} \frac{1}{2} \\ & \frac{2q+6}{q+q'+3} \sqrt{\left(\frac{1}{4} - z\right)} - \frac{2q'}{q+q'+3} \frac{1}{2} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned} V^q = & 1 - e^{2q'} z^{q'+1} - q' \sqrt{\left(\frac{1}{4} - z\right)} \left[\frac{2q+2}{q+q'+1} + \frac{2q+4}{q+q'+2} z + \frac{2q+6}{q+q'+3} z^2 \right. \\ & \left. + \frac{2q+8}{q+q'+4} z^3 + \dots \dots \dots \right] \\ & - e^{2q'} z^{q'+1} - q' \left[\frac{1}{q+q'+1} \frac{2q+1}{q+q'+1} + \frac{1}{q+q'+2} \frac{2q+3}{q+q'+2} z \right. \\ & \left. + \frac{1}{q+q'+3} \frac{2q+5}{q+q'+3} z^2 + \frac{1}{q+q'+4} \frac{2q+7}{q+q'+4} z^3 \right. \\ & \left. + \dots \dots \dots \right] \end{aligned}$$

ou $1 - V^q$ égal à la somme des deux séries précédentes. Il est aisé de voir, en examinant ces séries, que si on les suppose ordonnées simplement par rapport à z , on n'aura pas des séries très-convergentes.

Considérons donc de nouveau ces séries en elles-mêmes, & d'abord la première qui multiplie $\sqrt{\left(\frac{1}{4} - z\right)}$. Soit a le premier terme de cette série, & b le coefficient du second,

$$\begin{aligned} \text{nous aurons } b &= a \cdot \frac{(2q+4) \cdot (2q+3)}{(q+q'+2) \cdot (q+q'+1)} = a \cdot \frac{4(q+1)^2 + 6(q+1) + 2}{(q+1)^2 + q + 1 - (q^2 - q)} \\ &= a \cdot \frac{4\left(1 + \frac{1}{q+1}\right) + \frac{1}{(q+1)^2}}{1 + \frac{1}{q+1} - \frac{q^2 - q}{(q+1)^2}}; \text{ \& en regardant } \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

& $\frac{q^n - q}{(q+1)^2}$ comme un seul terme, & appelant r leur différence, $b = 4a [1 - r + r^2 - r^3 + r^4 \dots \dots \dots$
 $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q+1} (1 - r + r^2 - r^3 + r^4 \dots \dots \dots)$
 $+ \frac{1}{2} \frac{1}{(q+1)^2} (1 - r + r^2 - r^3 + r^4 \dots \dots \dots)]$

Soit c le coefficient du troisième terme, on aura

$c = 4b [1 - r' + r'^2 - r'^3 + r'^4 \dots \dots \dots$
 $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q+2} (1 - r' + r'^2 - r'^3 + r'^4 \dots \dots \dots),$
 $+ \frac{1}{2} \frac{1}{(q+2)^2} (1 - r' + r'^2 - r'^3 + r'^4 \dots \dots \dots)]$

r' étant $= \frac{1}{q+2} - \frac{q^n - q}{(q+2)^2}$. Cela posé, si nous ne considérons que les premiers termes, & que nous négligeons les autres, il est clair que S étant la série, nous aurons $S = a + 4zS$, ou $S = \frac{a}{1-4z}$ & $S = \frac{a}{1-4z}$ sera en général la valeur de la somme des premiers termes de la série ainsi ordonnée.

Considérons ensuite le terme qui se trouve ici multiplié par $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q+1}$, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q+2}$, &c. nous aurons une série $a + 4az + 4bz^2 + 4cz^3 + \dots - 2a \cdot \frac{z}{q+1} - 2b \frac{z^2}{q+2} - 2c \cdot \frac{z^3}{q+3} - \dots$
 $= a + bz + cz^2 + cz^3 + \dots$. Donc appelant S cette série, nous aurons $S = a + 4z - 2 \frac{f(Sz^2z)}{z^2}$. Si on y ajoute ensuite les termes qui sont divisés par $(q+1)^2$, $(q+2)^2$, $(q+3)^2$, &c. & qu'on y substitue, ce qui est toujours possible, des termes divisés par $(q+1) \cdot (q+2)$, $(q+2) \cdot (q+3)$, $(q+3) \cdot (q+4)$, &c. qui n'en diffèrent que par des termes de l'ordre de ceux qu'on néglige, on aura, p étant le coefficient de ces termes,

$$\left. \begin{aligned} & a + 4az + 4bz^2 \dots \dots \dots \&c. \\ & - 2a \cdot \frac{z}{q+1} - 2b \cdot \frac{z^2}{q+2} \dots \&c. \\ & + 4a \cdot \frac{pz}{(q+1)(q+2)} + 4b \cdot \frac{pz^2}{(q+2)(q+3)} \&c. \end{aligned} \right\} = a + bz + cz^2 + \&c.$$

d'où $S = a + 4zS - 2 \cdot \frac{\int (S^2 dz)}{z^2} + 4p \frac{\int [\int (S^2 dz) dz]}{z^{q+1}}$,

& ainsi de suite; & si l'on eût voulu prendre $\frac{p}{(q+1)^2}$, $\frac{p}{(q+2)^2}$, &c. au lieu de $\frac{p}{(q+1) \cdot (q+2)}$, $\frac{p}{(q+2) \cdot (q+3)}$, &c.

on auroit eu $S = a + 4zS - 2 \frac{\int (S^2 dz)}{z^2}$

$$+ 4p \frac{\int (\int (S^2 dz) dz)}{z^q},$$

& on pourra pousser cette suite

aussi loin que l'on voudra. Mais cette méthode n'auroit encore ici que peu d'avantages, notre objet étant d'avoir une expression de la série par un petit nombre de termes. Or dès le second, qui conduit à une équation différentielle du premier ordre, qui est intégrable généralement, on auroit, en la développant, un nombre de termes très-grand, & proportionnel à q , ce qui est précisément ce que nous devons chercher à éviter.

Si au lieu de cela, on cherche à avoir S en z ou z en S par les moyens connus, on aura pour les premiers termes,

$$S = \frac{a}{1-4z} - a \cdot \frac{\int \frac{z^2 dz}{1-4z}}{z^2}, \text{ ou } z = \frac{S-a}{4S} + 2 \cdot \frac{\int (\frac{S-a}{4S})^q \frac{\partial S}{S}}{(\frac{S-a}{4S})^q}$$

formules qui, développées, contiennent encore q termes.

Cependant il est possible dans ce cas de réduire cette formule à de moindres termes. En effet, on peut supposer

$$\frac{\int (\frac{z^2 dz}{1-4z})}{z^2} = \frac{z}{(1-4z) \cdot (q+1)} - \frac{4z^2}{(q+1) \cdot (q+2) \cdot (1-4z)^2} + \&c. \dots$$

ou l'on s'arrêtera à un terme fixe indépendant de q , & du même ordre que celui auquel on a arrêté les autres termes de la série; & la même chose aura lieu pour les autres fonctions intégrales.

Si on considère maintenant la seconde série, on trouvera que, le coefficient du premier terme étant a , & b celui du

$$\begin{aligned} \text{second, on aura } b &= \frac{(2q+3) \cdot (2q+2)}{(q-q'+2) \cdot (q+q'+1)} \cdot \frac{q+q'+1}{(q+q'+2)} \cdot a \\ &= \frac{(2q+3) \cdot (2q+2)}{(q-q'+2) \cdot (q+q'+2)} a = \frac{4 \cdot (q+2)^2 - 6 \cdot (q+2) + 2}{(q+2)^2 - q^2} a \\ &= a \frac{4 - \frac{6}{q+2} + \frac{2}{(q+2)^2}}{1 - \frac{q^2}{(q+2)^2}}. \text{ On aura de même pour } c, \end{aligned}$$

$$\text{coefficient du troisième terme, } c = b \cdot \frac{4 - \frac{6}{q+3} + \frac{2}{(q+3)^2}}{1 - \frac{q^2}{(q+3)^2}},$$

& ainsi de suite, ce qui donnera, comme ci-dessus, $S = a + 4Sz$, en s'en tenant au premier terme, &

$S = a + 4Sz - \frac{6 \int (Sz^{q+1} dz)}{z^{q+1} \cdot (1-4z)}$, en prenant le second, & ainsi de suite comme pour la première série, & on pourra y appliquer les mêmes réflexions.

Supposons donc qu'on s'arrête au second terme, on aura, par ce qui précède,

$$\begin{aligned} 1 - V &= e^{2q'} z^{q+1} - q' \sqrt{\left(\frac{1}{2} - z\right)} \cdot \frac{2q+2}{q-q'+1} \cdot \frac{1}{1-4z} \\ &+ e^{2q'} z^{q+1} - q' \frac{q}{q+q'+1} \cdot \frac{2q+1}{q-q'+1} \cdot \frac{1}{1-4z}; \end{aligned}$$

& si on veut ajouter un terme de plus, il faudra ajouter au premier terme $\frac{-2z}{(q+1)(1-4z)}$, & au second $\frac{-6z}{(q+2)(1-4z)}$,

$$\text{en sorte que l'on aura } 1 - V = \frac{2q+2}{q-q'+1} e^{2q'} z^{q+1} - q' \left[\frac{1}{2\sqrt{1-4z}} \left(1 - \frac{2z}{q+1}\right) + \frac{q}{2q-2} \cdot \frac{1}{1-4z} \left(1 - \frac{6z}{q+2}\right) \right]$$

On pourra se procurer encore d'une autre manière une expression approchée de la valeur de V . En effet, nous avons ici $V = \sum e^{2q'} z^{q'+1-q'} \sqrt{\frac{1}{4} - z} \cdot \frac{2q+2}{q-q'+1} + \sum e^{2q'} z^{q'+1-q'} \cdot \frac{q'}{q+q'+1} \frac{2q+1}{q-q'+1}$. Il s'agira donc d'intégrer ces deux quantités. Considérons d'abord le terme

$$\frac{2q+2}{q-q'+1} \text{ qui est égal à } \frac{(2q+2) \cdot (2q+1) \dots \dots \dots 1}{1 \cdot 2 \dots (q-q'+1) \cdot 1 \cdot 2 \dots \dots \dots q+q'+1}$$

Mais, par les formules de M. Euler, *Traité du Calcul différentiel, Tome II, page 468*, nous avons,

$$1.^{\circ} (2q+2) \cdot (2q+1) \dots \dots \dots 1 = \sqrt{2} \Pi \cdot (2q+2)^{2q+2+\frac{1}{2}}$$

$$C^{-(2q+2)} C^{\frac{m}{2 \cdot (2q+2)}} C^{\frac{-n}{3 \cdot 4 \cdot (2q+2)^3}} C^{\frac{p}{5 \cdot 6 \cdot (2q+2)^5}} \dots \dots \dots$$

où Π représente un nombre connu par approximation, & m, n, p , &c. des nombres aussi connus & positifs.

$$2.^{\circ} 1 \dots \dots \dots q+q'+1 = \sqrt{2} \Pi \cdot (q+q'+1)^{q+q'+1+\frac{1}{2}}$$

$$C^{-(q+q'+1)} C^{\frac{m}{2(q+q'+1)}} C^{\frac{-n}{3 \cdot 4 \cdot (q+q'+1)^3}} C^{\frac{p}{5 \cdot 6 \cdot (q+q'+1)^5}} \dots \dots \dots$$

$$3.^{\circ} 1 \dots \dots \dots q-q'+1 = \sqrt{2} \Pi \cdot (q-q'+1)^{q-q'+1+\frac{1}{2}}$$

$$C^{-(q-q'+1)} C^{\frac{m}{2(q-q'+1)}} C^{\frac{-n}{3 \cdot 4 \cdot (q-q'+1)^3}} C^{\frac{p}{5 \cdot 6 \cdot (q-q'+1)^5}} \dots \dots \dots$$

Si nous cherchons maintenant, d'après ces expressions, le

terme $\frac{2q+2}{q-q'+1}$, nous aurons, en comparant les facteurs précédens terme à terme,

1.^o $\sqrt{2} \Pi$ au numérateur, & $(\sqrt{2} \Pi)^2$ au dénominateur, ce qui donne $\sqrt{2} \Pi$ au dénominateur.

2.^o Il faut comparer le terme composé $(q+q'+1)^{q+q'+1+\frac{1}{2}}$

à $(2q+2)^{2q+2+\frac{1}{2}}$. Pour

cela, nous supposons $(q+q'+1)^{q+q'+1+\frac{1}{2}} =$

$$C^{l(q+q'+1) \cdot (q+q'+1+\frac{1}{2})}; \text{ or } l(q+q'+1) = l(q+1) + l$$

$$\begin{aligned}
 &+ l\left(1 + \frac{q'}{q+1}\right) = l(q+1) + \frac{q'}{q+1} - \frac{q'^2}{2(q+1)^2} \\
 &+ \frac{q'^3}{3(q+1)^3} - \frac{q'^4}{4(q+1)^4} + \frac{q'^5}{5(q+1)^5} \dots \dots \dots \&c. \text{ Donc} \\
 &l(q+q'+1) \times (q+q'+1 + \frac{1}{2}) = l(q+1) \times \\
 &(q+q'+1 + \frac{1}{2}) + q' + \frac{q'(q+\frac{1}{2})}{q+1} - \frac{q'^2}{2(q+1)} \\
 &- \frac{q'^2(q+\frac{1}{2})}{2(q+1)^2} + \frac{q'^3}{3(q+1)^3} + \frac{q'^3(q+\frac{1}{2})}{3(q+1)^3} - \frac{q'^4}{4(q+1)^4} \\
 &- \frac{q'^4(q+\frac{1}{2})}{4(q+1)^4} + \frac{q'^5}{5(q+1)^5} + \frac{q'^5(q+\frac{1}{2})}{5(q+1)^5} - \frac{q'^6}{6(q+1)^6}, \&c.
 \end{aligned}$$

Par la même raison, nous aurons $l(q - q' + 1) \times (q - q' + 1 + \frac{1}{2}) = l(q+1) \times (q - q' + 1 + \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}
 &- q' + \frac{q'(q-\frac{1}{2})}{q+1} - \frac{q'^2}{2(q+1)} + \frac{q'^2(q-\frac{1}{2})}{2(q+1)^2} - \frac{q'^3}{3(q+1)^3} \\
 &+ \frac{q'^3(q-\frac{1}{2})}{3(q+1)^3} - \frac{q'^4}{4(q+1)^4} + \frac{q'^4(q-\frac{1}{2})}{4(q+1)^4} - \frac{q'^5}{5(q+1)^5} \\
 &+ \frac{q'^5(q-\frac{1}{2})}{5(q+1)^5} - \frac{q'^6}{6(q+1)^6}, \&c. \text{ Prenant la somme de ces}
 \end{aligned}$$

deux quantités, elle fera $l(q+1) \times (2q+3) + \frac{q'^2}{q+1}$

$$\begin{aligned}
 &- \frac{q'^2}{2(q+1)^2} + \frac{q'^4}{2 \cdot 3(q+1)^3} - \frac{q'^4}{4(q+1)^4} + \frac{q'^6}{3 \cdot 5(q+1)^5} \&c.
 \end{aligned}$$

Donc élevant C à cette puissance, & comparant les termes analogues, $(q+1)^{2q+3}$ & $(2q+2)^{2q+2+\frac{1}{2}}$, nous aurons au numérateur $2^{2q+2+\frac{1}{2}}$, & au dénominateur $(q+1)^{\frac{1}{2}}$.

$$C \frac{q'^2}{q+1} C^{-\frac{q'^2}{2(q+1)^2}} C \frac{q'^4}{6(q+1)^3} C^{-\frac{q'^4}{4(q+1)^4}} C \frac{q'^6}{15(q+1)^5} \dots$$

3.° Les termes C^{-2q+2} & $C^{-(q+q'+1)}$ $C^{-(q-q'+1)}$ se détruisent.

4.° Prenant maintenant les termes $C^{\frac{m}{2(q+q'+1)}}$, $C^{\frac{m}{2(q-q'+1)}}$, si nous mettons $\frac{m}{2(q+1+q')}$ & $\frac{m}{2(q+1-q')}$ sous la forme

$$\frac{m}{2(q+1)} \left[1 - \frac{q'}{q+1} + \frac{q'^2}{(q+1)^2} - \frac{q'^3}{(q+1)^3} + \frac{q'^4}{(q+1)^4} - \dots \right]$$

X

& $\frac{m}{2(q+1)} \left[1 + \frac{q}{q+1} + \frac{q^2}{(q+1)^2} + \frac{q^3}{(q+1)^3} + \frac{q^4}{(q+1)^4} + \dots \right]$,
 leur somme sera $\frac{m}{q+1} \left[1 + \frac{q^2}{(q+1)^2} + \frac{q^4}{(q+1)^4} + \dots \right]$.

Comparant ce terme avec le terme analogue $C^{\frac{m}{2(2q+2)}}$, nous aurons au dénominateur $C^{\frac{3m}{4(q+1)}}$, & de plus les termes $C^{\frac{mq^2}{(q+1)^2}}$, $C^{\frac{mq^4}{(q+1)^4}}$, &c.

5.° Prenant ensuite les termes $C^{\frac{-n}{3 \cdot 4(q+q+1)}}$, $C^{\frac{-n}{3 \cdot 4(q-q+1)}}$, nous ferons

$\frac{n}{3 \cdot 4(q+q+1)} = \frac{n}{3 \cdot 4(q+1)^2} \left[1 - \frac{3q}{q+1} + \frac{6q^2}{(q+1)^2} \dots \right]$
 & $\frac{n}{3 \cdot 4(q-q+1)^2} = \frac{n}{3 \cdot 4(q+1)^2} \left[1 + \frac{3q}{q+1} + \frac{6q^2}{(q+1)^2} + \dots \right]$;
 dont la somme sera $\frac{n}{2 \cdot 3(q+1)^2} \left[1 + \frac{6q^2}{(q+1)^2} \dots \right]$.

Comparant donc ces deux termes avec le terme analogue $C^{\frac{-n}{3 \cdot 4(2q+2)}}$, nous aurons au numérateur le terme $C^{\frac{-15n}{16 \cdot 2 \cdot 3(q+1)^2}}$ & $C^{\frac{nq^2}{(q+1)^2}}$ &c.

6.° Prenant enfin, pour nous arrêter au cinquième terme, $C^{\frac{p}{5 \cdot 6(q+q+1)}}$, $C^{\frac{p}{5 \cdot 6(q-q+1)}}$, nous en tirerons pour premier terme, en nous arrêtant toujours aux termes divisés par $(q+1)^2$, $\frac{2p}{5 \cdot 6(q+1)^2}$, qui comparé au terme analogue $C^{\frac{p}{5 \cdot 6(2q+2)}}$, donne au dénominateur un terme $C^{\frac{63p}{32 \cdot 5 \cdot 6(q+1)^2}}$. La valeur de la formule précédente, en s'arrêtant à la cinquième puissance négative de $q+1$, fera donc

$$\frac{2^{2q+2+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}}} \times C^{\frac{-(4q^2+3m)}{4(q+1)}} \cdot C^{\frac{q^2}{2(q+1)^2}} \cdot C^{\frac{15n-mq^2-q^4}{16 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (q+1)^2}}$$

$$\cdot C^{\frac{q^4}{4(q+1)^4}} \cdot C^{\frac{-(\frac{63p}{32 \cdot 5 \cdot 6} - 2q^2 + mq^2 + \frac{q^4}{15})}{(q+1)^2}}$$

Cela posé, on mettra le terme $C^{\frac{d'}{q+1}}$ sous la forme

$$1 + \frac{d'}{q+1} + \frac{d'^2}{2(q+1)^2} + \frac{d'^3}{2.3(q+1)^3} + \frac{d'^4}{2.3.4(q+1)^4}$$

+ $\frac{d'^5}{2.3.4.5(q+1)^5}$, &c; le terme $C^{\frac{b'}{q+1}}$ sous la forme

$$1 + \frac{b'}{q+1} + \frac{b'^2}{2(q+1)^2} + \dots$$

les termes $C^{\frac{c'}{q+1}}$, $C^{\frac{d'}{q+1}}$, sous la forme $1 + \frac{c'}{q+1}$;

$$1 + \frac{d'}{q+1}$$
 , ce qui donne, en s'arrêtant toujours aux termes divisés par $(q+1)^5$, le produit de tous ces termes égal à $1 + \frac{d'+2b'}{q+1} + \frac{d'^2+2d'b'+6d'c'+6d'^2}{2.3(q+1)^2} + \frac{d'^3+3.4d'^2b'+2.3.4d'dc'+2.3.4b'^2c'+3.4.5d'b^2+3.4.5d'c^2+2.3.4.5d'b^2+2.3.4.5d'c^2}{2.3.4.5(q+1)^3} + \dots$

Maintenant, nous aurons la première partie de ΔV égale à $\frac{e^{2q}\sqrt{(\frac{1}{2}-z)}}{\sqrt{2\Pi}\cdot z^q} \cdot \frac{2^{2q+2+\frac{1}{2}}z^{q+1}}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}$; ou $\frac{e^{2q}\sqrt{(\frac{1}{2}-z)}}{\sqrt{2\Pi}\cdot z^q} \cdot \frac{2^{2q+2}z^{q+1}}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}$, multiplié par la série précédente. Ainsi, en faisant abstraction des coefficients qui ne contiennent pas q , nous aurons à intégrer des termes $\frac{C^{(l+1z)(q+1)}}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{C^{(l+1z)(q+1)}}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{C^{(l+1z)(q+1)}}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{C^{(l+1z)(q+1)}}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}$, &c.

Maintenant, pour avoir en série la valeur de ces intégrales, nous prendrons la formule suivante,

$$\Sigma(P.Q) = \Sigma P.Q - \Delta Q (\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q (\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P) - \Delta^3 Q (\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^4 Q (\Sigma^5 P + 4\Sigma^4 P + 6\Sigma^3 P + 4\Sigma^2 P + \Sigma P), \&c.$$

X ij

où $\Sigma^2 P$, $\Sigma^3 P$, &c. désignent que l'intégration a été répétée deux, trois, &c. fois. Ici nous avons d'abord P de la forme

$$C^{p(q+1)}; \text{ or } \Sigma . C^{p(q+1)} = \frac{C^{p(q+1)}}{C^p - 1}; \text{ donc } \Sigma^2 P = \frac{C^{p(q+1)}}{(C^p - 1)^2},$$

$$\Sigma^3 P = \frac{C^{p(q+1)}}{(C^p - 1)^3}, \text{ \&c. } Q \text{ est égal } (q + 1)^{-\frac{1}{2}},$$

$(q + 1)^{-\frac{3}{2}}, (q + 1)^{-\frac{5}{2}}, \text{ \&c. \& en général à } (q + 1)^{-\frac{n}{2}},$
 n étant un nombre impair. Cela posé, nous aurons, à cause

$$\text{de } \Delta q = 1, \Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial^2 Q}{2 \partial z^2} + \frac{\partial^3 Q}{2.3. \partial z^3} + \dots + \frac{\partial^q Q}{2.3.4. \partial z^4} + \dots + \frac{\partial^q Q}{2.3.4.5. \partial z^5} \dots + \frac{\partial^q Q}{1.2.3. \dots n \partial z^n}$$

$$\Delta^2 Q = \frac{2^2 - 2}{2} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{2^3 - 2}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} + \frac{2^4 - 2}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^4 Q}{\partial z^4} \dots \dots$$

$$+ \frac{2^n - 2}{1.2. \dots n} \cdot \frac{\partial^n Q}{\partial z^n}$$

$$\Delta^3 Q = \frac{3^3 - 3.2^2 + 3}{1.2.3} \cdot \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} + \frac{3^4 - 3.2^3 + 3}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^4 Q}{\partial z^4} \dots \dots$$

$$+ \frac{3^n - 3.2^{n-1} + 3}{1.2.3. \dots n} \cdot \frac{\partial^n Q}{\partial z^n}$$

$$\Delta^4 Q = \frac{4^4 - 4.3^3 + 6.2^4 - 4}{1.2.3.4} \cdot \frac{\partial^4 Q}{\partial z^4} \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{4^n - 4.3^{n-1} + 6.2^{n-2} + 4}{1.2.3. \dots n} \cdot \frac{\partial^n Q}{\partial z^n}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Delta^m Q = \frac{m^m - m(m-1)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}(m-2)^{m-2} \dots \dots \pm m}{1.2.3. \dots m} \cdot \frac{\partial^m Q}{\partial z^m} \dots \dots$$

$$+ \frac{m^n - (m-1)^n + \frac{m(m-1)}{2}(m-2)^{n-2} \dots \dots \pm m}{1.2.3. \dots n} \cdot \frac{\partial^n Q}{\partial z^n}$$

Le coefficient du premier terme étant toujours l'unité, nous aurons ici,

$$\Delta.(q+1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{5}{2}} -$$

$$\frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} -$$

$$\frac{1}{2.2.3.4.5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}}, \text{ \&c. \&c.}$$

$$\Delta^2 \cdot (q+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} + \frac{7}{3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \&c.$$

$$\Delta^3 \cdot (q+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} - \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \&c.$$

$$\Delta^4 \cdot (q+1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \&c.$$

$$\Delta^5 \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \&c.$$

Nous aurons de même

$$\Delta \cdot (q+1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} - \dots \&c.$$

$$\Delta^2 \cdot (q+1)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} + \frac{7}{3 \cdot 4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} - \dots \&c.$$

$$\Delta^3 \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} - \dots \&c.$$

$$\Delta^4 \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} - \dots \&c.$$

De même, nous aurons

$$\Delta \cdot (q+1)^{-\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} - \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \&c.$$

$$\Delta^2 \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} - \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} + \dots \&c.$$

$$\Delta^3 \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} - \dots \&c.$$

On aura encore

$$\Delta \cdot (q+1)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{7}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} - \dots \&c.$$

$$\Delta^2 \cdot (q+1)^{-\frac{9}{2}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot (q+1)^{-\frac{11}{2}} - \dots \&c.$$

& enfin $\Delta \cdot (q + 1)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot (q + 1)^{-\frac{3}{2}} \dots \dots \dots$ &c.
 Et en substituant ces quantités dans la formule qui donne $\Sigma \cdot PQ$, on aura la valeur de l'intégrale cherchée.

Si on s'arrêtoit au premier terme, cette valeur seroit

$$\frac{e^{2q} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} - z\right)} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (4z)^{q+1}}{\sqrt{(2\Pi)} \cdot z^q \cdot (4z-1) \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}}}$$

; & pour avoir la valeur de la même fonction, en s'arrêtant au second terme, il faut y

ajouter, 1.° un terme $\frac{d \cdot e^{2q} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} - z\right)} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (4z)^{q+1}}{\sqrt{(2\Pi)} \cdot z^q \cdot (4z-1) \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}}}$, à cause

de $\frac{1}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}$, qu'il faut ajouter à la valeur de Q ; 2.° à cause

de $-\Delta Q (\Sigma^2 P + \Sigma P)$, ΔQ étant $-\frac{1}{2} \cdot (q + 1)^{-\frac{3}{2}}$.

& $\Sigma^2 P + \Sigma P$ étant $\frac{(4z^{2q+1})}{(4z-1)^2} + \frac{(4z)^{2q+1}}{(4z-1)}$, le terme

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot e^{2q} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2} - z\right)} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (4z)^{q+1}}{\sqrt{(2\Pi)} \cdot z^q \cdot (4z-1) \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{(4z-1)}\right)$$

Il nous reste maintenant à chercher, par la même méthode,

le second terme, qui est $\Sigma \cdot e^{2q'} z^{q'-1} - q' \frac{q'}{q+q'+1} \frac{2q+1}{q+q'+1}$

ou $\Sigma \cdot q' e^{2q'} z^{q'+1-q'} \frac{2q+1}{q+q'+1} \times \left[\frac{1}{q+1} - \frac{q'}{(q+1)^2} + \frac{q'^2}{(q+1)^3} - \dots \dots \dots \right]$.

Maintenant, nous avons $\frac{2q+1}{q+q'+1} = \frac{(2q+1) \cdot 2q \cdot \dots \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (q+q'+1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (q-q')}$.

Or, nous arrêtant ici au premier terme, pour ne pas trop allonger des formules qui, d'après ce qui a été dit ci-dessus, n'auroient aucune difficulté, nous avons,

1.° $(2q + 1) \dots 1 = \sqrt{(2\Pi)} \cdot z^{2q+1+\frac{1}{2}} C^{-2q+1} \cdot C^{\frac{n}{2 \cdot (2q+1)}}$;

2.° $(q + q' + 1) \dots 1 = \sqrt{(2\Pi)} \cdot (q + q' + 1)^{q+q'+1+\frac{1}{2}}$

$\times C^{-(q+q'+1)} \cdot C^{\frac{n}{(q+q'+1)}}$; 3.° $(q - q') \dots \dots \dots$

$= \sqrt{(2\Pi)} \cdot (q - q')^{q-q'+\frac{1}{2}} \cdot C^{-(q-q')} \cdot C^{\frac{n}{2 \cdot (q-q')}}$.

ce qui nous donnera, comme ci-dessus, 1.° $\sqrt{2\Pi}$ au

dénominateur ; 2.° $(2q+1)^{2q+1+\frac{1}{2}} = C^{l(2q+1)(2q+1+\frac{1}{2})}$

$$= C^{[l(2q+2)+l(1-\frac{1}{2q+2})](2q+1+\frac{1}{2})}$$

$$= C^{[l(2q+2)-\frac{l}{2q+2}-\frac{l}{2(2q+2)^2} \dots \dots \dots \&c.](2q+1+\frac{1}{2})};$$

$$(q+q'+1)^{q+q'+1+\frac{1}{2}} = C^{[l(q+1)+\frac{l}{q+1}-\frac{l^2}{2(q+1)^2} \dots \&c.](q+q'+1+\frac{1}{2})};$$

$$(q-q')^{q-q'+\frac{1}{2}} = C^{[l(q+1)-\frac{l}{q+1}-\frac{l^2}{2(q+1)^2} \dots \dots \dots \&c.](q-q'+\frac{1}{2})};$$

ce qui nous donnera $C^{l(q+1)(q-q'+\frac{1}{2})} \cdot C^{-\frac{q'^2+q}{q+1}}$;

3.° les termes $C^{-(2q+1)}$ & $C^{-(q+q'+1)}$ & $C^{-(q-q')}$ se

détruiront ; 4.° nous mettrons, à cause que nous négligeons

les troisièmes termes, $C^{\frac{m}{2(2q+2)}}$ au lieu de $C^{\frac{m}{2(2q+1)}}$, &

$C^{\frac{m}{2(q+1)}}$, $C^{\frac{m}{2(q+1)}}$ au lieu de $C^{\frac{m}{2(q+q'+1)}}$, $C^{\frac{m}{2(q-q')}}$, ce qui

donnera un terme $C^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{q+2}}$

Ainsi nous aurons cette partie de la valeur de ΔV égale à

$$\frac{q^d e^{2q} (4z)^{q+1} \cdot C^{\frac{-q^d + \dots + \frac{1}{2} + \frac{3m}{4}}{q+1}}}{z^q \sqrt{2\Pi} \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}} \text{ , ou } \frac{q^d e^{2q} (4z)^{q+1} \cdot C^{\frac{d}{q+1}}}{z^q \sqrt{2\Pi} \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}}$$

ce qui donne pour intégrale $\frac{q^d e^{2q} (4z)^{q+1}}{z^q \sqrt{2\Pi} \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \cdot (4z-1)}$, si on

s'en tient au premier terme ; & si on prend le second à

cause de $C^{\frac{d}{q+1}} = 1 + \frac{d}{q+1}$, il faudra ajouter,

$$1.^\circ \frac{d q^d e^{2q} (4z)^{q+1}}{z^q \sqrt{2\Pi} \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \cdot (4z-1)} \text{ , } 2.^\circ \frac{\frac{1}{2} q^d e^{2q} (4z)^{q+1}}{z^q \sqrt{2\Pi} \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \cdot (4z-1)}$$

$$(1 + \frac{1}{4z-1})$$

Si nous cherchons maintenant quelles constantes il faut ajouter à ces intégrales, nous trouverons que lorsque $q=0$,

cas où elles se bornent au premier terme, on doit avoir $V = 1$; mais à cause de $4z < 1$, on a alors la somme de ces intégrales égale à zéro; donc il faudra ajouter la constante 1. Nous aurons donc, en se bornant au premier terme,

$$V = 1 - \frac{e^{2q} \cdot 2^{\frac{1}{2}} (4z)^{q+1} \sqrt{\frac{1}{2} - z}}{\sqrt{2\pi} \cdot z^q (1-4z)^{q+1} \frac{1}{2}} - \frac{e^{2q} (4z)^{q+1}}{z^q \sqrt{2\pi} \cdot (q+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot (1-4z)},$$

quantités qui, comme on le voit, s'accordent avec la valeur trouvée par l'autre méthode, si on y met cette première

valeur pour les termes $\frac{2q+2}{q+q'+1}$, $\frac{2q'+1}{q+q'+1}$ leur valeur approchée, & il en sera de même pour les autres termes.

Supposons maintenant qu'on connoisse dans ces formules V & $1 - V$, & que q soit très-grand, on cherchera une valeur de z & de e qui donne une valeur de ces formules peu différente de celles qu'elles doivent avoir, & on aura une valeur approchée de e & de z .

Maintenant, pour avoir une seconde valeur, on prendra la précédente valeur, prise en y mettant $q + 1$ au lieu de q ; on y ajoutera ou l'on en retranchera le terme $\frac{2q+1}{q+q'+1} e^{q-q'+1} e^{q+q'+1} \left(\frac{q-q'+1}{q+q'+1} e - e \right)$, & on cherchera la valeur approchée de e & de z , qui, substituée dans cette nouvelle formule, donne à très-peu près la valeur donnée de $1 - V$ ou V .

Supposons que l'on cherche $1 - V$, que l'on n'ait pris que les premiers termes de la valeur approchée, que σ & ϵ soient les premières valeurs de z & de e , & qu'on appelle Z la première partie de la valeur de $1 - V$, & Z' la seconde; mettant $q + 1$ à la place de q , Z deviendra

$$\frac{(2q+4) \cdot (2q+3)}{(q-q'+1) \cdot (q+q'+2)} z \cdot Z, \text{ \& } \frac{\partial Z}{\partial z} \text{ par conséquent}$$

$$\frac{(2q+4) \cdot (2q+3)}{(q-q'+1) \cdot (q+q'+2)} Z + \frac{(2q+4) \cdot (2q+3)}{(q-q'+1) \cdot (q+q'+2)} z \frac{\partial Z}{\partial z}, \text{ \& de}$$

$$\text{même } Z' = \frac{(2q+3) \cdot (2q+2)}{(q-q'+1) \cdot (q-q'+2)} Z' z \text{ \& } \frac{\partial Z'}{\partial z}$$

==

$$= \frac{(2q+3) \cdot (2q+2)}{(q-q'+1) \cdot (q+q'+2)} Z + \frac{(2q+3) \cdot (2q+2)}{(q-q'+1) \cdot (q+q'+2)} z \frac{\partial Z}{\partial z}; \text{ \& si}$$

l'on prend les secondes formules, Z deviendra $Z \frac{(q+1)^{\frac{1}{2}}}{(q+2)^{\frac{1}{2}}} 4z$,

$$\text{\& sa différence sera, } \frac{\partial Z}{\partial z} 4z \frac{(q+1)^{\frac{1}{2}}}{(q+2)^{\frac{1}{2}}} + 4Z \frac{(q+1)^{\frac{1}{2}}}{(q+2)^{\frac{1}{2}}},$$

\& on aura des formules semblables pour Z'.

Quant au terme qu'on a ajouté, il fera, dans le premier cas, $(Z+Z')(1-4z)$; \& dans le second, $(Z+Z')(4z-1)$. Si donc on substitue $\epsilon + \partial\epsilon$ à ϵ , \& $\sigma + (1-2\epsilon)\partial\epsilon$ à σ , \& qu'on néglige les puissances de ϵ au dessus de la première, on aura pour $\partial\epsilon$ une valeur assez simple à calculer en nombres, qui ne contiendra que Z \& Z', $\frac{\partial Z}{\partial z}$ \& $\frac{\partial Z'}{\partial z}$, dans lesquelles on mettroit σ pour z \& ϵ pour e . Mais on a dans la première approximation la valeur de Z \& de Z'; \& quant à $\frac{\partial Z}{\partial z}$ \& $\frac{\partial Z'}{\partial z}$, il est aisé de voir qu'elles seront égales à Z \& à Z', multipliés par une fonction assez simple. On aura donc $\partial\epsilon$ sans être obligé de calculer aucun terme compliqué \& par une équation $\partial\epsilon + a + \beta \frac{1-V}{Z} = 0$, ou $\partial\epsilon + a + \beta \frac{V}{Z} = 0$, a \& β étant des quantités en nombres peu difficiles à trouver.

Si on cherche ensuite une troisième approximation, on fera dans la valeur précédente de Z, a , β \& $1-V$ ou V , $q = q + 1$, on ajoutera le même terme $(Z+Z')(1-4z)$, \& l'on aura une valeur de $\partial\epsilon'$ par une équation assez simple de la même forme; mais alors il faudra mettre dans Z \& Z', comme dans les autres termes, $\epsilon + \partial\epsilon$ au lieu de ϵ , \& $\sigma + \partial\sigma$, ou $\sigma + (1-2\epsilon)\partial\epsilon$ au lieu de σ . Cette substitution est fort simple. En effet, soit σ une valeur de z \& σ' une autre valeur de z , ϵ une valeur de e , \& ϵ' une autre valeur de e , Z la valeur qui répond à la première,

Y.

Z , celle qui répond à la seconde, on aura $Z_1 = Z \left(\frac{\epsilon}{c}\right)^{2q'}$
 $\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{q'+1-q'} \left(\frac{1-4\sigma'}{1-4\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$; & appelant de même Z' la pre-
mière valeur de Z' après la première substitution, & Z'' la
seconde, on aura $Z''_1 = Z'' \left(\frac{\epsilon}{c}\right)^{2q'} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{q'+1-q'}$
 $\left(\frac{1-4\sigma'}{1-4\sigma}\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui demande très-peu de calcul pour avoir
 Z , ou Z' , lorsqu'on connoît Z ou Z' ; & ainsi de suite.

Il arrivera même très-souvent que l'on aura une valeur
suffisamment approchée de z ou de e , en faisant

$$1 - V = \frac{2q+2\cdots}{q-q'+1} e^{2q'} z^{q'+1-q'} \times \left[\sqrt{\frac{1}{4} - z} + \frac{q'}{2q+2} \right];$$

ce qui simplifieroit encore le calcul.

Cette méthode sera très-satisfaisante tant que q sera très-
grand; mais si q n'est pas très-grand, on pourra employer
le moyen suivant.

1.° On prendra

$$1 - V = \frac{2q+1}{q-q'+1} \left(\frac{q-q'+1}{q+q'+1} v - e \right) e^{2q'} z^{q'-q'+1},$$

& on cherchera une valeur de v & de e , qui donne pour
cette formule une valeur très-voisine de $1 - V$. Supposant,

par exemple, $q = 12$, $q' = 2$, & $1 - V = \frac{1}{10,000}$, on

cherchera une valeur de v & de e , qui donnera une valeur
de $1 - V$ approchant de la véritable, & on la trouvera

ici entre $\frac{80}{100}$ & $\frac{79}{100}$ pour v , $\frac{79}{100}$ étant sûrement trop

petit, & $\frac{80}{100}$ pouvant être trop grand.

2.° Quand on aura cette première limite, on prendra les
deux premiers termes de la valeur de $1 - V$, qui sont

$$\frac{2q+1}{q-q'+1} e^{2q'} z^{q'-q'+1} \left[\left(\frac{q-q'+1}{q+q'+1} v - e \right) + \frac{(2q+3) \cdot (2q+2)}{(q-q'+1) \cdot (q+q'+1)} v e \left(\frac{q-q'+2}{q+q'+2} v - e \right) \right].$$

On suppose dans ce dernier facteur à v la valeur trouvée

d'abord & prise de celle des limites qui est la plus voisine. Soit A cette valeur, B celle de $\frac{2q+1}{q-q'+1}$, qui est constante, on aura $\frac{1-V}{A.B} = e^{2q'} z^{q-q'+1}$; & appelant $e = \frac{1}{b}$, & $z = \frac{a}{b}$, on aura $\frac{a^{q-q'+1}}{b^{q+2}} = \frac{1-V}{A.B}$; d'où l'on tirera $(q - q' + 1) \ln a - (2q + 2) \ln b = \ln \left(\frac{1-V}{A.B} \right)$; & faisant $\ln a + \delta = \ln b$, on aura $-(q + q' + 1) \delta - (2q + 2) \delta = \ln \left(\frac{1-V}{A.B} \right)$. Or, comme $b = a + 1$, δ exprime la différence entre deux logarithmes consécutifs, & on pourra, sans des tâtonnemens bien pénibles, résoudre cette équation.

Ayant ici une valeur de v & de e , on la substituera dans la fraction exprimée par A , & on cherchera une nouvelle valeur de v & de e par la même méthode, pour avoir une nouvelle valeur plus approchée de v & de e . En suivant, par exemple, cette méthode dans le cas que nous avons proposé, on aura une valeur de v , à un millièmè près, dès les deux premiers termes, ce qui, dans bien des cas, sera suffisant.

On continuera de même pour le troisième terme. Cette méthode réussira même pour le cas où q n'est pas très-grand, parce qu'il suffit de très-petites augmentations ou diminutions de v pour en produire de très-sensibles dans la grandeur de $1 - V$. Nous ne nous arrêterons pas à développer, pour le cas du nombre des Votans $2q$ & de la pluralité de $2q'$, les formules correspondantes à celles que nous venons de développer.

Septième Cas.

On suppose V' connu, ainsi que q & q' , & on cherche v & e .

On emploiera ici les mêmes formules que pour le cas précédent, en conservant z , changeant v en e , & réciproquement,

Y ij

ainsi que les signes, & ajoutant l'unité, ou simplement changeant v en e dans $1 - V$.

Huitième Cas.

Si on avoit supposé qu'on connût seulement la moindre pluralité exigée & le moindre nombre des Votans, ainsi que V ou V' , & qu'on cherchât ensuite pour une pluralité proportionnelle les valeurs de v & de e , il est aisé de voir qu'ayant résolu la question pour le cas le plus simple, il suffiroit de connoître le changement qu'un terme de plus apporte successivement dans les valeurs de v & de e . Nous n'entrerons dans aucun détail sur ce dernier cas, où, la première valeur trouvée, on aura les autres dans presque toutes les circonstances avec assez de facilité.

Neuvième Cas.

On suppose ici qu'on connoît M & q' , & qu'on cherche v & e . Soit prise la formule $M = \frac{v^{2q'+1}}{v^{2q'+1} + e^{2q'+1}} = \frac{1}{1 + (\frac{e}{v})^{2q'+1}}$, on a $(\frac{e}{v})^{2q'+1} = \frac{1-M}{M}$ & $l \frac{e}{v} = \frac{1}{2q'+1} [l(1 - M) - lM]$; & si le nombre des Votans est pair, $l \frac{e}{v} = \frac{1}{2q'} [l(1 - M) - lM]$.

C'est ici le lieu de faire une observation qui peut être importante. On s'est contenté dans quelques pays de fixer quel nombre des Juges d'un Tribunal nombreux suffit pour rendre une décision, & la pluralité nécessaire pour condamner. Par exemple, un Tribunal est formé de trente Juges qui ont droit d'y siéger, & la loi prononce que sept suffisent pour rendre un jugement, & qu'on exige une pluralité de deux voix seulement: dans ce cas, s'il n'y a que sept Juges, comme la pluralité est nécessairement trois, nous avons

$$1 - V = 21e^5 - 35e^6 + 15e^7, V' = 21v^5 - 35v^6 + 15v^7, M = \frac{1}{1 + \frac{e^3}{v^3}}; \text{ mais si on suppose que huit}$$

$$\text{Juges y ont assisté, on a } 1 - V = 56e^5 - 140e^6 + 120e^7 - 35e^8, V' = 56v^5 - 140v^6 + 120v^7 - 35v^8, \& M = \frac{1}{1 + \frac{e^3}{v^3}}. \text{ Or la différence des deux}$$

valeurs de $1 - V$ est $35e^5 - 105e^6 + 105e^7 - 35e^8 = (35e^5)(1 - 3e) + 105e^7(1 - \frac{1}{3}e)$. La différence des valeurs de V' est $35v^5(1 - 3v) + 105v^7(1 - \frac{1}{3}v)$. Donc

1.° Toutes les fois que $1 - 3e + 3e^2 - e^3$ sera positif, c'est-à-dire, que $e < 1$, ce qui a toujours lieu, on aura pour huit Votans $1 - V$ plus grand & V plus petit. Ainsi dans ce cas, s'il n'y a que sept Juges, il y aura moins à craindre qu'un innocent ne soit condamné que lorsqu'ils se trouvent huit.

2.° Prenant la différence entre les deux valeurs de V' , nous trouverons V' plus grand pour huit Votans que pour sept, tant que v ne sera pas plus grand que 1, c'est-à-dire dans tous les cas. Ainsi dans le cas où sept Juges seulement jugeront, il y aura plus à craindre qu'un coupable n'échappe, & qu'il n'y ait pas de décision.

3.° Enfin la différence de M sera beaucoup plus importante. En effet, on auroit dans un cas $M = \frac{1}{1 + \frac{e^3}{v^3}}$,

$$\& \text{ dans l'autre } M = \frac{1}{1 + \frac{e^3}{v^3}}, \text{ ou dans un cas } \frac{e}{v} = \left(\frac{1-M}{M}\right)^{\frac{1}{3}},$$

& dans l'autre $\frac{e}{v} = \left(\frac{1-M}{M}\right)^{\frac{1}{3}}$. Supposons donc que

$$1 - M = \frac{1}{10001}, \& M = \frac{10000}{10001}. \text{ Pour avoir la sûreté}$$

exigée, on aura dans le premier cas $\frac{e}{v} = \frac{4644}{100,000}$, & dans le second $\frac{e}{v} = \frac{1}{100}$, c'est-à-dire, plus du double.

En sorte qu'en exigeant de Tribunaux pairs ou impairs une égale pluralité de deux suffrages, on regarde comme égaux ces deux Tribunaux; tandis que pour donner une sûreté égale, il faudroit que la probabilité de l'erreur de chaque Votant fût quatre fois & demie moindre dans l'un que dans l'autre.

Dans la même hypothèse, supposons que cette probabilité soit telle qu'elle donne $\frac{1-M}{M} = \frac{1}{10000}$ dans le premier cas, nous aurons dans le second $\frac{1-M}{M} = \left(\frac{1}{10000}\right)^{\frac{2}{3}}$ $= \frac{21}{10000}$, & par conséquent $1 - M$, c'est-à-dire, le risque que court un innocent d'être condamné, égal à $\frac{21}{10021}$ au lieu de $\frac{1}{10001}$.

Ainsi dans cette forme de Tribunaux, la sûreté des innocens seroit à peu-près tantôt vingt-une fois plus grande, tantôt vingt-une fois plus petite, suivant que le hasard amèneroit des Juges en nombre pair ou impair; & il paroît en quelque sorte contraire à la justice de faire volontairement dépendre de ce hasard une différence si marquée dans le sort des accusés, excepté dans le cas où la petitesse du risque est extrême.

Le danger pour une pluralité de n voix, est $\frac{e^n}{e^n + v^n}$, & pour $n + 1$ voix, $\frac{e^{n+1}}{e^{n+1} + v^{n+1}}$; le rapport sera, faisant $v = me$, $m \left(1 - \frac{1}{m^n} + \frac{1}{m^{n+1}} - \frac{1}{m^{2n}} + \frac{1}{m^{2n+1}} - \dots \right)$, c'est-à-dire, toujours plus petit que m , excepté quand n est infini. Ainsi il faudra toujours, comme on doit chercher à avoir m un peu grand, prendre la moindre pluralité de n voix, telle qu'il en résulte un risque si petit, que quand celui

de la pluralité $n + 1$ seroit m fois plus petit, un accusé ne pût être frappé de l'avantage qu'il résulteroit pour lui, d'avoir un nombre impair de Juges si n est pair, ou d'en avoir un nombre pair si n est impair; comme, par exemple, un homme jeune, d'une bonne constitution, n'est pas plus frappé de la crainte de mourir d'apoplexie dans quinze jours que dans la journée, quoique le danger soit quinze fois plus grand.

Fin de la seconde Partie.



T R O I S I È M E P A R T I E .

Nous avons suffisamment exposé l'objet de cette troisième Partie: on a vu qu'elle devoit renfermer l'examen de deux questions différentes. Dans la première, il s'agit de connoître, d'après l'observation, la probabilité des jugemens d'un Tribunal ou de la voix de chaque Votant; dans la seconde, il s'agit de déterminer le degré de probabilité nécessaire pour qu'on puisse agir dans différentes circonstances, soit avec prudence, soit avec justice.

Mais il est aisé de voir que l'examen de ces deux questions demande d'abord qu'on ait établi en général les principes d'après lesquels on peut déterminer la probabilité d'un événement futur ou inconnu, non par la connoissance du nombre des combinaisons possibles qui donnent cet événement, ou l'évènement opposé, mais seulement par la connoissance de l'ordre des évènements connus ou passés de la même espèce. C'est l'objet des problèmes suivans.

P R O B L È M E I .

Soient deux évènements seuls possibles A & N , dont on ignore la probabilité, & qu'on sache seulement que A est arrivé m fois, & N , n fois. On suppose l'un des deux évènements arrivés, & on demande la probabilité que c'est l'évènement A , ou que c'est l'évènement N , dans l'hypothèse que la probabilité de chacun des deux évènements est constamment la même.

SOLUTION. Soit x cette probabilité inconnue de A , la probabilité d'amener A , m fois & N , n fois, sera $\frac{m+n}{n} x^m \cdot (1-x)^n$; donc la probabilité d'amener A , m

A , m fois, & N , n fois, sera pour toutes les valeurs de x depuis zéro jusqu'à 1, $\frac{m+n}{n} \int x^m \cdot (1-x)^n dx$.

De même, la probabilité d'amener A après avoir eu A , m fois, & N , n fois sera $\frac{m+n}{n} \int x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx$; la probabilité d'amener N sera dans la même hypothèse $\frac{m+n}{n} \int x^m \cdot (1-x)^{n+1} dx$, & celle d'amener l'un ou l'autre, égale à la somme de ces deux probabilités, sera $\frac{m+n}{n} \int x^m \cdot (1-x)^n dx$. On aura donc pour la

probabilité d'amener A plutôt que N , $\frac{\int x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx}{\int x^m \cdot (1-x)^n dx}$,

& pour la probabilité d'amener N plutôt que A , $\frac{\int x^m \cdot (1-x)^{n+1} dx}{\int x^m \cdot (1-x)^n dx}$. Or, en intégrant par parties, on a,

$$\int x^m \cdot (1-x)^n dx = \frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \dots \dots \dots (m+n+1)} ;$$

$$\int x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx = \frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+2) \dots \dots \dots (m+n+2)} ;$$

$$\int x^m \cdot (1-x)^{n+1} dx = \frac{(n+1) \cdot n \dots \dots \dots 1}{(m+1) \dots \dots \dots (m+n+2)} ;$$

Donc la probabilité en faveur de A sera $\frac{m+1}{m+n+2}$, & celle

en faveur de N , $\frac{n+1}{m+n+2}$.

PROBLÈME II.

On suppose dans ce Problème, que la probabilité de A & de N n'est pas la même dans tous les évènements, mais qu'elle peut avoir pour chacun une valeur quelconque depuis zéro jusqu'à l'unité.

Z

SOLUTION. Dans ce cas, la probabilité d'avoir m fois A , & n fois N , est exprimée par $\frac{m+n}{n} (\int x \partial x)^m [\int (1-x)^n \partial x]^n$.

La probabilité d'avoir une fois A après avoir eu A , m fois, & n fois N , est exprimée par $\frac{m+n}{n} (\int x \partial x)^{m+1} [\int (1-x) \partial x]^n$.

Enfin la probabilité d'avoir N après m évènements A , & n évènements N , fera $\frac{m+n}{n} (\int x \partial x)^m [\int (1-x) \partial x]^{n+1}$.

Les intégrales étant prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, la première devient $\frac{m+n}{n} \frac{1}{2^{m+n}}$; la seconde & la troisième font $\frac{m+n}{n} \frac{1}{2^{m+n+1}}$. La probabilité d'avoir A sera donc exprimée par $\frac{1}{2}$, & celle d'avoir N aussi par $\frac{1}{2}$.

P R O B L È M E I I I.

On suppose dans ce problème que l'on ignore si à chaque fois la probabilité d'avoir A ou N reste la même, ou si elle varie à chaque fois, de manière qu'elle puisse avoir une valeur quelconque depuis zéro jusqu'à l'unité, & l'on demande, sachant que l'on a eu m évènements A , & n évènements N , quelle est la probabilité d'amener A ou N .

SOLUTION. Si la probabilité est constante, celle d'obtenir A , m fois, & N , n fois, est exprimée par $\frac{m+n}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots (m+n+1)}$. Si la probabilité n'est pas constante, celle d'obtenir A , m fois & N , n fois, est $\frac{m+n}{n} \frac{1}{2^{m+n}}$. Donc la probabilité que la première hypothèse

a lieu, sera $\frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots \dots m+n+1} + \frac{1}{2^{m+n}}$, &

celle que la seconde aura lieu, par

$\frac{1}{2^{m+n}}$; mais si la première $\frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots \dots m+n+1} + \frac{1}{2^{m+n}}$

hypothèse a lieu, la probabilité d'avoir *A* est $\frac{m+1}{m+n+2}$,

& celle d'avoir *N*, $\frac{n+1}{m+n+2}$; & si la seconde hypothèse

a lieu, la probabilité d'avoir *A* est $\frac{1}{2}$, de même que celle d'avoir *N*. La probabilité d'avoir *A* fera donc

$$\frac{\frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+2) \dots \dots \dots m+n+2} + \frac{1}{2^{m+n+1}}}{\frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \dots \dots \dots m+n+1} + \frac{1}{2^{m+n}}} + \frac{\frac{(n+1) \cdot n \dots \dots \dots 1}{(m+1) \dots \dots \dots m+n+2} + \frac{1}{2^{m+n+1}}}{\frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \dots \dots \dots (m+n+1)} + \frac{1}{2^{m+n}}}$$

R E M A R Q U E.

Si l'on compare les deux termes $\frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots \dots m+n+1}$ & $\frac{1}{2^{m+n}}$, on trouvera que, si on suppose $m = an$ & $n = \frac{1}{a}$, le rapport du premier au second de ces termes sera $\frac{1}{a}$ tant que *a* sera plus grand ou plus petit que 1, & au contraire zéro lorsque $a = 1$.

Ainsi supposons *m* & *n* donnés & inégaux; si on continue d'observer les évènements, & que *m* & *n* conservent la même proportion, on parviendra à une valeur de *m* & de *n*, telle

Z ij

qu'on aura une probabilité aussi grande qu'on voudra, que la probabilité des évènements A & N est constante.

Par la même raison, lorsque m & n sont fort grands, leur différence, quoique très-grande en elle-même, peut être assez petite par rapport au nombre total, pour que l'on ait une très-grande probabilité que la probabilité d'avoir A ou N n'est pas constante.

P R O B L È M E I V.

On suppose ici un évènement A arrivé m fois, & un évènement N arrivé n fois; que l'on sache que la probabilité inconnue d'un des évènements soit depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, & celle de l'autre depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro, & l'on demande, dans les trois hypothèses des trois problèmes précédens, 1.° la probabilité que c'est A ou N dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$; 2.° la probabilité d'avoir A ou N dans le cas d'un nouvel évènement; 3.° la probabilité d'avoir un évènement dont la probabilité soit depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$.

SOLUTION. 1.° Soit supposé que la probabilité est constante, la probabilité d'avoir m , A & n , N sera exprimée, si la probabilité de A est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, par $\frac{m+n}{n}$

$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^m \cdot (1-x)^n} dx$, ce terme ainsi figuré exprimant que l'intégrale est prise depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$. Si la probabilité de A est depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à 0, la probabilité d'avoir m , A & n , N sera

la même intégrale prise depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à 0, ou $\frac{m+n}{n}$

$[\int x^m \cdot (1-x)^n dx - \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^m \cdot (1-x)^n} dx]$, ou $\frac{m+n}{n}$

$\int [\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^m \cdot (1-x)^n} dx]$. La probabilité que l'évènement A est celui dont la probabilité est au-dessus de $\frac{1}{2}$, sera donc

$\frac{\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^m \cdot (1-x)^n dx}}{\int x^m \cdot (1-x)^n dx}$, & celle que c'est l'évènement N , sera

$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^n \cdot (1-x)^m dx}{\int_0^1 x^n \cdot (1-x)^m dx}$. La probabilité d'avoir l'évènement A ,

si la probabilité de A est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, sera

$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx}$; & si la probabilité de A est de-

puis $\frac{1}{2}$ jusqu'à 0, la probabilité de l'évènement A sera

$\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^n \cdot (1-x)^{m+1} dx}{\int_0^1 x^n \cdot (1-x)^{m+1} dx}$. Multipliant chacun de ces termes par

les probabilités respectives des hypothèses auxquelles ils répondent, & prenant leur somme, la probabilité de l'évènement

A sera $\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx}$, & semblablement celle de

l'évènement N sera $\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m \cdot (1-x)^{n+1} dx}{\int_0^1 x^m \cdot (1-x)^{n+1} dx}$.

Par la même raison, la probabilité de l'évènement A , cette probabilité étant depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, étant multipliée par la probabilité qu'elle est renfermée dans ces limites, donne

$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 [x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx]}{\int_0^1 x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx}$, & celle d'avoir N dans la même

hypothèse, sera $\frac{\int_0^{\frac{1}{2}} [x^m \cdot (1-x)^{n+1} dx]}{\int_0^1 x^m \cdot (1-x)^{n+1} dx}$, & leur somme, ou

$\frac{\int_0^1 [x^{m+1} \cdot (1-x)^n + x^m \cdot (1-x)^{n+1}] dx}{\int_0^1 x^{m+1} \cdot (1-x)^n + x^m \cdot (1-x)^{n+1} dx}$ exprimera la probabilité

d'avoir un évènement dont la probabilité sera entre 1 & $\frac{1}{2}$.

2.° Soit supposée maintenant la probabilité changeante à chaque évènement, mais étant toujours pour le même, ou depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, ou depuis 0 jusqu'à $\frac{1}{2}$.

La probabilité d'avoir l'évènement A , m fois, & N , n fois; celle de A étant depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, fera $\frac{m+n}{n}$

$\int_{x \partial x}^{\frac{1}{2}} m \int_{(1-x) \cdot \partial x}^{\frac{1}{2}} n$; & si c'est la probabilité de N qui

est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, la probabilité d'avoir A , m fois, & N , n fois, sera exprimée par $\frac{m+n}{n} \int_{x \partial x}^{\frac{1}{2}} n \int_{(1-x) \cdot \partial x}^{\frac{1}{2}} m$;

le nombre total des combinaisons étant $\int (x \partial x)^{m+n} = \frac{1}{3^{m+n}}$,

la probabilité de m , A & n , N fera donc dans la première hypothèse, $\frac{m+n}{n} \frac{3^m}{8^{m+n}}$; & dans la seconde, $\frac{m+n}{n} \frac{3^n}{8^{m+n}}$;

en sorte que la probabilité que A , plutôt que N , a une probabilité entre 1 & $\frac{1}{2}$, fera $\frac{3^m}{3^m+3^n}$, & la probabilité contraire $\frac{3^n}{3^m+3^n}$.

La probabilité d'avoir une fois de plus l'évènement A , si la probabilité de A est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, sera

$$\frac{\int_{x \partial x}^{\frac{1}{2}} m+1 \int_{(1-x) \cdot \partial x}^{\frac{1}{2}} n}{\int x \partial x \cdot \int_{x \partial x}^{\frac{1}{2}} m \cdot \int_{(1-x) \cdot \partial x}^{\frac{1}{2}} n}$$

est au contraire depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à 0, la probabilité d'avoir A

$$\text{une fois de plus, sera } \frac{\int_{(1-x) \cdot \partial x}^{\frac{1}{2}} m+1 \int_{x \partial x}^{\frac{1}{2}} n}{\int x \partial x \cdot \int_{(1-x) \cdot \partial x}^{\frac{1}{2}} m \int_{x \partial x}^{\frac{1}{2}} n}$$

& les multipliant par la probabilité de chaque hypothèse, & prenant leur somme, on aura pour la probabilité d'amener A ,

$$\frac{3^m \cdot \frac{1}{2} + 3^n \cdot \frac{1}{2}}{3^m + 3^n}; \text{ \& pour celle d'amener } N, \frac{3^m \cdot \frac{1}{2} + 3^n \cdot \frac{1}{2}}{3^m + 3^n}. \text{ La}$$

probabilité d'amener A lorsqu'il a une probabilité entre 1 & $\frac{1}{2}$, est $\frac{3^m \cdot \frac{1}{2}}{3^m + 3^n}$; celle d'amener N , en supposant sa probabilité entre 1 & $\frac{1}{2}$, est $\frac{3^n \cdot \frac{1}{2}}{3^m + 3^n}$. Donc la probabilité d'avoir en général un évènement dont la probabilité soit entre 1 & $\frac{1}{2}$, sera égale à $\frac{1}{4}$, quels que soient m & n .

3.° Les probabilités d'avoir m, A & n, N dans les deux hypothèses, sont ici comme $\int x^m \cdot (1-x)^n dx$ à $\frac{3^m + 3^n}{4^{m+n}}$; nous aurons donc pour la troisième la probabilité que A , plutôt que N , a la probabilité depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, exprimée par

$$\frac{\int \frac{x^m \cdot (1-x)^n dx}{\frac{3^m + 3^n}{4^{m+n}}} + \frac{3^m}{4^{m+n}}}{\int x^m \cdot (1-x)^n dx + \frac{3^m + 3^n}{4^{m+n}}};$$

la probabilité d'amener A une fois sera exprimée par $\frac{\int x^{m+1} \cdot (1-x)^n dx + \frac{3^{m+1} + 3^n}{4^{m+n+1}}}{\int x^m \cdot (1-x)^n dx + \frac{3^m + 3^n}{4^{m+n}}}$,

Enfin la probabilité d'avoir un évènement dont la probabilité soit depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, sera

$$\frac{\int [x^{m+1} \cdot (1-x)^n + x^{n+1} \cdot (1-x)^m] dx + \frac{3^{m+1} + 3^{n+1}}{4^{m+n+1}}}{\int x^m \cdot (1-x)^n dx + \frac{3^m + 3^n}{4^{m+n}}}$$

PROBLÈME V.

Conservant les mêmes hypothèses, on demande quelle est, dans le cas du problème premier, la probabilité, 1.° que celle de l'évènement A n'est pas au-dessous d'une quantité donnée; 2.° qu'elle ne diffère de la valeur moyenne $\frac{m}{m+n}$ que d'une quantité a ; 3.° que la probabilité d'amener A , n'est point au-dessous d'une limite a ; 4.° qu'elle ne diffère

de la probabilité moyenne $\frac{m+1}{m+n+2}$ que d'une quantité moindre que a . On demande aussi, ces probabilités étant données, quelle est la limite a pour laquelle elles ont lieu.

SOLUTION. 1.° $\int_0^a x^m \cdot (1-x)^n dx$ exprime la probabilité d'avoir m, A & n, N . La probabilité d'avoir m, A & n, N , la probabilité de A étant prise depuis 1 jusqu'à a , fera $\int_0^a \frac{x^m \cdot (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m \cdot (1-x)^n dx}$, cette fonction exprimant l'intégrale prise depuis 1 jusqu'à a . La probabilité que celle de A

n'est pas au-dessous de a , fera donc $\frac{\int_0^a x^m \cdot (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m \cdot (1-x)^n dx}$.

& appelant M cette probabilité, on aura

$$M = \frac{n \cdot n - 1 \cdot \dots \cdot 1}{(m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+n+1)} \cdot \frac{\frac{1}{m+1} a^{m+1} \cdot (1-a)^n + \frac{n}{(m+1) \cdot (m+2)} a^{m+2} \cdot (1-a)^{n-1} \cdot \dots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{(m+1) \cdot (m+2) \cdot \dots \cdot (m+n+1)} a^{m+n+1} \cdot (1-a)^0}{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1}{m+1 \cdot m+2 \cdot \dots \cdot m+n+1}}$$

2.° La probabilité que celle de A est au-dessus de

$$\frac{m+n}{n} + a, \text{ fera exprimée par } \frac{\int_0^{\frac{m}{m+n} + a} x^m \cdot (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m \cdot (1-x)^n dx}, \text{ \& celle}$$

$$\text{qu'elle est au-dessus de } \frac{m}{m+n} - a, \text{ par } \frac{\int_0^{\frac{m}{m+n} - a} x^m \cdot (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m \cdot (1-x)^n dx};$$

& la valeur de la probabilité que celle de A est entre ces deux limites, par la différence de ces formules. Si donc on l'appelle M , on aura

$$M =$$

$$M = \frac{1}{m+1} \left[\left(\frac{m}{m+n} + a \right)^{m+1} \left(\frac{n}{m+n} - a \right)^n - \left(\frac{m}{m+n} - a \right)^{m+1} \left(\frac{n}{m+n} + a \right)^n \right] \\ + \frac{n}{(m+1) \cdot (m+2)} \left[\left(\frac{m}{m+n} + a \right)^{m+2} \left(\frac{n}{m+n} - a \right)^{n-1} - \left(\frac{m}{m+n} - a \right)^{m+2} \left(\frac{n}{m+n} + a \right)^{n-1} \right] \\ \dots + \frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots (m+n+1)} \left[\left(\frac{m}{m+n} + a \right)^{m+n+1} - \left(\frac{m}{m+n} - a \right)^{m+n+1} \right] \\ \frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots (m+n+1)}$$

3.° Si a est toujours la limite de la probabilité de l'évènement A , la probabilité que x n'est pas au-dessous de cette limite, sera exprimée par la valeur de M , article 1.° On aura donc une probabilité égale que celle d'amener l'évènement A n'est pas au-dessous de a .

4.° Il est clair, par la même raison, que la formule

$$M = \frac{1}{m+1} \left[\left(\frac{m+1}{m+n+2} + a \right)^{m+1} \left(\frac{n+1}{m+n+2} - a \right)^n - \left(\frac{m+1}{m+n+2} - a \right)^{m+1} \left(\frac{n+1}{m+n+2} + a \right)^n \right] \dots \\ - \frac{n}{m+n+2} \left[\left(\frac{m+1}{m+n+2} + a \right)^{m+2} \left(\frac{n+1}{m+n+2} - a \right)^{n-1} - \left(\frac{m+1}{m+n+2} - a \right)^{m+2} \left(\frac{n+1}{m+n+2} + a \right)^{n-1} \right] \\ \dots + \frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots m+n+1} \left[\left(\frac{m+1}{m+n+2} + a \right)^{m+n+1} - \left(\frac{m+1}{m+n+2} - a \right)^{m+n+1} \right] \\ \frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots (m+n+1)}$$

exprimera la probabilité que celle de l'évènement A est entre $\frac{m+1}{m+n+2} + a$ & $\frac{m+1}{m+n+2} - a$,

R E M A R Q U E.

Ces formules servent également à donner M en a ou a en M , mais cette dernière valeur seroit impossible à obtenir d'une manière rigoureuse; cependant on peut observer que l'on peut toujours, au moins après quelques tâtonnemens, avoir une équation

$$M = \frac{1}{m+1} \left[(b+a)^{m+1} (1-b-a)^n - (b-a)^{m+1} (1-b'+a)^n \right] \\ + \frac{n}{(m+1) \cdot (m+2)} \left[(b+a)^{m+2} (1-b-a)^{n-1} - (b-a)^{m+2} (1-b'+a)^{n-1} \right] \\ \dots + \frac{n \cdot (n-1) \dots \dots \dots 1}{(m+1) \cdot (m+2) \dots \dots (m+n+1)} \left[(b+a)^{m+n+1} - (b-a)^{m+n+1} \right], \\ \text{A a}$$

où a est très-petit par rapport à b , $1 - b$, b' , $1 - b'$, quantités connues; on en tirera une équation ordonnée par rapport à a , de laquelle il sera aisé d'obtenir, sans un calcul très-complicé, une valeur approchée de cette quantité.

P R O B L È M E V I.

En conservant les mêmes données, on propose les mêmes questions pour le cas où la probabilité n'est pas constante.

SOLUTION. 1.° Dans ce cas, la probabilité d'avoir m, A & N, n , est $\frac{m+n}{n} \int (x \partial x)^m \int [(1-x) \partial x]^n = \frac{m+n}{n} \frac{1}{2^{m+n}}$; & la probabilité d'avoir m, A & n, N , si la probabilité de A est depuis 1 jusqu'à a , sera $\frac{m+n}{m} (\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2})^m (\frac{1}{2} - a + \frac{a^2}{2})^n$. La probabilité que celle de A est toujours contenue entre ces limites, sera donc $\frac{(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2})^m (\frac{1}{2} - a + \frac{a^2}{2})^n}{\frac{1}{2^{m+n}}} = (1 - a^2)^m (1 - 2a + a^2)^n$.

Mais si on veut connoître la probabilité qu'elle a été toujours plutôt au-dessus qu'au-dessous de cette limite, alors cette

$$\begin{aligned} \text{probabilité sera exprimée par } & \frac{(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2})^m (\frac{1}{2} - a + \frac{a^2}{2})^n}{(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2})^m (\frac{1}{2} - a + \frac{a^2}{2})^n + (\frac{a^2}{2})^m (a - \frac{a^2}{2})^n} \\ & = \frac{(1 - a^2)^m (1 - 2a + a^2)^n}{(1 - a^2)^m (1 - 2a + a^2)^n + a^{2m} (2a - a^2)^n} \end{aligned}$$

2.° Soient $b + a$ & $b - a$ les limites de la probabilité

de A , celle qu'elle sera constamment entre ces limites, sera exprimée par

$$\frac{\left[\frac{(b+a)^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2} \right]^m \left[a+b - \frac{(a+b)^2}{2} - (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \right]^n}{2^{m+n}};$$

& celle qu'elle y sera plutôt renfermé que constamment au-dessus ou constamment au-dessous, sera exprimée par

$$\frac{\left[\frac{(b+a)^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2} \right]^m \left[a+b - \frac{(a+b)^2}{2} - (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \right]^n}{\left[\frac{(b+a)^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2} \right]^m \left[a+b - \frac{(a+b)^2}{2} - (b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \right]^n + \left[\frac{(b+a)^2}{2} \right]^m \left[\frac{1}{2} - (b+a) + \frac{(b+a)^2}{2} \right]^n + \left[\frac{(b-a)^2}{2} \right]^m \left[b-a - \frac{(b-a)^2}{2} \right]^n}$$

3.° La probabilité que celle de l'évènement A est entre x

& a , sera exprimée ici par $\frac{\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 - a^2$.

4.° La probabilité qu'elle sera entre $b+a$ & $b-a$,

sera exprimée par $\frac{\frac{(b+a)^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2}}{\frac{1}{2}} = (b+a)^2 - (b-a)^2$.

R E M A R Q U E.

Nous n'examinerons pas ici en détail le cas qui résulte de la combinaison des deux précédens; on voit qu'il faudroit seulement multiplier la probabilité qui a été trouvée, *Problèmes V & VI*, par la probabilité que chaque hypothèse a lieu, comme on l'a fait, *Problème III*.

P R O B L È M E VII.

Supposant qu'un évènement A est arrivé m fois, & qu'un A a ij

évènement N est arrivé n fois, on demande la probabilité que l'évènement A dans q fois arrivera $q - q'$ fois, & l'évènement N , q' fois.

SOLUTION. La probabilité de l'évènement A étant x , & celle de l'évènement N , $1 - x$, la probabilité d'amener $(q - q')$, A , & q' , N après m , A & n , N , sera $\frac{m+n}{n} \frac{q}{q'} x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{n+q'}$; & celle d'amener toutes les autres combinaisons possibles en q coups, sera $\frac{m+n}{n} x^m \cdot (1-x)^n$. Donc puisque x peut, par l'hypothèse, avoir également toutes les valeurs depuis l'unité jusqu'à zéro, la probabilité d'avoir $(q - q')$, A & q' , N , sera exprimée par

$$\frac{\frac{m+n}{n} \frac{q}{q'} \int x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{n+q'} dx}{\frac{m+n}{n} \int x^m (1-x)^n dx} = \frac{q}{q'} \frac{\int x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{n+q'} dx}{\int x^m \cdot (1-x)^n dx}$$

$$= \frac{q}{q'} \frac{(n+1) \dots (n+q) \times (m+1) \dots (m+q-q')}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)}$$

REMARQUE.

Il suit de ce que nous venons de dire, que les probabilités d'avoir q , A ; $(q - 1)$, A & 1 , N ; $(q - 2)$, A & 2 , N ; $(q - 3)$, A & 3 , N $(q - q')$, A & q' , N
 2 , A & $(q - 2)$, N ; 1 , A & $(q - 1)$, N , ou enfin q , N , seront exprimées par la suite des termes

$$\frac{(m+1) \dots (m+q)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)}; q \cdot \frac{(n+1)(m+1) \dots (m+q-1)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)}$$

$$\frac{q}{2} \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (m+1) \dots (m+q-2)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)} \dots \dots \dots$$

$$\frac{q}{q'} \frac{(n+1) \dots (n+q) \times (m+1) \dots (m+q-q)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)} \dots$$

$$\frac{q}{2} \frac{(n+1) \dots (n+q-2) \times (m+1) \dots (m+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)} ;$$

$$q \cdot \frac{(n+1) \dots (n+q-1) \times (m+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)} ; \frac{(n+1) \dots (n+q)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)} ;$$

& la somme de tous ces termes, quels que soient m, n & q , doit être égale à l'unité, en sorte que l'on aura en général,

$$\frac{(m+1) \dots (m+q)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)} + q \cdot \frac{(n+1) \dots (m+q-1)}{m+n+2 \dots m+n+q+1}$$

$$+ \frac{q}{2} \frac{(n+1) \dots (n+2) \dots (m+1) \dots (m+q-2)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)},$$

$$+ \frac{q}{3} \frac{(n+1) \dots (n+2) \dots (n+3) \dots (m+1) \dots (m+q-3)}{m+n+2 \dots m+n+q+1} \dots$$

$$+ \frac{q}{2} \frac{(m+1) \dots (m+2) \dots (n+1) \dots (n+q-2)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)}$$

$$+ q \cdot \frac{(m+1) \dots (n+1) \dots (n+q-2)}{(m+n+2) \dots (m+n+q+1)}$$

$$+ \frac{n+1 \dots n+q}{m+n+2 \dots m+n+q+1} = 1.$$

PROBLÈME VIII.

On demande dans la même hypothèse, 1.° le nombre des évènements futurs étant $2q + 1$, la probabilité que le nombre des évènements N ne surpassera pas de $2q' + 1$ le nombre des évènements A ; 2.° la probabilité que le nombre des évènements A surpassera de $2q' + 1$ le nombre des évènements N .

SOLUTION. 1.° Soit V^q la probabilité cherchée, on aura, par le Problème précédent;

$$V^q = \frac{(m+1) \dots (m+2q+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}$$

$$\begin{aligned}
 &+ (2q+1) \cdot \frac{(n+1) \cdot (m+1) \dots (m+2q)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)} \\
 &+ \frac{2q+1}{2} \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot m+1 \dots m+2q-1}{m+n+2 \dots m+n+2q+2} \dots \\
 &+ \frac{2q+1}{q+q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+1) \times (n+1) \dots (n+q+q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}
 \end{aligned}$$

Par la même raison, nous aurons

$$\begin{aligned}
 V^{q+1} &= \frac{(m+1) \dots (m+2q+3)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)} \\
 &+ (2q+3) \cdot \frac{(n+1) \cdot (m+1) \dots (m+2q+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)} \\
 &+ \frac{2q+3}{2} \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (m+1) \dots (m+2q+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)} \dots \\
 &+ \frac{2q+3}{q+q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+2) \times (n+1) \dots (n+q+q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}
 \end{aligned}$$

Cela posé, nous observerons, 1.^o que V ne changera pas de valeur si on multiplie son premier terme par une fonction

$$\begin{aligned}
 &\frac{(m+2q+2) \cdot (m+2q+3)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} + \frac{2 \cdot (m+2q+2) \cdot (n+1)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} \\
 &+ \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} ;
 \end{aligned}$$

son second terme par une fonction

$$\begin{aligned}
 &\frac{(m+2q+1) \cdot (m+2q+2)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} + \frac{2 \cdot (m+2q+1) \cdot (n+2)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} \\
 &+ \frac{(n+2) \cdot (n+3)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} ;
 \end{aligned}$$

son troisième terme par une fonction

$$\begin{aligned}
 &\frac{(m+2q) \cdot (m+2q+1)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} + \frac{2 \cdot (m+2q) \cdot (n+3)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} \\
 &+ \frac{(n+3) \cdot (n+4)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} ;
 \end{aligned}$$

& un terme quelconque

$$\frac{2q+1}{r} \frac{(m+1) \dots (m+2q+1-r) \times (n+1) \dots (n+r)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}$$

par une fonction $\frac{(m+2q+2-r) \cdot (m+2q+3-r)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)}$
 $+ \frac{(u+r+1) \cdot (m+2q+2-r)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} + \frac{(n+r+1) \cdot (n+r+2)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)}$,
 puisque chacune de ces fonctions est égale à l'unité.

2.° On observera également que si on multiplie le terme $\frac{2q+1}{r} \frac{(m+1) \dots (m+2q+1-r) \times (n+1) \dots (n+r)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}$

par $\frac{(m+2q+2-r) \cdot (m+2q+3-r)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)}$, le terme précédent $\frac{2q+1}{r-1} \frac{(m+1) \dots (m+2q+2-r) \times (n+1) \dots (n+r-1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}$

par $\frac{2 \cdot (m+2q+3-r) \cdot (n+r)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)}$, & le terme qui précède ce dernier, & qui est

$\frac{2q+1}{r-2} \frac{(m+1) \dots (m+2q+3-r) \times (n+1) \dots (n+r-2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}$

par $\frac{(n+r-1) \cdot (n+r)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)}$, la somme de ces trois termes ainsi multipliés, sera égale au terme correspondant de V^{q+1} , $\frac{2q+3}{r} \frac{(m+1) \dots (m+n+2q+3-r) \times (n+1) \dots (n+r)}{m+n+2 \dots m+n+2q+4}$;

d'où l'on conclura que V^{q+1} & V^q multiplié ainsi par des fonctions égales à l'unité, ne différeront que par leurs derniers termes.

Multipliant donc le dernier terme de V , ou

$\frac{2q+1}{q+q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+1) \times (n+1) \dots (n+q+q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}$

par $\frac{(m+q-q'+2) \cdot (m+q-q'+3)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)} + \frac{2 \cdot (m+q-q'+2) \cdot (n+q+q'+1)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)}$
 $+ \frac{(n+q+q'+1) \cdot (n+q+q'+2)}{(m+n+2q+3) \cdot (m+n+2q+4)}$, on trouvera que le terme

$\frac{2q+1}{p+q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+1) \times (n+1) \dots (n+q+q'+2)}{m+n+2 \dots m+n+2q+4}$

ne doit pas entrer dans V^{q+1} .

Mais on trouvera de même que le terme

$$\frac{2q+1}{q+q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q-q') \times (n+1) \dots (n+q+q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}$$

qui, multiplié par $\frac{(m+q-q'+1) \cdot (n+q-q'+2)}{m+n+2q+3 \cdot m+n+2q+4}$, doit entrer dans la formation de V^{q+2} , n'entre pas dans celle de V^q . Nous aurons donc

$$V^{q+1} - V^q = \frac{2q+1}{q+q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+2) \times (n+1) \dots (n+q+q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}$$

$$- \frac{2q+1}{q+q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+1) \times (n+1) \dots (n+q+q'+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}$$

Nous aurons donc la différence de V^{q+2} à V^q égale à

$$\frac{2q+1}{q+q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+1) \times (n+1) \dots (n+q+q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}$$

$$\left[\frac{q-q'+1}{q+q'+1} \cdot (m+q-q'+2) - (n+q+q'+2) \right],$$

& par conséquent nous aurons

$$V^q = 1 - \frac{(n+1) \dots (n+2q'+1)}{m+n+2 \dots m+n+2q'+2} + (2q'+1) \frac{(m+1)}{m+n+2}$$

$$+ \frac{(n+1) \dots n+2q'+1}{m+n+2 \dots m+n+2q'+4} \left[\frac{1}{2q'+1} (m+2) - (n+2q'+2) \right]$$

$$+ \frac{2q'+3}{2} \frac{(m+1) \cdot (m+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q'+6)}$$

$$\left[\frac{2}{2q'+2} \cdot (m+3) - (n+2q'+3) \right] \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{2q'+5}{3} \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q'+8)}$$

$$\left[\frac{3}{2q'+3} (m+4) - (n+2q'+4) \right] \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots + \frac{2q-1}{q-q'+1} \frac{m+1 \dots m+q-q' \times n+1 \dots n+q+q'}{m+n+2 \dots m+n+2q+2}$$

$$\left[\frac{q-q'}{q+q'} (m+q-q'+1) - (n+q+q'+1) \right],$$

formule analogue à celle de la page 15, & qui s'y réduit en supposant m & n infinis par rapport à q , & $v = \frac{m}{m+n}$.

$$e = \frac{n}{m+n}.$$

Il suit de cette formule, que la quantité V^q sera croissante à tous les termes où l'on aura $mq - 2qq' - (m+1) \cdot q' > nq + 2qq' + (n+1) \cdot q'$, & décroissante lorsque $mq - 2qq' - (m+1) \cdot q' < nq + 2qq' + (n+1) \cdot q'$. Si l'on suppose $q = \frac{1}{5}$, la condition précédente se réduit à $(m - 2q')q \gtrless (n + 2q')q$, ou $m - 2q' \gtrless n + 2q'$, & par conséquent la série qui donne la valeur de V , finira par être continuellement croissante dans le premier cas, & décroissante dans le second. Elle deviendra donc continuellement croissante si $m > n + 4q'$, & décroissante dans le cas contraire. Si on suppose que m & n soient infinis par rapport à q' , la condition se réduit à $m \gtrless n$, ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé, première Partie, seconde hypothèse.

2.° Nous aurons

$$\begin{aligned}
 V^q &= \frac{(m+1) \dots (m+2q+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)} \\
 &+ (2q+1) \cdot \frac{(m+1) \dots (m+2q) \cdot (m+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)} \\
 &+ \frac{2q+1}{2} \frac{(m+1) \dots (m+2q-1) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)} \\
 &\dots + \frac{2q+1}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+1) \times (n+1) \dots (n+q-q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}, \\
 \& V^{q+1} &= \frac{(m+1) \dots (m+2q+3)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)} \\
 &+ (2q+1) \cdot \frac{(m+1) \dots (m+2q+2) \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)} \\
 &+ \frac{2q+3}{2} \frac{(m+1) \dots (m+2q+1) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)} \\
 &\dots + \frac{2q+3}{q-q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+2) \times (n+1) \cdot (n+q-q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}.
 \end{aligned}$$

& si nous multiplions terme à terme V^q par des fonctions du second degré égales à l'unité, afin de le pouvoir comparer à V^{q+1} , nous trouverons 1.° que le terme

$$\frac{2q+1}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+1) \times (n+1) \dots (n+q-q'+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)},$$

qui entre dans les produits dont la somme est égale à V'^q , ne doit pas entrer dans V'^{q+1} ; 2.° que réciproquement le terme

$$\frac{2q+1}{q-q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+2) \times (n+1) \dots (n+q-q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)},$$

qui doit entrer dans les produits qui forment V'^{q+1} , provient d'un terme qui n'entre pas dans V'^q . Nous aurons donc

$$V'^{q+1} - V'^q = \frac{2q+1}{q-q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+2) \times (n+1) \dots (n+q-q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}$$

$$- \frac{2q+1}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+1) \times (n+1) \dots (n+q-q'+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}$$

$$= \frac{2q+1}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+1) \times (n+1) \dots (n+q-q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+4)}$$

$$\left[\frac{q+q'+1}{q-q'+1} (m+q+q'+2) - (n+q-q'+1) \right];$$

$$\text{d'où nous tirerons } V'^q = \frac{(m+1) \dots (m+2q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q'+2)}$$

$$+ \frac{(m+1) \dots (m+2q'+1) \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q'+4)}$$

$$\left[(2q'+1) \cdot (m+2q'+2) - (n+2) \right]$$

$$+ (2q'+1) \frac{(m+1) \dots (m+2q'+2) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q'+6)} \times$$

$$\left[\frac{2q'+2}{2} \cdot (m+2q'+3) - (n+3) \right] \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{2q-1}{q-q'-1} \frac{(m+1) \dots (m+q+q') \times (n+1) \dots (n+q-q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}$$

$$\left[\frac{q+q'}{q-q'} (m+q+q'+1) - (n+q-q'+1) \right],$$

formule analogue à celle de la page 21, & s'y réduit lorsque m & n sont infinis, en faisant $\frac{m}{m+n} = v$, & $\frac{n}{m+n} = c$.

La formule précédente sera croissante pour tous les termes où l'on aura $mq + 2qq' + (m+1) \cdot q' > nq - 2qq' - (n+1) \cdot q'$,

& décroissante pour tous ceux où l'on aura $mq + 2qq' + (m + 1) \cdot q' < nq - 2qq' - (n + 1) \cdot q'$. Si on suppose $q = \frac{1}{5}$, les deux conditions précédentes se réduisent à $m + 2q' \geq n - 2q'$, ou $m \geq n - 4q'$. Ainsi lorsque $m > n + 4q'$, V & V' vont tous deux continuellement en croissant lorsque q augmente au-delà d'une certaine limite.

Lorsque $m < n + 4q'$ & $m > n - 4q'$, au bout d'une certaine limite, on aura V' croissant continuellement, & V au contraire décroissant continuellement; lorsque $m < n - 4q'$, V & V' finiront par être continuellement décroissans; d'où il est aisé de conclure que V ou V' ne peuvent être égaux à l'unité, puisqu'ils ne sont qu'égaux à l'unité moins une formule qui ne peut être nulle.

On aura dans le cas de $q = \frac{1}{5}$, $V^{\frac{1}{5}} = V'^{\frac{1}{5}} =$

$$\frac{\int [x^m / (1-x)^n] dx}{\int [x^m \cdot (1-x)^n] dx}, \text{ ce qui s'accorde avec ce qui a été trouvé}$$

dans la première Partie, seconde hypothèse, lorsque m & n sont infinis.

R E M A R Q U E I.

L'analogie de ces formules avec celles de la première Partie, auxquelles elles deviennent semblables dans le cas de m & n infinis, montre qu'elles peuvent être employées non-seulement lorsque la valeur de v & de e est donnée à priori, mais aussi lorsque leur valeur moyenne a été déterminée d'après un grand nombre d'expériences. Dans ce cas, substituant $\frac{m}{m+n}$ à v , & $\frac{n}{m+n}$ à e , ou plutôt $\frac{m+1}{m+n+2}$ à v , & $\frac{m+1}{m+n+2}$ à e , on pourra, si q n'est pas très-grand, employer les formules de la première Partie au lieu de celles de ce Problème.

Bb ij

R E M A R Q U E II.

La probabilité d'avoir A , $(q + q' + 1)$ fois, & N , $(q - q')$ fois, est exprimée ici par

$$\frac{2q+1}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+1) \times (n+1) \dots (n+q-q')}{m+n+2 \dots m+n+2q+2}, \text{ \& celle}$$

d'avoir N , $(q + q' + 1)$ fois, & A , $q - q'$ fois, par

$$\frac{2q+1}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q') \times (n+1) \dots (m+q+q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+2)}. \text{ Donc}$$

si on fait qu'un des deux évènements est arrivé $2q' + 1$ fois plus que l'autre, la probabilité que c'est plutôt l'évènement A que l'évènement N , sera

$$\frac{(m+q-q'+1) \dots (m+q+q'+1)}{(m+q-q'+1) \dots (m+q+q'+1) + (n+q-q'-1) \dots (n+q+q'+1)}.$$

Dans la première Partie nous avons trouvé la quantité corres-

pondante exprimée par $\frac{v^{2q'+1}}{v^{2q'+1} + e^{2q'+1}}$, & l'on peut substituer

l'une à l'autre, lorsque m , n & q sont très-grands par rapport

à q' , en faisant $v = \frac{m+q}{m+n+2q}$ & $e = \frac{n+q}{m+n+2q}$.

R E M A R Q U E III.

Nous aurons donc ici les différentes formules analogues à celles de la première Partie; & on trouve également que, pourvu que m surpasse n de $4q'$, on pourra prendre q tel que l'on ait une probabilité toujours croissante, de n'avoir pas une pluralité $2q' + 1$ en faveur de l'évènement N , & même d'avoir une pluralité $2q' + 1$ en faveur de l'évènement A ; mais que cette probabilité a des limites dépendantes de la valeur de m & n .

On trouvera aussi que, pourvu que m surpasse n , on pourra avoir une probabilité telle qu'on voudra que l'évènement qui a une pluralité $2q' + 1$, est A plutôt que N . Il suffit pour cela d'augmenter suffisamment $2q' + 1$.

PROBLÈME IX.

Nous supposons ici seulement que le nombre des Votans est $2q$, & la pluralité $2q'$, & qu'on demande V & V' comme dans le Problème précédent.

SOLUTION. Nous aurons ici,

$$\begin{aligned}
 1.^{\circ} V^q &= \frac{(m+1) \dots (m+2q)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)} + 2q' \frac{(m+1) \dots (m+2q-1) \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)} \dots \\
 &+ \frac{2q}{q-q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+1) \times (n+1) \dots (n+q+q'-1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)}, \\
 V^{q+1} &= \frac{(m+1) \dots (m+2q+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} + (2q+2) \cdot \frac{(m+1) \dots (m+2q+1) \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} \dots \\
 &+ \frac{2q+2}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+2) \times (n+1) \dots (n+q+q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)}, \\
 \& V^{q+1} - V^q &= \frac{2q}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+2) \times (n+1) \dots (n+q+q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} \\
 &- \frac{2q}{q-q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+1) \times (n+1) \dots (n+q+q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} \\
 &= \frac{2q}{q-q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q-q'+1) \times (n+1) \dots (n+q+q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} \\
 &\times \left[\left(\frac{q-q'+1}{q+q'} \right) \cdot (m+q-q'+2) - (n+q+q'+1) \right].
 \end{aligned}$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
 V^q &= 1 - \frac{(n+1) \dots (n+2q)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)} + 2q' \cdot \frac{(m+1) \cdot (n+1) \dots (n+2q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} \\
 &\times \left[\frac{1}{2q'} (m+2) - (n+2q'+1) \right] \\
 &+ \frac{2q'+2}{2} \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (n+1) \dots (n+2q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q'+5)} \left[\frac{2}{2q'+1} (m+3) - (n+2q'+2) \right] \dots \\
 &+ \frac{2q-2}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q-q') \times (n+1) \dots (n+q+q'-1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)} \\
 &\times \left[\frac{q-q'}{q+q'-1} (m+q-q'+1) - (n+q+q') \right].
 \end{aligned}$$

Cette série ira en croissant tant que $(m - 2q' + 1) \cdot q - (m + 1) \cdot q' > (n + 2q' - 1) \cdot q + (n - 1) \cdot q'$, & en décroissant lorsque $(m - 2q' + 1) \cdot q - (m + 1) \cdot q' < (n + 2q' - 1) \cdot q + (n - 1) \cdot q'$, expression qui, si on suppose $q = \frac{1}{2}$, se réduit à $m - 2q' + 1 \gtrless n + 2q' - 1$, ou $m \gtrless n + 4q' - 2$.

2.° Nous aurons de même

$$V^{1q} = \frac{(m+1) \dots (m+2q)}{m+n+2 \dots m+n+2q+1} + 2q \cdot \frac{(m+1) \dots (m+q+q') \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)} \dots$$

$$+ \frac{2q}{q-q'} \cdot \frac{(m+1) \dots (m+q+q') \times (n+1) \dots (n+q-q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)}$$

$$V^{1q+1} = \frac{(m+1) \dots (m+2q+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} + (2q+2) \cdot \frac{(m+1) \dots (m+2q+1) \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} \dots$$

$$+ \frac{2q+2}{q-q'+1} \cdot \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+1) \times (n+1) \dots (n+q-q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)} ;$$

Nous aurons par conséquent,

$$V^{1q+1} - V^{1q} = \frac{2q}{q-q'+1} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'+1) \times (n+1) \dots (n+q-q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)}$$

$$- \frac{2q}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q+q') \times (n+1) \dots (n+q-q'+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)}$$

$$= \frac{2q}{q-q'} \frac{(m+1) \dots (m+q+q') \times (n+1) \dots (n+q-q'+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)}$$

$$\times \left[\frac{q+q'}{q-q'+1} (m+q+q'+1) - (n+q-q'+2) \right].$$

$$\& V^{1q} = \frac{(m+1) \dots (m+2q)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)} + \frac{(m+1) \dots (m+2q') \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+3)}$$

$$[2q'(m+2q'+1) - (n+2)] + (2q'+2)$$

$$\cdot \frac{(m+1) \dots (m+2q'+1) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+2q'+5)} \left[\frac{2q'+1}{2} (m+2q'+2) - (n+3) \right]$$

$$\dots \frac{2q-2}{q-q'-1} \frac{(m+1) \dots (m+q+q'-1) \times (n+1) \dots (n+q-q')}{(m+n+2) \dots (m+n+2q+1)}$$

$$\left[\frac{q+q'-1}{q-q'} (m+q+q') - (n+q-q'+1) \right].$$

Cette formule sera toujours croissante tant que $(m + 2q' - 1)q + m(q' - 1) > (n - 2q' + 1)q - nq'$, & décroissante lorsque $(m + 2q' - 1)q + m(q' - 1) < (n - 2q' + 1)q - nq'$, condition qui, dans le cas de $q = \frac{1}{2}$, se réduit à $m + 2q' - 1 \geq n - 2q' + 1$, ou $m \geq n - 4q' + 2$, & nous en concluons, comme ci-dessus, que ni V ni V' ne peuvent approcher indéfiniment de l'unité, & que lorsque $q = \frac{1}{2}$, on aura $V^{\frac{1}{2}} = V'^{\frac{1}{2}} =$

$$\frac{\int [x^m (1-x)^n dx]}{\int [x^m \cdot (1-x)^n dx]}$$

REMARQUE.

Si l'on fait que l'un des évènements est arrivé $2q'$ fois plus que l'autre, la probabilité que c'est l'évènement A sera exprimée par $\frac{(m+q-q'+1) \dots (m+q+q')}{(m+q-q'+1) \dots (m+q+q'+1) + (n+q-q'+1) \dots (n+q+q')}$, d'où l'on tirera les mêmes conséquences que dans l'article précédent.

PROBLÈME X.

On demande, tout le reste étant le même, la probabilité que sur $3q$ évènements, 1.^o N n'arrivera pas plus souvent que A un nombre q de fois, 2.^o que A arrivera plus souvent que N un nombre q de fois.

SOLUTION. 1.^o Nous aurons ici

$$V^q = \frac{(m+1) \dots (m+3q)}{m+n+2 \dots m+n+3q+1} + 3q \frac{(m+1) \dots (m+3q-1) \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+1)}$$

$$+ \frac{3q}{2} \cdot \frac{(m+1) \dots (m+3q-2) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+1)} \dots$$

$$+ \frac{3q}{q+1} \cdot \frac{(m+1) \dots (m+q+1) \cdot (n+1) \dots (n+2q-1)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+1)}$$

$$V^{q+1} = \frac{(m+1) \dots (m+3q+3)}{(m+n+1) \dots (m+n+3q+4)} + (3q+3) \cdot \frac{(m+1) \dots (m+3q+2) \cdot (n+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+4)}$$

$$+ \frac{3q+3}{2} \cdot \frac{(m+1) \dots (m+3q+1) \cdot (n+3) \cdot (n+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+4)} \dots$$

$$+ \frac{3q+3}{q+2} \cdot \frac{(m+1) \dots (m+q+2) \cdot (n+1) \dots (n+2q+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+4)}$$

On observera ensuite que si on multiplie le premier terme de V par la fonction

$$\frac{(m+3q+1) \cdot (m+3q+2) \cdot (m+3q+3)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(m+3q+1) \cdot (m+3q+2) \cdot (n+1)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(m+3q+1) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

qui est égale à l'unité ;

le second terme par

$$\frac{(m+3q) \cdot (m+3q+1) \cdot (m+3q+2)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(m+3q) \cdot (m+3q+1) \cdot (n+2)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(m+3q) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ \frac{(n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

l'avant-dernier terme par

$$\frac{(m+q+3) \cdot (m+q+4) \cdot (m+q+5)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(m+q+3) \cdot (m+q+4) \cdot (n+2q-1)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ 3 \cdot \frac{(m+q+3) \cdot (n+2q-1) \cdot (n+2q)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

$$+ \frac{(n+2q-1) \cdot (n+2q) \cdot (n+2q+1)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

& le dernier terme par

$$\frac{(m+q+2) \cdot (n+q+3) \cdot (m+q+4)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)}$$

+ 3

$$\begin{aligned}
 &+ 3 \frac{(m+q+2) \cdot (m+q+3) \cdot (n+2q)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)} \\
 &+ 3 \cdot \frac{(m+q+2) \cdot (n+2q) \cdot (n+2q+1)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)} \\
 &+ \frac{(n+2q) \cdot (n+2q+1) \cdot (n+2q+2)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)} ;
 \end{aligned}$$

la valeur de V^q ne fera pas changée.

On observera de plus qu'un terme quelconque de la valeur de V^{q+1} , dont le coefficient soit $\frac{3^{q+3}}{r}$, fera égal au terme

de V^q , dont le coefficient est $\frac{3^q}{r}$, multiplié par

$$\frac{(m+3q-r+1) \cdot (m+3q-r+2) \cdot (m+3q-r+3)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)} ,$$

plus le terme dont le coefficient est $\frac{3^q}{r-1}$ multiplié par

$$3 \cdot \frac{(m+3q-r+2) \cdot (m+3q-r+3) \cdot (n+r)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)} ,$$

plus le terme dont le coefficient est $\frac{3^q}{r-2}$ multiplié par

$$3 \cdot \frac{(m+3q-r+3) \cdot (n+r-1) \cdot (n+r)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)} ,$$

plus enfin le terme dont le coefficient est $\frac{3^q}{r-3}$ multiplié par

$$\frac{(n+r-2) \cdot (n+r-1) \cdot (n+r)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)} .$$

Cela posé, on trouvera ; 1.^o que le terme $\frac{3^q}{q+1}$

$$\frac{(m+1) \cdot \dots \cdot (m+q+1) \times (n+1) \cdot \dots \cdot (n+2q-1)}{(m+n+2) \cdot \dots \cdot (m+n+3q+1)} \times \frac{(n+2q) \cdot (n+2q+1) \cdot (n+2q+2)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)} ,$$

qui fait partie de V^q , multiplié par les fonctions ci-dessus, n'entre point dans la valeur de V^{q+1} ; 2.^o que le terme

$$\frac{3^q}{q-1} \frac{(m+1) \cdot \dots \cdot (m+q-1) \times (n+1) \cdot \dots \cdot (n+2q+1)}{(m+n+2) \cdot \dots \cdot (m+n+3q+1)} \times$$

C c

$$\frac{(m+q) \cdot (m+q+1) \cdot (m+q+2)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)},$$
 le terme

$$\frac{3q}{q} \frac{(m+1) \dots (m+q) \times (n+1) \dots (n+2q)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+1)} \times$$

$$3 \cdot \frac{(m+q+1) \cdot (m+q+2) \cdot (n+2q+1)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)},$$
 enfin le terme

$$\frac{3q}{q} \frac{(m+1) \dots (m+q) \times (n+1) \dots (n+2q)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+1)} \times$$

$$\frac{(m+q+1) \cdot (m+q+2) \cdot (m+q+3)}{(m+n+3q+2) \cdot (m+n+3q+3) \cdot (m+n+3q+4)},$$
 qui entrent dans
 la formation de V^{q+1} , ne peuvent être contenus dans V^q .
 On aura donc

$$\begin{aligned}
 V^{q+1} - V^q &= \frac{3q}{q} \frac{(m+1) \dots (m+q+3) \times (n+1) \dots (n+2q)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+4)} \\
 &+ \left[3 \frac{3q}{q} + \frac{3q}{q-1} \right] \frac{(m+1) \dots (m+q+2) \times (n+1) \dots (n+2q+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+4)} \\
 &- \frac{3q}{q+1} \frac{(m+1) \dots (m+q+1) \times (n+1) \dots (n+2q+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+4)} \\
 &= \frac{3q}{q} \frac{(m+1) \dots (m+q+1) \times (n+1) \dots (n+2q)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+4)} \times \\
 &[(m+q+2) \cdot (m+q+3) + (3 + \frac{q}{2q+1} (m+q+2) \\
 &\cdot (n+2q+1) - \frac{2q}{q+1} (n+2q+1) \cdot (n+2q+2)];
 \end{aligned}$$

& par conséquent nous aurons,

$$\begin{aligned}
 V^q &= \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3)}{(m+n+2) \cdot (m+n+3) \cdot (m+n+4)} + 3 \cdot \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (n+1)}{(m+n+2) \cdot (m+n+3) \cdot (m+n+4)} \\
 &+ 3 \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(m+n+2) \dots (m+n+7)} [(m+3) \cdot (m+4) \\
 &+ (3 + \frac{1}{2}) (m+3) \cdot (n+3) - (n+3) \cdot (n+4)] \\
 &+ (\frac{6}{2}) \frac{(m+1) \dots (m+3) \times (n+1) \dots (n+4)}{(m+n+2) \dots (m+n+10)} \times \\
 &[(m+4) \cdot (m+5) + (3 + \frac{1}{2}) (m+4) \cdot (n+5) - \frac{1}{2} (n+5) \cdot (n+6)] \dots \\
 &+ \frac{3q-3}{q-1} \frac{(m+1) \dots (m+q) \times (n+1) \dots (n+2q-2)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+1)} \times \\
 &[(m+q+1) \cdot (m+q+2) + (3 + \frac{q-1}{2q-1}) (m+q+1) \cdot (n+2q-1) - \frac{2q-2}{q} (n+2q-1) \cdot (n+2q)] -
 \end{aligned}$$

En examinant cette valeur de V^q , on trouvera qu'elle sera croissante ou décroissante lorsque q augmente, selon que l'on aura

$$(m+q+1) \cdot (m+q+2) + \left(3q + \frac{q-1}{2q-1}\right) (m+q+1) \cdot (n+2q-1) \\ - \frac{2q-2}{q} (n+2q-1) \cdot (n+2q) > \text{ou} < 0.$$

Si $q = \frac{1}{2}$, la condition précédente devient $m \gtrless \frac{n}{2} - 2$; & dans le cas de m & n , aussi égaux à $\frac{1}{2}$, elle devient $m \gtrless \frac{n}{2}$, ce qui est conforme à ce qui a été trouvé dans la première Partie, page 29.

2.° On trouvera de même

$$V^{1q+2} - V^{1q} = \frac{3q}{q} \frac{(m+1) \dots (m+2q) \times (n+1) \dots (n+q+1)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+4)} \times \\ \left[\frac{2q}{q+1} (m+2q+1) \cdot (m+2q+2) - \left(3 + \frac{q}{2q+1}\right) (m+2q+1) \cdot (n+q+2) - (n+q+2) \cdot (n+q+3) \right] \\ V^{1q} = \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3)}{(m+n+2) \cdot (m+n+3) \cdot (m+n+4)} + 3 \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (m+3)}{(m+n+2) \cdot (m+n+3) \cdot (m+n+4)} \\ + 3 \frac{(m+1) \cdot (m+2) \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{m+n+2 \dots m+n+7} \times \\ [(m+3) \cdot (m+4) - \left(3 + \frac{1}{3}\right) (m+3) \cdot (n+3) - (n+3) \cdot (n+4)] \dots \\ + \frac{3q-3}{q-1} \frac{(m+1) \dots (m+2q-2) \times (n+1) \dots (n+q)}{(m+n+2) \dots (m+n+3q+1)} \times \\ \left[\frac{q-1}{2q-1} (m+2q-1) \cdot (m+2q) - \left(3 + \frac{2q-2}{q}\right) (m+2q-1) \cdot (n+q+1) - (n+q+1) \cdot (n+q+2) \right].$$

La série qui exprime V^{1q} sera donc croissante ou décroissante, selon que l'on aura $\frac{2q-2}{q} (m+2q-1) \cdot (m+2q) - \left(3 + \frac{q-1}{2q-1}\right) (m+2q-1) \cdot (n+q+1) - (n+q+1) \cdot (n+q+2) \gtrless 0$, & dans le cas de $q = \frac{1}{2}$, $m \gtrless 2n+4$; & si m & n sont $\frac{1}{2}$, $m \gtrless 2n$, ce qui s'accorde avec ce qui a été trouvé dans la première Partie.

$$\text{Si } q = \frac{1}{2}, V^{\frac{1}{2}} = \frac{\int [x^m \cdot (1-x)^n \partial x]}{\int [x^m \cdot (1-x)^n \partial x]} \quad V'^{\frac{1}{2}} = \frac{\int [x^m (1-x)^n \partial x]}{\int [x^m \cdot (1-x)^n \partial x]}$$

R E M A R Q U E I.

Si on fait que pour un nombre d'événemens $3q$, un des évènements A & N est arrivé $2q$ fois, & l'autre q fois, la probabilité que c'est l'évènement A qui est arrivé $2q$ fois, sera exprimée par $\frac{(m+q+1) \dots (m+2q)}{(m+q+1) \dots (m+2q) + (n+q+1) \dots (n+2q)}$.

R E M A R Q U E II.

Nous ne continuerons pas cette recherche plus long-temps. On voit en effet qu'en général les V & les V' , au lieu de devenir $1, \frac{1}{2}, 0$, comme dans la première Partie, deviennent

de la forme $\frac{\int [x^m \cdot (1-x)^n] \partial x}{\int [x^m \cdot (1-x)^n] \partial x}$, a étant le rapport du nombre

des voix en faveur de A au nombre total qui doit avoir lieu dans l'hypothèse lorsque $q = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}$ si la pluralité est constante, $\frac{2}{3}$ pour $V'^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{1}{3}$ pour $V^{\frac{1}{2}}$, si la pluralité est d'un tiers, $\frac{3}{4}$ pour $V'^{\frac{1}{2}}$, & $\frac{2}{4}$ pour $V^{\frac{1}{2}}$, si la pluralité est d'un quart; toutes formules qui lorsque m & n sont $\frac{1}{2}$, rentrent dans celles de la première Partie. On aura toutes les formules dont on aura besoin pour tous les cas que l'on voudra considérer, en substituant dans celles de la première Partie, pour $v^r e^{r'}$, la fonction

$$\frac{(m+1) \dots (m+r) \times (n+1) \dots (n+r)}{(m+n+2) \dots (m+n+r+r'+1)}$$

P R O B L È M E X I.

La probabilité étant supposée n'être pas constante comme dans le Problème second, on demande 1.° la probabilité d'avoir sur q évènements, $q - q'$ évènements A , & q' évènements N ; 2.° la probabilité que sur $2q + 1$ évènements,

N n'arrivera pas un nombre $2q' + 1$ de fois plus souvent que A ; 3.° la probabilité que A arrivera un nombre $2q' + 1$ de fois plus souvent que N .

SOLUTION. 1.° La probabilité que A arrivera $q - q'$ fois, & N , q' fois, sera exprimée par $\frac{q}{q'} \frac{\int (x \partial x)^{m+q-q'} \int [(1-x) \cdot \partial x]^{n+q'}}{\int (x \partial x)^m \cdot \int [(1-x) \cdot \partial x]^n} = \frac{q}{q'} \frac{1}{2}$.

2.° La probabilité que l'évènement N n'arrivera pas $2q' + 1$ fois plus souvent que A , sera donc exprimée par la valeur de V^q , première Partie, page 15, en y faisant $v = e = \frac{1}{2}$.

3.° La probabilité que le nombre des évènements A surpassera celui des évènements N de $2q' + 1$ fois, sera, par la même raison, égale à la valeur de V^q , première Partie, page 21, en y faisant de même $v = e = \frac{1}{2}$.

REMARQUE.

Il est aisé de voir que si on suppose que l'on ignore laquelle des deux hypothèses a lieu, il faudra, dans ces différentes questions, multiplier la probabilité que donne chaque hypothèse par la probabilité qu'elle a lieu. Voyez Problème III. On sent que les mêmes conclusions ont lieu pour toutes les hypothèses de pluralité.

PROBLÈME XII.

On suppose que la probabilité d'un des évènements est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, & celle de l'autre depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro, & on demande dans cette hypothèse;

1.° La probabilité que A arrivera $q - q'$ fois dans q évènements, & N , q' fois; ou que l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, arrivera $q - q'$ fois, & celui dont la probabilité est depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro, q' fois.

2.° La probabilité que sur $2q + 1$ évènements, N n'arrivera

point $2q' + 1$ fois plus souvent que A ; ou que l'évènement dont la probabilité est depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro, n'arrivera pas $2q' + 1$ fois plus souvent que l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$.

3.° La probabilité que sur $2q + 1$ évènements, l'évènement A arrivera $2q' + 1$ fois plus que N ; ou que l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, arrivera $2q' + 1$ fois plus souvent que celui dont la probabilité est depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro.

SOLUTION. 1.° Si la probabilité de A est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, celle de $q - q'$ évènements A , & de q' évènements N ,

sera exprimée par $\frac{q}{q'} \frac{\int \frac{[x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{m+q'} \partial x]^{\frac{1}{2}}}{\int \frac{[x^m \cdot (1-x)^m \partial x]^{\frac{1}{2}}}$; si au con-

traire la probabilité de A est depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro, celle de

$(q - q') A$, & de q' , N , sera exprimée par $\frac{\int \frac{[x^{q-q'} \cdot (1-x)^{m+q-q'} \partial x]^{\frac{1}{2}}}{\int \frac{[(1-x)^m \cdot x^q \partial x]^{\frac{1}{2}}}$;

mais la probabilité que A plutôt que N a sa probabilité depuis 1

jusqu'à $\frac{1}{2}$, est $\frac{\int \frac{[x^m \cdot (1-x)^m \partial x]^{\frac{1}{2}}}{\int [x^m \cdot (1-x)^m \partial x]}$, & celle que la probabilité

de A est plutôt depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro, est $\frac{\int \frac{[x^q \cdot (1-x)^m \partial x]^{\frac{1}{2}}}{\int [x^q \cdot (1-x)^m \partial x]}$;

donc la probabilité d'avoir $q - q'$ évènements A , & q' évèn-

emens N , sera exprimée par $\frac{q}{q'} \frac{\int [x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{m+q'} \partial x]^{\frac{1}{2}}}{\int [x^m \cdot (1-x)^m \partial x]}$,

comme dans le *Problème VIII*, ce qu'on auroit pu conclure de la nature même de la question.

Maintenant on doit chercher la probabilité d'avoir $q - q'$ fois l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, & q' fois celui dont la probabilité est depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro.

Si A est l'évènement dont la probabilité est entre 1 & $\frac{1}{2}$, la probabilité d'amener A , $q - q'$ fois, sera

$$\frac{q}{q'} \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{[x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{m+q'}] dx}{[x^m \cdot (1-x)^m] dx}$$

mais si N est l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, la probabilité

$$\text{d'amener } N, q - q' \text{ fois, sera } \frac{q}{q'} \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{[x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{m+q'}] dx}{[x^m \cdot (1-x)^m] dx}$$

& les multipliant chacun par leurs probabilités respectives, & prenant leur somme, la probabilité d'avoir $q - q'$ fois l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, sera

$$\frac{q}{q'} \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{[x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{m+q'} + x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{m+q'}] dx}{[x^m \cdot (1-x)^m] dx}$$

2.° La probabilité qu'en $2q + 1$ évènements, N n'arrivera pas $2q' + 1$ fois plus que A , sera la même que dans le *Problème VIII*, comme il est clair par l'article précédent; mais la probabilité que l'évènement dont la probabilité est entre $\frac{1}{2}$ & zéro, n'arrivera pas $2q' + 1$ fois plus que l'autre, est exprimée par

$$V^r = \int \frac{x^{m+2q+1} dx \cdot (1-x)^{m+2q+1} \cdot (1-x)^{m+2q+1}}{x^{m+2q+1} dx \cdot (1-x)^{m+2q+1} \cdot (1-x)^{m+2q+1}} + (2q+1) \cdot \int \frac{x^{m+2q} \cdot (1-x)^{m+2q} dx + x^{m+2q} \cdot (1-x)^{m+2q} dx}{x^{m+2q} \cdot (1-x)^{m+2q} dx + x^{m+2q} \cdot (1-x)^{m+2q} dx} + \dots + \frac{2q+1}{q-q'+1} \int \frac{x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'+1} dx + x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'+1} dx}{x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'+1} dx + x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'+1} dx}$$

toute la fonction étant divisée par $\int [x^m \cdot (1-x)^m] dx$.

Faisant abstraction du dénominateur, & considérant séparément chacun des deux termes qui entrent dans la valeur

de V^q , soit S^q la série des premiers termes, nous aurons

$$S^q = \int \frac{x^m \cdot (1-x)^n \cdot V_i^q \partial x}{x^m \cdot (1-x)^n \cdot V_i^q \partial x}, V_i^q \text{ étant ce que devient la}$$

formule V^q , page 15, en mettant x au lieu de v . Si par conséquent on appelle S^{q+1} la valeur correspondante pour

$$2q+3 \text{ évènements, nous aurons } S^{q+1} = \int \frac{x^m \cdot (1-x)^n \cdot V_i^{q+1} \partial x}{x^m \cdot (1-x)^n \cdot V_i^{q+1} \partial x};$$

$$\text{donc on aura } S^{q+1} - S^q = \int \frac{x^m \cdot (1-x)^n \cdot (V_i^{q+1} - V_i^q) \partial x}{x^m \cdot (1-x)^n \cdot (V_i^{q+1} - V_i^q) \partial x}, \text{ mais,}$$

$$\text{page 15, } V_i^{q+1} - V_i^q = \frac{2q+1}{q-q'+1} x^{q-q'+1} \cdot (1-x)^{q+q'+1}$$

$$\cdot \left[\frac{q-q'+1}{q+q'+1} x - (1-x) \right]; \text{ d'où } S^{q+1} - S^q = \frac{2q+1}{q-q'+1} x$$

$$\int \frac{x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{n+q+q'+1} \cdot \left[\frac{q-q'+1}{q+q'+1} x - (1-x) \right] \partial x}{x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{n+q+q'+1} \cdot \left[\frac{q-q'+1}{q+q'+1} x - (1-x) \right] \partial x}. \text{ Si on appelle}$$

S_i^q la somme des seconds termes, qui ne diffère de S^q que parce que n y est à la place de m , & réciproquement,

$$S_i^{q+1} - S_i^q = \frac{2q+1}{q-q'+1} \int \frac{x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{n+q+q'+1} \cdot \left[\frac{q-q'+1}{q+q'+1} x - (1-x) \right] \partial x}{x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{n+q+q'+1} \cdot \left[\frac{q-q'+1}{q+q'+1} x - (1-x) \right] \partial x},$$

$$\& \text{ par conséquent } V^{q+1} - V^q = \frac{2q+1}{q-q'+1}$$

$$\frac{\int \frac{x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{n+q+q'+1} + x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{m+q+q'+1} \cdot \left[\frac{q-q'+1}{q+q'+1} x - (1-x) \right] \partial x}{x^m \cdot (1-x)^n \partial x}}{\int \frac{x^m \cdot (1-x)^n \partial x}{x^m \cdot (1-x)^n \partial x}},$$

d'où l'on tirera la valeur de V^q par une formule analogue à celles de la première Partie & des Problèmes précédens, en substituant seulement dans chaque terme de celle de la page 14.

$$\text{au lieu de } v^r e^{r'}, \frac{\int \frac{x^{m+r} \cdot (1-x)^{n+r'} + x^{m+r} \cdot (1-x)^{m+r'} \cdot \left[\frac{q-q'+1}{q+q'+1} x - (1-x) \right] \partial x}{x^m \cdot (1-x)^n \partial x}}{\int \frac{x^m \cdot (1-x)^n \partial x}{x^m \cdot (1-x)^n \partial x}},$$

La valeur de V^q sera croissante toutes les fois que $\frac{1}{2}$

$\int [x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{n+q+q'} + x^{n+q-q'} \cdot (1-x)^{m+q+q'}] [\frac{q-q'}{q+q'} x - (1-x)] dx$
 fera positive, & décroissante dans le cas contraire.

Si maintenant on cherche si, lorsque $q = \frac{1}{2}$, la formule précédente est négative ou positive, on considérera séparément les deux termes qui la composent. Soit d'abord le terme

$$\frac{q-q'}{q+q'} \cdot \int \frac{\frac{1}{2}}{x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{n+q+q'} dx} - \int \frac{\frac{1}{2}}{x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{n+q+q'+1} dx};$$

il devient

$$\frac{q-q'}{q+q'} \int [x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{n+q+q'} dx] - \int [x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{n+q+q'+1} dx]$$

$$- \left\{ \frac{q-q'}{q+q'} \left[\frac{1}{m+q-q'+2} + \frac{n+q+q'}{(m+q-q'+2) \cdot (m+q-q'+3)} + \frac{(n+q+q') \cdot (n+q+q'-1)}{(m+q-q'+2) \cdot (m+q-q'+3) \cdot (m+q-q'+4)} \dots \right] \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{m+q-q'+1} + \frac{(n+q+q'+1)}{(m+q-q'+1) \cdot (m+q-q'+2)} + \frac{(n+q+q'+1) \cdot (n+q+q')}{(m+q-q'+1) \cdot (m+q-q'+2) \cdot (m+q-q'+3)} \dots \right] \right\}$$

$(\frac{1}{2})^{m+n+2q+1}$. Or si on fait abstraction du terme

$$\frac{1}{m+q-q'+1} (\frac{1}{2})^{m+n+2q+1}, \text{ qui est zéro dans l'hypothèse,}$$

cette formule se réduira à $(\frac{q-q'}{q+q'} - \frac{n+q+q'+1}{m+q-q'+1})$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\int x^{m+q-q'+1} \cdot (1-x)^{n+q+q'} dx}, \text{ qui, dans le cas de } q = \frac{1}{2}, \text{ est}$$

positive tant que $m > n + 4q'$.

On trouvera de même que le second terme se réduit à

$$(\frac{q-q'}{q+q'} - \frac{m+q+q'+1}{n+q-q'+1}) \frac{\frac{1}{2}}{\int x^{n+q-q'+1} \cdot (1-x)^{m+q+q'} dx}, \text{ formule}$$

positive pour $q = \frac{1}{2}$, tant que $n > m + 4q'$.

3.° La probabilité d'avoir A , $2q' + 1$ fois plus que N , sera exprimée comme dans le Problème VIII.

Si on appelle V'^q la probabilité que l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, arrivera $2q' + 1$ fois plus que l'autre, on aura V'^q , en mettant dans la formule

D d

de la page 21, pour $v^r e^{r'}$ $\frac{\int [x^{m+r} \cdot (1-x)^{n+r'} + x^{n+r'} \cdot (1-x)^{m+r}] \partial x}{\int x^m \cdot (1-x)^n \partial x}$

La série sera croissante ou décroissante, selon que la fonction

$$\frac{q+q'}{q-q'} \int [x^{m+q+q'+1} \cdot (1-x)^{n+q-q'+1} + x^{n+q+q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'+1}] \partial x$$

— $\int [x^{m+q+q'} \cdot (1-x)^{n+q-q'+1} + x^{n+q+q'} \cdot (1-x)^{m+q+q'+1}] \partial x$ sera positive ou négative, ce qui donne pour les premiers termes la condition $m > n - 4q'$, & pour les seconds $n > m - 4q'$.

Dans cette hypothèse, on aura $V^{\frac{1}{2}} = V'^{\frac{1}{2}} = 1$, quelles que soient m & n , comme cela est évident par soi-même, puisque la probabilité de l'évènement est toujours supposée supérieure à $\frac{1}{2}$.

R E M A R Q U E I.

Nous ne suivrons pas plus loin cette recherche, parce que, d'après ce qui a été dit, on trouvera sans peine les formules & les conclusions analogues pour d'autres hypothèses de pluralité.

Il est aisé de voir, par exemple, que si on exige une pluralité d'un tiers, la valeur de $V^{\frac{1}{3}}$ fera 1, & que celle de

$$V'^{\frac{1}{3}} \text{ fera } \frac{\int [x^m \cdot (1-x)^n] \partial x + \int [x^n \cdot (1-x)^m]}{\int [x^m \cdot (1-x)^n] \cdot \partial x}$$

R E M A R Q U E II.

Si on fait qu'un des deux évènements est arrivé $2q' + 1$.

fois plus que l'autre, la probabilité que c'est l'évènement qui est arrivé m fois plutôt que l'autre, sera exprimée par la même formule que dans la Remarque du Problème VIII; & la probabilité que c'est l'évènement dont la probabilité est entre 1 & $\frac{1}{2}$, le sera par

$$\frac{\int \frac{1}{[x^{m+q+q'+1} \cdot (1-x)^{n+q-q'} + x^{n+q+q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'}]} dx}{\int [x^{m+q+q'+1} \cdot (1-x)^{n+q-q'} + x^{n+q+q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'}] dx}$$

PROBLÈME XIII.

On suppose que la probabilité n'est pas constante, & , les autres hypothèses restant les mêmes que dans le Problème précédent, on propose les mêmes questions.

SOLUTION. 1.° La probabilité d'avoir $q - q'$ fois l'évènement A & q' fois l'évènement N , sera exprimée, si la probabilité de A est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, par

$$\frac{\frac{q}{q'} \int \frac{1}{x \partial x}^{m+q-q'} \int \frac{1}{(1-x) \partial x}^{n+q'}}{\int (x \partial x)^q \int \frac{1}{(x \partial x)^m} \cdot \int \frac{1}{(1-x) \cdot \partial x}^n}$$

les mêmes évènements, si la probabilité de A est depuis $\frac{1}{2}$

jusqu'à zéro, sera exprimée par
$$\frac{\frac{q}{q'} \int \frac{1}{(1-x) \cdot \partial x}^{m+q-q'} \int \frac{1}{x \partial x}^{n+q'}}{\int (x \partial x)^q \cdot \int \frac{1}{(1-x) \cdot \partial x}^m \int \frac{1}{x \partial x}^n}$$

Multipliant chacun de ces termes par la probabilité de chaque évènement, nous aurons pour la probabilité totale,

$$\frac{\frac{q}{q'} \int \frac{1}{x \partial x}^{m+q-q'} \int \frac{1}{(1-x) \cdot \partial x}^{n+q'} + \int \frac{1}{(x \partial x)^{m+q'}} \int \frac{1}{[(1-x) \cdot \partial x]^{n+q'}}}{\int (x \partial x)^q \left[\int \frac{1}{x \partial x}^m \int \frac{1}{(1-x) \cdot \partial x}^n + \int \frac{1}{x \partial x}^n \int \frac{1}{(1-x) \cdot \partial x}^m \right]}$$

$$\frac{q}{q'} \cdot (3^{m+q-q'} + 3^{n+q'})$$

ou
$$\frac{q}{4^q (3^m + 3^n)}$$

D d ij

Si on cherche la probabilité de l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à 1/2, on trouvera, en suivant le même raisonnement,

$$\frac{\frac{q}{q'} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x dx}^{m+q-1} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x) \cdot dx}^{m+q} + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x dx}^{m+q-1} \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x) \cdot dx}^{m+q}}{\int (x dx)^q \left[\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x dx}^m \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x) \cdot dx}^m + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x) \cdot dx}^m \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x dx}^m \right]}$$

$$= \frac{q}{q'} \frac{3^{m+q-1} + 3^{m+q-1}}{4^q (3^m + 3^m)} = \frac{q}{q'} \frac{3^{q-1}}{4^q}.$$

2.° Il résulte de ces formules, que la valeur de V^q , si on suppose $2q + 1$ évènements & une pluralité de $2q' + 1$, sera, relativement à A & à N , exprimée pour A , par $\frac{3^m V_1^q + 3^n \cdot (1 - V_1^q)}{3^m + 3^n}$, V_1^q étant la formule de la page 15, dans laquelle on substituera $\frac{3}{4}$ à v ; & pour N , par $\frac{3^n \cdot V_1^q + 3^m \cdot (1 - V_1^q)}{3^m + 3^n}$; & par conséquent, si $q = \frac{1}{2}$, on aura pour A , $V^{\frac{1}{2}} = \frac{3^m}{3^m + 3^n}$ à cause de $V_1^{\frac{1}{2}} = 1$.

Si l'on cherche la probabilité pour l'évènement quelconque, dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à 1/2, V^q sera égal à ce que devient la formule de la page 15, en y faisant $v = \frac{3}{4}$, c'est-à-dire que dans ce cas, quels que soient m & n , la probabilité sera comme si on avoit une probabilité $\frac{3}{4}$ que celui dont la probabilité est entre 1 & 1/2 arrivera plutôt que l'autre.

3.° Les valeurs de V^q seront de même pour la première hypothèse $\frac{3^m V_1^q + 3^n \cdot (1 - V_1^q)}{3^m + 3^n}$ & $\frac{3^n V_1^q + 3^m \cdot (1 - V_1^q)}{3^m + 3^n}$, & pour la seconde, V_1^q étant ce que devient la formule de la page 21 quand $v = \frac{3}{4}$.

R E M A R Q U E.

Si l'on fait que sur $2q + 1$ évènements, l'un est arrivé $2q' + 1$ fois plus que l'autre, la probabilité que c'est l'évènement A , sera exprimée par $\frac{3^{m+2q'+1} + 3^n}{3^{m+2q'+1} + 3^{n+2q'+1} + 3^m + 3^n}$.

& celle que c'est l'évènement dont la probabilité est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, par $\frac{3^{n+1}}{3^{n+1} + 1}$.

Nous ne pousserons pas plus loin ces recherches, & nous allons nous occuper maintenant d'appliquer les principes précédens aux questions que nous nous sommes proposé de résoudre.

La première consiste à trouver des moyens de déterminer, d'après l'observation, la valeur de la probabilité de la voix d'un des Votans d'un Tribunal & celle de la décision d'un Tribunal donné. Pour cela nous proposerons deux méthodes.

P R E M I E R M O Y E N .

Je suppose que l'on connoisse un nombre r de décisions d'un Tribunal, dont les Membres sont égaux en lumières, & en même-temps à quelle pluralité chacune des décisions a été rendue; que ces décisions soient choisies parmi celles où l'on ne peut soupçonner l'influence sensible de quelque corruption, de quelque passion, de quelques préjugés populaires. Je suppose enfin que les objets sur lesquels ces décisions ont porté, sont à peu-près de la même nature, & tels que, soit en examinant la question en elle-même, soit en voyant les pièces sur lesquelles les Votans ont prononcé, l'on puisse juger s'ils se sont trompés ou non.

Cela posé, soit une assemblée de personnes très-éclairées, qui soient chargées d'examiner ces décisions, & qu'on rejette celles sur lesquelles cette espèce de Tribunal n'a pas prononcé qu'elles étoient bonnes ou mauvaises à la pluralité exigée, ces décisions étant de plus réduites à une proposition simple, l'examen étant fait par chacun des Membres séparément, discuté entr'eux, & leur vœu donné ensuite à part & en secret, il est clair, 1.^o qu'on pourra supposer à ces personnes très-éclairées une probabilité pour chaque voix fort au-dessus de $\frac{1}{2}$; & qu'en supposant la pluralité un peu grande, on pourra regarder leur décision, sinon comme infallible, du moins

comme n'ayant qu'une erreur très-peu probable: 2.^o que l'erreur qu'on pourroit commettre en regardant leur décision comme toujours vraie, ou en évaluant, avec quelqu'inexactitude, la probabilité qu'ils peuvent se tromper, n'auroit qu'une influence très-légère sur la détermination de la quantité que nous cherchons. Supposons donc une suite de jugemens rendus à différentes pluralités, & décidés vrais ou faux aussi à différentes pluralités.

Soit pour un premier jugement la probabilité de la vérité de la décision du Tribunal d'examen, exprimée par U , & celle de l'erreur de cette même décision par $1 - U$. Soit $2q + 1$ le nombre des Votans, & $2p + 1$ la pluralité, & que le Tribunal d'examen ait prononcé que la décision est vraie, on aura le résultat suivant.

<i>Pour la Vérité.</i>	<i>Pour l'Erreur.</i>	<i>Probabilité.</i>
$\left. \begin{array}{l} q+p+1 \\ q-p \end{array} \right\} \text{voix,}$	$\left. \begin{array}{l} q-p \\ q+p+1 \end{array} \right\} \text{voix.}$	$\begin{array}{l} U \\ 1-U \end{array}$

Soit une seconde décision. Que la probabilité pour le Tribunal d'examen soit U' , le nombre des Votans $2q' + 1$, la pluralité $2p' + 1$, nous aurons

<i>Pour la Vérité.</i>	<i>Pour l'Erreur.</i>	<i>Probabilité.</i>
$\left. \begin{array}{l} q+q'+p+p'+2 \\ q+q'+p-p'+1 \\ q+q'-p+p'+1 \\ q+q'-p-p' \end{array} \right\} \text{voix.}$	$\left. \begin{array}{l} q+q'-p-p' \\ q+q'-p+p'+1 \\ q+q'+p-p'+1 \\ q+q'+p+p'+2 \end{array} \right\} \text{voix.}$	$\begin{array}{l} UU' \\ U.(1-U') \\ U'.(1-U) \\ (1-U).(1-U') \end{array}$

& ainsi de suite.

Si le Tribunal d'examen déclare la décision fautive, alors il faudra mettre pour cette décision $1 - U$ au lieu de U , & réciproquement. Ainsi l'on prendra pour r décisions, par exemple, les 2^r combinaisons possibles qu'on peut former pour le nombre des voix en faveur de la vérité ou de l'erreur.

Cela posé, supposons que ces nombres pour la vérité ou

pour l'erreur, soient m & n , m' & n' , &c. & qu'on cherche la probabilité que sur $2q_1 + 1$ Votans il y aura une pluralité $2p_1 + 1$ en faveur de la vérité. On prendra, d'après le Problème VIII, la probabilité qui a lieu pour chaque valeur de m , m' , &c. on multipliera chacune par la probabilité qui résulte du jugement du Tribunal de décision, que cette pluralité a lieu, & l'on aura la probabilité totale. On trouveroit de même la probabilité que sur $2q_1 + 1$ voix, l'erreur n'aura pas une pluralité de $2p_1 + 1$, & celle qu'une décision rendue à cette pluralité est plus conforme à la vérité qu'à l'erreur.

Si on se borne à chercher les probabilités pour une décision future, quelle qu'elle soit, elles se trouveront les mêmes. En effet, les décisions intermédiaires pouvant avoir toutes les pluralités possibles avec la probabilité qui convient à chacune, le résultat commun doit renfermer tous les cas possibles, & par conséquent il doit être le même que si l'on faisoit abstraction de ces décisions.

Mais il n'en est pas de même si l'on suppose que l'on connoisse la pluralité des décisions intermédiaires. Supposons en effet qu'il y ait une décision rendue par $2q_1 + 1$ Votans, avec une pluralité de $2p_1 + 1$ voix; soit V la probabilité qu'elle est vraie, $1 - V$ la probabilité qu'elle est fautive pour l'hypothèse de m voix en faveur de la vérité, & de n en faveur de l'erreur, & soit U , la probabilité de cette combinaison, on aura ces deux combinaisons.

<i>Pour la Vérité.</i>	<i>Pour l'Erreur.</i>	<i>Probabilité.</i>
$\left. \begin{array}{l} m + q' + p' + 1 \\ m + q' - p' \end{array} \right\} \text{voix.}$	$\left. \begin{array}{l} n + q' - p' \\ n + q' - p' + 1 \end{array} \right\} \text{voix.}$	$\begin{array}{l} U, V \\ U, (1 - V) \end{array}$

On répétera la même opération pour les 2^r valeurs de m & de n , & l'on aura 2^{r+1} combinaisons possibles, avec leurs probabilités respectives. Supposons donc que l'on ait eu r' décisions, dont on connoisse la pluralité, depuis que le Tribunal d'examen a décidé. On formera $2^{r \pm r'}$ combinaisons, qui

donneront $2^{r+r'}$ valeurs de m & de n ; on prendra pour chaque combinaison la probabilité qui en résulte pour une $r + 1^{\circ}$ décision; & multipliant chaque probabilité ainsi trouvée par la probabilité de la combinaison qui y répond, on aura la probabilité totale.

On sent que cette méthode conduiroit, dans la pratique, à des calculs impraticables, mais nous avons cru devoir l'exposer, 1.^o parce qu'elle est la seule rigoureuse, 2.^o parce qu'elle conduit à cette conclusion, que, quels que soient les nombres m & n résultans des décisions du Tribunal d'examen, & quelque probabilité qu'il en naisse en faveur d'une décision nouvelle, si on prend pour r' , ou pour le nombre des décisions rendues depuis l'examen, un nombre très-grand, plus la pluralité de ces décisions sera petite, plus la probabilité totale pour une $r + 1^{\circ}$ décision se rapprochera de $\frac{1}{2}$, ce qui conduit en général à cette conclusion très-importante, que tout Tribunal dont les jugemens sont rendus à une petite pluralité, relativement au nombre total des Votans, doit inspirer peu de confiance, & que ses décisions n'ont qu'une très-petite probabilité.

On diminuera beaucoup cette complication, en observant, 1.^o que si l'on suppose que tous les Tribunaux soient égaux en nombre, puisque $2q + 1$ est ce nombre, & r ou $r + r'$ le nombre des Tribunaux, il y aura $r(2q + 1) + 1$, ou $(r + r')(2q + 1) + 1$ combinaisons possibles; & en général, soit q_1 le nombre de tous ceux qui ont voté dans toutes les décisions, $q_1 + 1$ exprimera le nombre des combinaisons possibles.

2.^o Que comme à chaque combinaison de m pour la vérité & de n pour l'erreur, répond une autre combinaison de n pour la vérité & de m pour l'erreur, il est clair qu'il n'y a que $\frac{q_1}{2} + 1$, $\frac{q_1 + 1}{2}$, selon que q_1 est pair ou impair, combinaisons réellement différentes. Si donc on cherche les probabilités pour une décision nouvelle, soit q_1 le nombre de ceux qui ont voté dans toutes les décisions, on prendra les

les $\frac{q'}{2} + 1$, ou $\frac{q'+1}{2}$, combinaisons qui donnent la pluralité en faveur de la vérité, ou l'égalité, & les $\frac{q'}{2} + 1$ ou $\frac{q'+1}{2}$, qui donnent une égale pluralité en faveur de l'erreur.

On prendra pour les premières les valeurs de V, V' & M , première Partie, & l'on aura pour les valeurs correspondantes des secondes $1 - V', 1 - V, 1 - M$; ensuite on multipliera les premières par les fonctions de U , qui représentent leurs probabilités respectives, & les secondes par des fonctions semblables de $1 - U$.

3.° Cette même opération peut se simplifier encore. En effet, ce qu'il importe ici, c'est de ne pas supposer à la probabilité de la voix de chaque Votant une valeur trop forte, mais en même-temps de ne pas la faire beaucoup plus petite qu'elle n'est en effet. Cela posé, puisque le Tribunal d'examen est supposé formé d'hommes très-éclairés, & qu'on exige une très-grande pluralité dans ce Tribunal, on pourra, sans beaucoup d'erreur, faire $U = 1$ pour tous les cas où le Tribunal d'examen juge que la décision est fautive, & U égale à sa valeur dans le cas de la moindre pluralité, lorsque le Tribunal d'examen juge que la décision est vraie. Alors une seule combinaison possible répondra à toutes celles qu'auroient fait naître les décisions du Tribunal d'examen contraires aux premières décisions; en sorte que soit q'' le nombre des Votans dans les décisions confirmées, $q'' + 1$ exprimera le nombre des combinaisons possibles. Maintenant si n' est le nombre des décisions confirmées, les différentes probabilités seront exprimées par $U^{n'}, U^{n'-1} \cdot (1 - U), U^{n'-2} \cdot (1 - U)^2$, &c. au nombre de $n' + 1$. Il y aura donc $2^{n'}$ combinaisons réductibles à $\frac{q''+1}{2}$ ou $\frac{q''}{2} + 1$, dont une sera multipliée par $U^{n'}$, n' par $U^{n'-1} \cdot (1 - U)$, $\frac{n'-1}{2}$ par $U^{n'-2} \cdot (1 - U)^2$, &c. Après avoir donc formé ces

E e

$n' + 1$ probabilités différentes, on cherchera en quel nombre elles répondent à chacune des $q'' + 1$ combinaisons, pour lesquelles nous avons ci-dessus montré qu'il suffisoit de chercher la probabilité de $\frac{q''}{2} + 1$, ou $\frac{q''+1}{2}$ combinaisons différentes.

4.° Nous avons fait U fort grand, & par conséquent nous pouvons négliger les puissances de $1 - U$, excepté la première, & cela avec d'autant moins d'inconvéniens, que nous avons fait égale à 1 la probabilité que le Tribunal d'examen ne se trompoit pas toutes les fois qu'il jugeoit les décisions erronées, & que nous avons donné à U la plus petite valeur possible. Nous n'avons donc plus que $n' + 1$ combinaisons, dont une avec la probabilité

$$\frac{U^{n'}}{U^{n'} + n' U^{n'-1} \cdot (1-U)}, \text{ \& } n'$$

avec la probabilité $\frac{U^{n'-1} \cdot (1-U)}{U^{n'} + n' U^{n'-1} \cdot (1-U)}$, ou bien une

avec la probabilité $U^{n'}$, & n' avec la probabilité $U^{n'-1} \cdot (1-U)$, en regardant comme favorables à l'erreur tous les autres cas. En prenant ce dernier parti, on sera sûr d'avoir des valeurs de V, V' & M plus petites qu'elles ne sont réellement; mais si U est fort grand, ces valeurs s'écarteront peu des véritables.

5.° On suppose maintenant qu'il y a eu r' décisions dont on connoît la pluralité, sans savoir si elles sont vraies ou fausses. Il en résulte d'abord, q'' représentant toujours le nombre des voix dans ces r' décisions, $q'' + 1$ combinaisons différentes de voix pour l'erreur ou pour la vérité. Cela posé, soit une combinaison de m voix pour la vérité, & de n pour l'erreur par le jugement du Tribunal d'examen, & soit U , la probabilité de cette combinaison: soit ensuite dans les r' décisions, pour lesquelles on ne connoît que la pluralité, une combinaison de m' voix contre n' , on aura une combinaison de $m + m'$ voix pour la vérité contre $n + n'$ pour l'erreur, la

probabilité de cette combinaison étant U, M , & une combinaison de $m + n$ voix pour la vérité, & de $n + m'$ pour l'erreur, la probabilité étant $U, (1 - M)$, où M , exprime la probabilité que, si on a m résultats vrais & n faux, on aura plutôt sur $m' + n'$ résultats futurs, m' résultats vrais & n' résultats faux, que n' résultats vrais & m' faux; & il en sera de même de toutes les combinaisons. On aura donc par ce moyen les valeurs de V, V' & M pour une $r + 1^e$ décision, toujours plus petites qu'elles ne doivent être dans la réalité. Mais on observera que, si pour une des combinaisons possibles, multipliées par $(1 - U)^2, (1 - U)^3$, &c. on avoit une valeur de M , qui fût assez grande pour rendre ces termes de l'ordre $1 - U$, on ne devroit pas négliger les termes multipliés par $(1 - U)^2, (1 - U)^3$, &c, sans quoi l'on s'exposeroit à avoir pour V, V' & M des valeurs trop petites. Aussi tant que la valeur de ces quantités ne sera pas sensiblement plus petite que pour une seule décision rendue, on pourra regarder le Tribunal comme n'ayant rien perdu de la probabilité qu'il avoit d'abord; mais si elles le deviennent sensiblement, alors il faudra avoir égard aux termes multipliés par $(1 - U)^2$, ou avoir recours à un nouvel examen pour s'assurer si cette diminution de la probabilité est réelle. En général toutes les fois que la pluralité moyenne s'éloignera sensiblement de la pluralité qu'il seroit le plus probable d'obtenir d'après les jugemens du Tribunal d'examen, & qu'elle sera plus petite, il y aura lieu, au bout d'un grand nombre de décisions, de craindre une diminution de probabilité dans les jugemens des assemblées, & il faudra ou recourir à un nouvel examen, ou employer des calculs d'une longueur impraticable.

Cette première méthode n'a que l'inconvénient d'exiger l'établissement d'un Tribunal d'examen & un recours plus ou moins fréquent à ce Tribunal. Nous allons en proposer une qui dispense de cet examen: il peut avoir en effet des difficultés indépendantes du calcul. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'examiner des jugemens d'accusés dans un pays

où ils sont confiés à des Tribunaux perpétuels, nombreux & puissans; comment trouver alors, pour composer le Tribunal d'examen, des hommes qui aient les lumières que l'expérience peut-être donne seule en ce genre, & qui aient une impartialité & une indépendance absolue, relativement aux Tribunaux dont il s'agit d'examiner les décisions?

S E C O N D E M É T H O D E.

Nous nous bornons ici à une seule supposition, c'est que l'on regarde comme certain que la probabilité que le jugement d'un homme est vrai, est au-dessus de $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, qu'il est probable qu'il rencontrera la vérité plutôt que l'erreur.

Cette supposition est nécessaire en quelque sorte, puisque, du moment où la probabilité de la voix de chaque Votant sera au-dessous de $\frac{1}{2}$, il seroit absurde de proposer de décider à la pluralité des voix; ainsi cette seconde hypothèse ne pourroit être admise que dans des cas particuliers, & pour quelques voix. Examinons, d'après ce principe, comment, connoissant la pluralité des décisions de plusieurs assemblées, on peut en déduire la probabilité des décisions futures.

On peut ici supposer, 1.^o que dans chaque décision la voix de tous les Votans ait une probabilité constante; 2.^o que dans chaque décision & chaque Votant, la probabilité varie; 3.^o qu'on admette ensemble les deux hypothèses, en multipliant la probabilité qui résulte de chacune par celle que cette hypothèse a lieu.

Si on adopte la seconde hypothèse, il suit de ce qui a été dit ci-dessus, *Problèmes IV & XIII*, que l'on aura le même résultat que l'on auroit, en faisant dans les formules de la première Partie $v = \frac{3}{4}$, $e = \frac{1}{4}$. C'est une sorte de valeur moyenne qu'il peut être utile de calculer, parce que si le résultat de la première hypothèse étoit au-dessous de cette valeur, on en concluroit qu'il faut employer des Votans plus éclairés, & ne se contenter de ceux qui donnent une si petite probabilité que dans le cas d'une nécessité absolue.

Quant à la première hypothèse, il ne paroît pas naturel de l'admettre seule, puisqu'il est certain que l'hypothèse d'une probabilité, toujours la même & dans toutes les décisions, est purement mathématique. Nous préférons la troisième hypothèse qui résulte des deux autres combinées.

Il nous reste donc à déterminer, 1.° la probabilité d'une décision future dans chaque hypothèse; 2.° la probabilité de chaque hypothèse.

Pour cela, soit un nombre n de décisions, & que celui de tous les Votans soit q' , nous aurons $\frac{q'}{2} + 1$, ou $\frac{q'+1}{2}$ combinaisons différentes de pluralités en faveur de la vérité, & un pareil nombre de pluralités correspondantes en faveur de l'erreur, chacune étant répétée un certain nombre de fois pour produire le nombre 2^n de combinaisons différentes. Cela posé, on aura, par le *Problème XII*, la probabilité M , que pour chaque hypothèse la pluralité est en faveur de la vérité, & la probabilité $1 - M$, qu'elle est en faveur de l'erreur. On prendra ensuite dans les $q' + 1$ hypothèses ainsi trouvées, la probabilité qui résulte de chacune pour la nouvelle décision, & on la multipliera par les probabilités respectives M , $1 - M$.

On ne peut négliger ici les cas où la pluralité est supposée en faveur de l'erreur, parce que la probabilité que ce cas a lieu, peut n'être pas très-petite en beaucoup de circonstances; mais on a ici un avantage, c'est que dans les $q' + 1$ combinaisons, chaque combinaison semblable, répétée un nombre de fois quelconque, a constamment la même probabilité, en sorte que celle de chaque combinaison ne renferme qu'un seul terme.

D'ailleurs, ces termes sont faciles à calculer. Il ne faut en effet qu'avoir la valeur de $\int x^m \cdot (1-x)^n dx$ depuis $m = q'$, $n = 0$ jusqu'à $m = 0$, $n = q'$. Or nous avons

$$\int x^m \cdot (1-x)^n dx = \frac{x^{m+1} \cdot (1-x)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1} \int x^{m+1} \cdot (1-x)^{n-1} dx.$$

Donc ayant la valeur de cette expression pour les nombres $m+1$ & $n-1$, on aura la même expression pour les valeurs m & n , en ajoutant un seul terme. Ainsi il suffira de connoître un de ces termes par rapport aux valeurs de m depuis q' jusqu'à zéro. En effet, si P est un terme donné, P' le terme suivant qui répond aux valeurs m & n , on aura $P' = P \cdot \frac{n}{m+1} + \frac{x^{m+1} \cdot (1-x)^n}{m+1}$, en observant que le terme $\frac{x^{m+1} \cdot (1-x)^n}{m+1}$ est $\frac{-\frac{1}{2} x^{m+1}}{m+1}$ lorsqu'on prend les intégrales depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, & $\frac{+\frac{1}{2} x^{m+1}}{m+1}$ lorsqu'on les prend depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à zéro. Si $n=0$, il faut ajouter dans le premier cas un terme $\frac{1}{m+1}$.

On prendra donc successivement pour chaque combinaison la probabilité qu'on devoit avoir relativement à une décision nouvelle, & on la multipliera par la probabilité de cette combinaison. On prendra ensuite pour chacune la probabilité que celle des voix est constante, & on multipliera par cette probabilité la probabilité déjà trouvée; on prendra enfin la probabilité pour la décision, en supposant celle de chaque Votant variable; & comme elle est la même dans toutes les combinaisons, on la multipliera par la somme des probabilités que cette hypothèse a lieu pour chacune des combinaisons.

Or on aura ces différentes Probabilités par les *Problèmes IV, XII & XIII*. La probabilité qu'on a déterminée ici, est la même pour chaque décision nouvelle en particulier, quel qu'ordre qu'elle ait dans la suite de ces décisions. Mais si l'on connoît la pluralité des décisions intermédiaires, & que q'' exprime le nombre de ceux qui les ont formées, on voit que pour avoir plus exactement la probabilité de la nouvelle décision, il faudra ajouter ces nouvelles décisions aux anciennes, & recommencer le calcul pour les $q' + q'' + 1$ combinaisons de voix que l'on a dans ce cas.

Cette correction deviendra nécessaire si les pluralités qu'on observe dans les nouvelles décisions ne suivent pas à peu-près les mêmes proportions que dans celles d'après lesquelles on a établi les premières probabilités.

On pourroit aussi chercher à déterminer la limite au-dessous de laquelle il existe une très-grande probabilité que la voix de chaque Votant ne tombera point, & regarder cette limite comme la valeur constante de la probabilité. *Voy. Problèmes V & VI.* Cette méthode exigeroit moins de calcul, faciliteroit la comparaison des avantages & des inconvéniens des différens Tribunaux; & quoiqu'elle eût moins de précision & d'exactitude, elle donneroit une aussi grande sûreté qu'on voudroit, mais à la vérité avec une plus grande pluralité & des Tribunaux plus nombreux. La très-grande probabilité qu'il faudroit exiger dans ce cas, devroit être égale à V , c'est-à-dire, à la probabilité de ne pas avoir une décision fautive.

Nous ne pousserons pas plus loin ces recherches. Il suffit d'avoir exposé ici les principes des méthodes & ceux du calcul: dans l'application à des exemples, on trouveroit des moyens de simplifier les longs calculs qu'ils exigeroient; mais on ne devoit se livrer à ce travail que dans le cas où il deviendroit d'une utilité immédiate.

Maintenant, il nous reste à déterminer les valeurs qu'il faut assigner aux quantités V , V' & M ; c'est-à-dire, 1.° à la probabilité qu'une décision qui va être rendue, ne sera pas fautive; 2.° à la probabilité qu'elle sera vraie; 3.° à la probabilité qu'une décision rendue à une pluralité donnée ou à la plus petite pluralité, sera conforme à la vérité; 4.° à la probabilité que l'on aura une décision; cette probabilité est exprimée par $1 + V' - V$; 5.° à la probabilité qu'une décision rendue est vraie, & cette probabilité est exprimée

par $\frac{V'}{1 + V' - V}$. Ces valeurs doivent être telles que l'exigeront la sûreté & l'utilité publiques, & il est clair qu'il suffira de déterminer V , V' & M d'après ce principe; car s'il y a une probabilité suffisante d'avoir une décision vraie, on aura à

plus forte raison une probabilité suffisante d'avoir une décision vraie ou fautive ; & si l'on a une probabilité suffisante de la vérité d'une décision rendue à la moindre pluralité, on l'aura pour la vérité d'une décision dont on ignore la pluralité.

Ces quantités ne doivent pas être égales entr'elles, ni être les mêmes dans les différens genres de décisions. En effet, le nombre des Votans étant assujetti à une certaine limite, tant par la nature des choses que par la nécessité de n'admettre que des Votans en état de prononcer, & dont la voix ait une certaine probabilité, il faut balancer nécessairement les inconvéniens d'avoir une décision fautive & ceux de ne point avoir de décision. D'ailleurs les limites de ces quantités dépendent aussi de la nature & de l'importance des questions proposées. On n'exigera point la même probabilité, on ne formera point un Tribunal aussi nombreux pour décider, qui doit payer une cruche cassée, que pour juger si un accusé doit être puni de mort. Nous chercherons donc ici à déterminer ces quantités, 1.^o pour la question d'admettre ou de rejeter une loi nouvelle, de changer ou de conserver une loi ancienne ; 2.^o pour un jugement sur la propriété d'un bien contesté ; 3.^o pour un jugement sur un crime capital. Les principes employés dans cette détermination, s'appliqueront sans peine aux autres genres de questions qu'on peut décider à la pluralité des voix.

P R E M I È R E Q U E S T I O N .

On voit d'abord que la probabilité de ne pas avoir une décision fautive, doit être fort grande, & d'autant plus grande qu'une mauvaise loi établie sera plus difficile à révoquer. Ainsi comme c'est ici un des cas où l'on n'exige pas absolument une décision, il est clair que moins V' sera petit, plus V doit être grand. Mais il faut observer qu'une loi nouvelle n'est presque jamais nécessaire que pour détruire un abus né de la coutume ou d'une mauvaise loi : ainsi, V' doit être très-grand, puisque l'inconvénient de laisser subsister l'abus est

est aussi très-grand. Il faudra donc que V' soit à peu-près égal à M , c'est-à-dire, à la probabilité qu'une loi établie à une certaine pluralité, est juste & utile. Or, d'après cela, il est aisé de voir que si on a pour M une valeur suffisante, qu'on donne à V' la même valeur, V aura nécessairement aussi une valeur suffisante. C'est donc M seulement que nous avons à déterminer ici.

M représente, comme on l'a dit, la probabilité qu'une loi établie à la moindre pluralité, est juste & utile, & par conséquent la valeur doit être telle, qu'un homme qui ne jugeroit de la justice de cette loi que par la pluralité qu'elle a obtenue, eût une assurance qu'il est de son intérêt de s'y soumettre, assez grande pour ne pas craindre les inconvéniens qui peuvent résulter de l'erreur. Supposons donc ces inconvéniens les plus grands possibles, c'est-à-dire, égaux au risque de perdre la vie, nous devons faire M égal à une probabilité, telle qu'un homme raisonnable qui auroit cette même probabilité de ne pas périr, ne se croiroit exposé à aucun danger. C'est donc cette probabilité qu'il faut ici déterminer par l'expérience, ou plutôt, comme nous l'avons déjà expliqué, *seconde Partie*, c'est le *minimum* de cette probabilité qu'il faut chercher, & non une probabilité quelconque qui donne un degré suffisant d'assurance.

Un Savant, que nous avons déjà cité ci-dessus, *page 138*, a cherché à déterminer cette probabilité, & il l'a fixée à $\frac{9,999}{10,000}$, parce qu'aucun homme n'est frappé de la terreur de périr dans l'espace d'un jour, & que sur 10,000 personnes il en meurt une dans cet espace de temps. Nous prendrons la liberté de nous écarter encore ici de son opinion. 1.° Cette détermination est nécessairement inexacte : il auroit fallu, comme l'a observé M. D. Bernoulli, ne pas compter tous ceux qui ont, quelque temps avant l'époque de leur mort, ou un commencement de maladie, ou un état de langueur, ou un très-grand âge, ou des dispositions à une mort prochaine qu'ils se dissimulent : 2.° trois causes concourent à rendre ce danger indifférent. Le danger en

lui-même est petit, il est habituel, il est le plus souvent inévitable. C'est une nouvelle source d'erreur, & il faudroit chercher une espèce de danger où la première cause seule le fit mépriser, c'est à-dire, un danger auquel on s'exposât volontairement, sans aucune habitude formée & pour un très-petit intérêt.

Supposons, par exemple, qu'on sache combien il périt de Paquebots sur le nombre de ceux qui partent de Douvres pour Calais, ou réciproquement, par un temps regardé comme bon & sûr; on aura certainement la valeur d'un risque qu'on peut regarder comme n'empêchant point d'avoir une probabilité d'arriver au port suffisante pour s'exposer avec sécurité.

Supposons de même qu'on sache combien de Vaisseaux périssent en allant en Amérique, dans un certain nombre de Vaisseaux bien équipés & partis dans une saison favorable; on aura encore une expression de risque semblable.

On en trouveroit encore un exemple dans les accidens qui peuvent arriver par la mal-adresse d'un Chirurgien qui fait une saignée. Aucun homme raisonnable ne craint à Paris que le Maître en Chirurgie auquel il s'adresse, ou l'Élève que ce Maître lui envoie, lui fasse, en piquant l'artère, une blessure qui peut devenir mortelle.

On seroit bien aussi de prendre des exemples parmi les dangers que des hommes prudens, & ayant du courage, bravent ou évitent, suivant leur manière personnelle de voir & de sentir. Tel est le danger de passer le Pont Saint-Esprit en descendant le Rhône en bateau, &c.

Ce ne seroit qu'en prenant un grand nombre de ces exemples, & voyant les différentes probabilités qui en résultent, qu'il seroit possible de déterminer celle au-dessous de laquelle on ne pourroit tomber sans nuire à la sûreté que la Justice exige.

Comme les gens qui font le commerce d'argent aiment leur fortune à peu-près autant qu'un homme raisonnable peut aimer sa vie, on pourroit aussi employer ce moyen. Par exemple, choisissant une manière de placer en rente viagère

sur un grand nombre de têtes choisies, telle que l'opinion commune des hommes qui font ce commerce, la regarderoit comme sûre : prenant ensuite l'intérêt commun des fonds de terre, des placemens avec hypothèque, celui des différens commerces, on pourroit calculer la probabilité que le placement sur plusieurs têtes ne sera pas au-dessous de ces divers intérêts, & l'on auroit ainsi différens degrés de probabilités, regardés comme suffisans pour donner une sûreté plus ou moins grande.

On pourroit même absolument remplacer ces élémens par des Tables de mortalité. Pour cela, on prendroit des hommes de l'âge de trente à cinquante ans : on chercheroit combien sur mille de même âge il en meurt par année, ce qui, pour les vingt années, donne vingt probabilités différentes. On n'admettroit dans cette liste que ceux qui meurent ou d'accident ou d'une maladie très-prompte. Divisant ensuite par 52 le risque dans l'année, on auroit celui de mourir dans une semaine. Or, il est constant que tout homme de trente à cinquante ans, qui n'est actuellement attaqué d'aucune maladie, est dans la ferme persuasion qu'il ne doit pas craindre d'être mort au bout de la semaine.

Il ne seroit pas même inutile de prendre cette probabilité depuis vingt jusqu'à soixante ans & au-delà, & de juger alors jusqu'à quel point elle décroît.

On devroit prendre des Tables formées d'après un très-grand nombre d'observations, qui donnent à la fois & l'âge & la maladie de chaque individu.

En effet, la manière plus ou moins sensible dont on verroit le risque s'accroître d'année en année, seroit un moyen de juger si la sécurité qui s'étend sur une semaine jusqu'à des âges très-avancés, est fondée sur l'observation des évènemens, ou seulement sur le défaut d'attention & la confiance en ses forces. L'on s'arrêteroit au terme où ce changement d'une année à l'autre devient plus sensible.

On auroit donc alors deux termes pour lesquels on a une sûreté différente, & qui cependant donnent une assurance.

suffisante. La différence du risque qui en résulte peut donc être ajoutée à celui qui menace de la mort un homme sain & encore dans la force de l'âge, sans l'augmenter sensiblement, & cette différence marquera le *minimum* que nous cherchons.

En attendant des Tables plus exactes & des recherches qui deviendroient nécessaires, si on vouloit appliquer à la pratique les principes que nous exposons, supposons que les morts causées par des maladies instantanées, aient un rapport constant avec le nombre total des morts; que ce nombre soit environ un dixième, comme on peut le conclure de quelques Tables, nous trouverons ensuite que de 37 à 47 ans, suivant les Tables de Süßmilch, la mortalité est par an d'un sur 58,57 48, l'accroissement annuel étant constant; mais que de 47 à 48 ans, la mortalité devient d'un 41.^e; & de 36 à 37, d'un 60.^e, puis de 35 à 36, d'un 70.^e. Nous prendrons donc le risque de mourir d'une maladie instantanée dans la 37.^e année, & le même risque dans la 47.^e: ils seront exprimés par $\frac{1}{580}$ & $\frac{1}{480}$, dont la différence sera $\frac{1}{2784}$. Cette différence de risque pour une semaine sera donc $\frac{1}{144768}$, & c'est ce nombre que nous prendrons ici pour le *maximum* de risque qu'on peut négliger, & $\frac{144767}{144768}$ pour le *minimum* de probabilité, d'après lequel on peut se décider avec assurance.

D'après les mêmes Tables, on observeroit également une différence toujours uniforme dans la probabilité de mourir dans l'année de 18 à 33 ans. Cette probabilité étant pour la première $\frac{1}{101}$, & $\frac{1}{86}$ pour la seconde; la différence est $\frac{15}{8686}$, & pour les maladies instantanées, seulement dans l'espace d'une semaine $\frac{1}{301115}$, risque aussi à négliger & beaucoup plus petit que le précédent.

Aussi nous ne regardons pas ces risques comme égaux, mais nous prenons le plus grand comme celui qui donne le *minimum* de probabilité, avec lequel on devra se croire en sûreté, ou le *maximum* de risque qu'on pourra négliger.

Ce risque paroît ici très-petit, & l'on pourroit croire qu'il exige une très-grande pluralité & une assemblée très-nombreuse; cependant en supposant seulement dans ceux qui décident, une probabilité de trouver la vérité égale à $\frac{1}{2}$, on auroit

$x - M < \frac{1}{144768}$, en exigeant une pluralité de 9 voix,

& V' plus grand que $\frac{144767}{144768}$, en supposant l'assemblée formée de 61 Votans; & si l'on supposoit la probabilité de chaque voix égale à $\frac{9}{10}$, il suffiroit alors d'exiger une pluralité de six voix, & d'avoir une assemblée de 44 Votans.

Nous avons supposé ici que l'on votoit sur une loi sur laquelle il étoit également nécessaire d'avoir une décision, & que cette décision fût conforme à la vérité; mais il faut distinguer dans la loi son objet fondamental des dispositions détaillées qui doivent former la loi. Supposons, par exemple, qu'il soit question d'examiner si le vol doit jamais être puni de mort, ou en d'autres termes, si l'intérêt de la société exige que l'on établisse cette peine contre le vol, & si dans le cas où il paroîtroit l'exiger, elle ne seroit point contraire au Droit naturel. Il est clair que si la décision de cette question est soumise au jugement d'une assemblée, il faut s'assurer également une très-grande probabilité que la décision sera portée à la pluralité nécessaire, & que celle qui sera portée, sera vraie. Mais si ensuite la décision est donnée, si on a prononcé à la pluralité requise, que ce crime ne doit pas être puni de mort, mais seulement par la perte de la liberté dont on a abusé, & par des travaux publics, utiles à la société dont on a troublé l'ordre, & qu'il soit question de régler les peines de différente espèce pour les différens genres de vols, il est aisé de voir qu'il est important que les différens articles qui formeront ce règlement, soient tels qu'il n'en résulte aucun

inconvenient pour la société; mais il n'est pas également important d'avoir une très-grande assurance que l'assemblée qui décidera ces différentes questions, rende une décision, pourvu qu'on ait cette grande assurance que celle qui sera rendue soit vraie. On peut donc employer pour décider ces questions une assemblée moins nombreuse; & en exigeant une pluralité suffisante, se contenter d'une moindre probabilité d'avoir cette pluralité sur chaque question dès la première délibération. Or, comme la décision des objets de ce genre demande souvent plus de combinaisons dans les idées, d'habitude de discuter, de connoissances, que celle de l'utilité de la justice d'une loi générale, il peut être avantageux de la confier à une assemblée moins nombreuse.

Nous croyons devoir ajouter ici une observation assez importante, relativement à ces principes généraux des loix, sur lesquels nous avons vu que l'on doit exiger que $V' = M$; c'est que si on a un grand nombre d'hommes assez éclairés pour avoir, par exemple, la probabilité de l'avis de chacun égale à $\frac{2}{3}$, & pour en former un Tribunal assez

nombreux pour avoir $V' = \frac{144767}{144768}$, la pluralité étant 18;

ce qui est nécessaire pour que M ait cette même valeur, alors on pourra, sans inconvenient, soumettre la décision de cette loi à tous ceux dont la voix a cette probabilité; mais si au contraire on n'a pas un nombre suffisant dont la voix ait cette probabilité, & qu'il y en ait au contraire un petit nombre dont la voix ait une probabilité beaucoup plus grande, il pourra être plus avantageux de leur en confier la décision. Enfin il peut y avoir dans une Nation assez peu de lumières pour que l'on ne puisse jamais réunir ces deux conditions de

$M = V' = \frac{144767}{144768}$, parce qu'à mesure qu'on multiplieroit

le nombre des Votans, la probabilité de la voix de chacun diminueroit de manière, que l'on parviendroit enfin jusqu'à ceux pour lesquels cette probabilité est au-dessous de $\frac{1}{2}$.

Cette observation confirme ce que nous avons dit dans la

première Partie, page 6, & l'on voit que la nécessité d'avoir $V' = M$, peut faire trouver les mêmes inconvéniens dans une assemblée nombreuse de représentans que dans une démocratie. Nous reviendrons sur cet objet dans la cinquième Partie.

S E C O N D E Q U E S T I O N .

On peut supposer ici que les deux personnes qui se disputent un bien, ne doivent avoir aucun avantage l'une sur l'autre, & qu'une décision est nécessaire. Dans ce cas, on peut supposer le Tribunal qui juge impair, & n'exiger que la pluralité d'une voix : alors il y aura certainement une décision, où la plus petite probabilité M sera seulement égale à v ; mais si alors on n'a point dans tous les cas une probabilité très-grande de la vérité de la décision, il faut du moins faire en sorte que le cas où cette probabilité est petite, arrive très-rarement.

Pour cela, on prendra une certaine pluralité, telle que pour cette pluralité q' on ait $\frac{v'}{v' + e'}$ assez grand, & en même-temps V' & $V' + E'$ très-grands, ce qui ne peut arriver sans que l'on ait une très-grande probabilité d'avoir une décision à cette pluralité, & , si on a une fois cette décision ; une très-grande probabilité qu'elle est vraie, même dans le cas où la pluralité est la plus petite. Cherchons maintenant quelle valeur doit avoir $\frac{v'}{v' + e'}$; il est aisé de voir, en suivant le même raisonnement que nous avons fait en examinant la question précédente, que $\frac{v''}{v'' + e''}$ doit être tel ici, que $\frac{e'}{v' + e'}$, ou le risque auquel on est exposé dans ce cas, soit tel qu'un homme sensé s'expose à ce risque de perdre sa fortune sans en être inquiet, ou sans qu'on le taxe d'imprudence.

Pour cela, on pourroit prendre les spéculations pour les

placemens en rentes viagères, chercher la probabilité que ceux qui les distribuent sur le moins de têtes choisies, ont de ne pas perdre de leur capital, c'est-à-dire, que la valeur de toutes les rentes viagères, jusqu'à l'extinction, excédera la valeur de leur capital, supposé placé à l'intérêt le plus foible que rapportent les placemens regardés comme les plus certains, & regarder cette probabilité comme le *minimum* au-dessous duquel $\frac{v''}{v'' + a'}$ ne doit pas être pris.

Lés Tables qu'on pourroit former d'après les registres des Bureaux d'assurances maritimes, pourroient donner aussi une valeur de cette même quantité; mais comme les Tables qu'il faudroit calculer pour employer ces données n'existent pas, nous pourrons y suppléer par l'hypothèse suivante, qui est analogue à celle que nous avons adoptée dans la première question.

Pour cela, nous supposerons qu'un Résignataire se croit également en sûreté lorsque le Bénéfice lui est résigné par un homme de 37 ans ou par un homme de 47 ans, pourvu qu'il soit sain dans le moment de la résignation: il risque cependant de le perdre si le Résignateur meurt dans l'espace d'environ quinze jours. Or la différence du risque pour les deux âges est alors à peu-près $\frac{1}{24,000}$ ou $\frac{1}{36,000}$, selon qu'on supposera que la moitié ou le tiers de ceux qui meurent de maladies aiguës, meurent avant le quinzième jour de la maladie.

Connoissant donc ici la valeur de M , si on connoît v , on aura q' , & on cherchera ensuite à faire $V' = \frac{144767}{144768}$.

En effet, alors on n'aura qu'un risque de ne pas avoir une décision, soit fausse, soit vraie, à cette pluralité, tel qu'on se négligeroit même s'il étoit question de sa propre vie: & lorsqu'on auroit une décision rendue à cette pluralité, on n'auroit, dans le cas le plus défavorable, qu'un risque $\frac{1}{24,000}$ ou

ou $\frac{1}{36,000}$ qu'elle est fautive, risque qu'un homme, quoique attaché à sa fortune, néglige également.

Dans ce genre de questions, l'on peut faire une observation qui semblera paradoxale; c'est qu'il y est en quelque sorte plus important de confier la décision à des Juges très-éclairés, que lorsqu'il s'agit de décider sur la bonté d'une loi ou sur la vie d'un accusé: la raison en est que dans les deux premiers cas on peut exiger une pluralité au-dessus de l'unité, & suspendre la décision sur la loi, ou renvoyer l'accusé si cette pluralité n'a pas lieu; au lieu qu'ici on croit nécessaire de décider, & par conséquent de se contenter de la plus petite pluralité. On risque donc de n'obtenir la décision qu'à la pluralité d'une seule voix, & la probabilité de la décision n'est alors que celle d'une seule voix.

Si on suppose qu'un des deux prétendants à un bien, doit l'obtenir ou le conserver; à moins que le droit de son concurrent ne soit bien prouvé, comme lorsque l'un des deux s'appuie sur une longue possession, alors on peut établir que celui qui a le droit sera mis en possession du bien, ou le conservera, à moins que la pluralité contre lui ne soit telle que l'on ait pour M une valeur égale à celle que nous venons de déterminer; mais il ne seroit pas nécessaire ici que V' fût aussi grand que dans le cas qui a été considéré d'abord. Voyez pages 11 & 12,

TROISIÈME QUESTION.

Nous ferons encore ici $M = \frac{144767}{144768}$, & il ne peut y avoir de difficulté que sur la valeur qu'il convient de donner à V' & à $\frac{q^{q'-2}}{q^{q'-2} + d^{q'-2}}$. Comme toutes les fois que la pluralité exigée n'a pas lieu, l'accusé doit être renvoyé, il est clair que $1 - V'$ exprime la probabilité qu'un coupable sera absous; & si q' est la pluralité exigée, $\frac{q^{q'-2}}{q^{q'-2} + d^{q'-2}}$

G g

exprimera la probabilité qu'un coupable est absous dans le cas le plus défavorable pour la vérité du jugement.

Examinons quelle valeur l'intérêt de la sûreté publique exige que l'on donne à ces deux quantités.

Le renvoi d'un coupable a deux inconvéniens ; 1.^o le danger qui résulte de l'exemple de l'impunité ; 2.^o le danger qui résulte de la liberté rendue à un coupable. Il faut les examiner séparément.

Quant au premier inconvénient, s'il ne s'agissoit que d'avoir V' assez grand pour que l'espérance de l'impunité n'excitât point au crime, sa valeur pourroit être très-petite. En effet, un homme ne s'expose à un danger, tel que sur 300 personnes une seule en échappe, que lorsqu'il est animé par une passion extrêmement violente ; & s'il s'y expose, c'est qu'il préfère la mort à la vie qu'il seroit contraint de mener après avoir évité ce danger : mais l'opinion des hommes qui commettent des crimes, ne se forme pas d'après un examen réfléchi, elle dépend de l'impression de l'exemple. Supposons par conséquent qu'ils aient sous les yeux l'exemple de vingt crimes dans une génération, & c'est beaucoup pour la plupart des pays policés, il faut avoir une grande probabilité que sur vingt personnes accusées d'un crime, & vraiment coupables, il n'y aura pas l'exemple que l'une se sera sauvée. Or, en faisant $V' = \frac{99.999}{100.000}$, cette probabilité sera $\frac{99.774}{100.000}$ à peu près, & le risque qu'il n'en résulte un mauvais exemple pour une génération, moindre que $\frac{3}{1000}$. L'on sent combien

même cet exemple d'impunité est encore très-peu propre à rassurer les coupables, parce qu'il ne s'agit ici que de ceux qui se livrent au crime avec l'espérance de l'impunité, & non des Brigands qui ne sont pas encouragés par l'espérance d'être absous, mais par celle de n'être pas arrêtés, & qu'il n'est pas même question de l'espérance de l'impunité, fondée sur le défaut de preuves, puisque dans l'hypothèse que nous considérons, le jugement étant seulement formé par cette

proposition, le crime n'est pas prouvé, l'erreur qui renvoie un coupable, n'a lieu que pour le cas où le crime, quoique réellement prouvé, ne le paroît pas aux yeux des Juges.

Dans ce même cas, il est clair que l'exemple d'un coupable renvoyé malgré la probabilité $\frac{v^{q'-2}}{v^{q'-2} + e^{q'-2}}$ seroit très-

dangereux, & le seroit même avec la pluralité d'une seule voix pour le condamner. Ainsi il faudra que, le nombre des Votans étant $2q_1 + 1$, & la pluralité $2q'_1 + 1 = q'$,

on ait $\frac{2q_1 + 1}{q_1 - q'_1 + 1} v^{q_1 + q'_1} e^{q_1 - q'_1 + 1} \dots \dots + \frac{2q_1 + 1}{q_1} v^{q_1 + 1} e^{q_1}$

& le nombre des Votans étant $2q_1$, & la pluralité $2q'_1$,

$\frac{2q'_1}{q_1 - q'_1 + 1} v^{q_1 + q'_1 - 1} e^{q_1 - q'_1 + 1} \dots \dots \dots \frac{2q_1}{q_1 - 1} v^{q_1 + 1} e^{q_1 - 1}$

égaux à $1 - M$. On pourroit exiger aussi que $1 - V - E'$ fût égal à $1 - M$, en supposant que l'exemple d'un innocent renvoyé, seulement parce qu'il a contre lui une pluralité au-dessous de $2q'_1 + 1$, ou de $2q'_1$, peut être nuisible dans le cas où cet innocent, quoiqu'il le fût réellement, seroit regardé comme coupable dans l'opinion commune: mais comme dans ce même cas, l'exemple du risque qu'un innocent a couru, inspireroit une plus grande crainte du jugement à ceux qui le croient innocent, il paroît qu'on peut ne pas avoir égard aux termes qui répondent à la supposition d'un innocent déclaré coupable, avec une pluralité moindre que la pluralité exigée.

Quant au second inconvénient, soit D le danger auquel chaque Membre de la société est exposé pendant une année, par les crimes qui s'y commettent, & r le rapport du nombre des crimes commis par des accusés renvoyés au nombre total des crimes, Dr exprimera la partie du danger produite par ces accusés renvoyés. Soit C la probabilité qu'un accusé renvoyé est coupable, on pourra en général exprimer par DrC le danger auquel on est exposé de la part des accusés renvoyés, & coupables. Soit en effet a le nombre des accusés

G g ij

renvoyés existans, puisqu'il y a la probabilité C pour chacun qu'il est coupable, & I qu'il est innocent, la probabilité du danger qui résulte de ceux qui sont coupables, sera exprimée

$$\text{par } \frac{aC^a + (a-1) \cdot aC^{a-1}I + (a-2) \cdot \frac{a}{2} C^{a-2}I^2 + \dots + aCI^{a-1}}{a}$$

$$= (C+I)^{a-1} \cdot C = C. \text{ Donc } \frac{DrC}{a} \text{ exprime le danger}$$

$$\text{résultant de chaque coupable renvoyé, \& } \frac{DrC}{a} \cdot \frac{v^{q'-2}}{v^{q'-2} + e^{q'-2}}$$

le danger résultant de l'accusé renvoyé à la pluralité de $q' - 2$ voix contre lui. Le danger ne sera donc augmenté que dans

$$\text{la proportion de } \frac{DrC}{a} \cdot \frac{v^{q'-2}}{v^{q'-2} + e^{q'-2}} \text{ à } D \cdot \left(1 + \frac{rC}{a} \cdot \frac{v^{q'-2}}{v^{q'-2} + e^{q'-2}}\right),$$

danger total. Or, nous avons vu ci-dessus, *page 228*, que

si un danger $\frac{1}{30160}$ est augmenté dans la proportion de

$$\frac{10}{2784} \text{ à } 1 + \frac{10}{2784}, \text{ cette différence pouvoit être regardée}$$

comme insensible; & D est évidemment, dans tout pays bien

policé, beaucoup plus petit que $\frac{1}{30160}$. Donc il suffira que

$$\frac{rC}{a} \cdot \frac{v^{q'-2}}{v^{q'-2} + e^{q'-2}} \text{ soit plus petit que } \frac{10}{2784}. \text{ Si}$$

$$C = \frac{1-V'}{1+V-V'}, \text{ ce qui a lieu si on suppose aux jugemens}$$

d'après lesquels on a déterminé r , la même probabilité qu'à ceux qu'on a examinés, on voit facilement qu'il suffira d'avoir V'

même beaucoup plus petit que $\frac{2774}{2784}$, puisque le terme en

v & r sont chacun plus petits que 1, & que a est un nombre entier.

De même Dr étant le danger résultant des accusés renvoyés,

& $\frac{DrC}{a}$ le danger résultant de chaque coupable renvoyé,

soit a' le nombre des jugemens rendus par année, ou b' le

nombre connu des accusés renvoyés, on aura $\frac{a' D r C}{a} \cdot (1 - V')$
 ou $b' \cdot \frac{D r C}{a} \cdot \frac{1 - V'}{1 + V - V'}$ pour le danger résultant de
 l'absolution des coupables; d'où l'on voit que si $C = \frac{1 - V'}{1 + V - V'}$,
 il suffira que $\frac{a' r}{a} \cdot \frac{(1 - V')^2}{1 + V - V'}$ ou $\frac{b' r}{a} \cdot \frac{(1 - V')^2}{(1 + V - V')^2}$
 soient plus petits que $\frac{10}{2784}$, ce qui n'exige pas que V'
 soit très-grand.

On voit donc que ce fera en général la nécessité de parer
 au premier des deux inconvéniens de l'impunité, qui obligera
 de faire V' plus grand, c'est-à-dire, d'avoir des Juges plus
 éclairés & un Tribunal plus nombreux.

Nous ne suivrons pas plus loin cet objet. Les exemples
 précédens suffisent pour indiquer comment dans les différens
 genres de décisions on doit chercher à déterminer M & V' .
 Dans presque tous les cas, on trouvera de même qu'après
 avoir satisfait à ce qu'exige la sûreté dans la détermination
 de ces deux quantités, on se fera assuré d'avoir pour V une
 valeur très-suffisante.

On peut d'ailleurs déduire des questions précédentes
 quelques principes généraux; 1.^o que toutes les fois qu'il
 s'agit d'un risque inévitable, ce n'est pas le risque en lui-
 même qu'il faut examiner pour connoître la valeur de celui
 qu'on peut négliger, mais qu'il faut chercher une différence
 entre deux risques, que l'on puisse regarder comme nulle;
 2.^o que plus le risque est petit, plus cette différence peut
 être grande, relativement à la valeur du risque; 3.^o que les
 déterminations prises ainsi, seront incertaines toutes les fois
 que l'on n'aura point cherché cette plus grande valeur du
 risque qu'on peut négliger pour différens risques du même
 genre, afin de les comparer, de discuter les différens motifs
 qui peuvent les faire négliger, & de choisir la valeur cherchée
 parmi ceux de ces risques que la petitesse de leur probabilité
 fait seule négliger; 4.^o que dans les risques volontaires l'on

doit prendre la valeur du risque même, mais que dans ce cas il y a une incertitude nécessaire, produite par l'inconvénient de ne pas s'exposer à braver ce risque; ou les avantages qu'on trouve à s'y exposer; en sorte qu'il ne faut avoir égard qu'aux cas où cet intérêt est très-petit; 5.° qu'enfin les véritables déterminations qu'il faudroit préférer pour chaque cas, ne peuvent être connues avec précision, sans avoir fait un examen préliminaire très-détaillé des effets que produisent les différentes espèces de risques sur les hommes raisonnables dans un grand nombre de circonstances.

Aussi ne donnons-nous les valeurs que nous proposons ici, que comme des déterminations qui vraisemblablement s'éloignent peu des véritables, & plutôt comme des exemples de la méthode qu'il faut suivre, que comme des applications réelles de cette méthode.

Il nous reste à examiner ici une question qui n'est pas sans quelque difficulté. Après avoir déterminé V , V' & M dans le troisième exemple, de manière qu'il est résulté pour chacun dans chaque décision une sûreté suffisante, on peut considérer la première de ces quantités relativement au Législateur, & par conséquent non-seulement pour une décision particulière, mais pour une suite de décisions, ce qui fera naître cette question : *Doit-il suffire à un Législateur d'avoir établi une forme, telle que dans chaque jugement on puisse être assuré qu'un innocent ne sera pas condamné! ou est-il obligé, autant qu'il sera possible, d'établir une forme, telle que dans un certain espace de temps, ou pour un certain nombre de décisions, il soit assuré qu'il n'y en aura aucune qui condamne un innocent!* Il paroît que la seconde opinion doit être préférée. Voyons maintenant ce qui en résulte. Soit q le nombre de décisions pour lequel on veuille avoir cette assurance; elle sera exprimée par $(V)^q$, en sorte que si l'on appelle A l'assurance exigée, on devra avoir $(V)^q = A$ ou $V = A^{\frac{1}{q}}$, & il faudroit, pour déterminer V d'après cette hypothèse, connoître A & q ; mais V étant plus petit que l'unité, $(V)^q$ diminue lorsque q augmente,

& devient zéro lorsque $q = \frac{1}{\circ}$; d'où il résulte que, quelque valeur qu'on ait pour V , il y aura nécessairement un nombre q pour lequel il sera très-probable qu'au moins un innocent aura été condamné.

On ne peut donc faire V suffisamment grand pour n'être pas exposé à l'inconvénient que dans un grand espace de temps, ou un très-grand nombre de décisions, il devienne probable qu'un innocent a été condamné.

Mais s'il est impossible de donner à V une valeur, qui, pour un temps indéfini, préserve de la crainte de voir condamner un innocent, il paroît juste du moins de faire en sorte que chaque homme, soit Juge, soit dépositaire de la force publique, puisse avoir une grande assurance de n'avoir pas contribué à la condamnation d'un innocent, l'un par une erreur involontaire, l'autre par son consentement. On pourroit

donc prendre $\frac{V'}{V'+E'}$, ou la probabilité qu'un accusé condamné sera coupable, tel que, q représentant le nombre des hommes qui peuvent être condamnés dans l'espace d'une génération, on ait $\frac{V'}{V'+E'} = A^{\frac{1}{q}}$, & il ne s'agiroit plus que de déterminer A .

Pour déterminer A , on pourroit employer une méthode analogue à celle que nous avons exposée ci-dessus, & faire le raisonnement suivant: un homme n'est pas plus frappé de la crainte de mourir dans sa vingt-cinquième que dans sa vingtième année, & la différence de risque qu'il néglige par conséquent pour sa propre vie, est ici $\frac{1}{1900}$. Nous pourrions

donc faire $A = \frac{1899}{1900}$, c'est-à-dire, négliger une crainte d'être involontairement complice d'une condamnation injuste, lorsqu'elle est égale à une crainte que nous négligeons pour notre propre vie.

Supposons $q = 1000$, il faudra donc que $\frac{V'}{V'+E'}$

$$= \left(\frac{1899}{1900}\right)^{\frac{1}{1000}}$$
 , ce qui donnera $\frac{V'}{V'+E'}$ égal, à très-peu près à un deux-millionième. Or, si l'on suppose la probabilité de chaque Votant égale à $\frac{9}{10}$, on trouvera qu'en exigeant une pluralité de six voix pour condamner, & formant un Tribunal de vingt Juges, on aura $M > \frac{144767}{144768}$ & $\frac{V'}{V'+E'}$, tel que sur mille jugemens qui condamnent, on aura la probabilité $\frac{1899}{1900}$ qu'il n'y aura pas un innocent condamné. De plus, V' , ou la probabilité de ne pas laisser échapper un coupable, fera moindre que deux millièmes; & si on portoit le Tribunal à trente Juges, on auroit cette dernière probabilité égale au moins à ce que nous avons exigé ci-dessus. $\frac{V'}{V'+E'}$ seroit aussi beaucoup plus grand, en sorte que cette constitution de Tribunal rempliroit toutes les conditions que nous avons exigées: il seroit plus rigoureux encore que ce fût M & non $\frac{V'}{V'+E'}$ qui fût égal à $A^{\frac{1}{10}}$, ce qui conduiroit à exiger ici une pluralité de huit voix, & demanderoit aussi un Tribunal un peu plus nombreux.

Mais cette question conduit à une considération plus importante encore. Le cas de la condamnation d'un innocent, dont le risque est, par l'hypothèse, moindre que $\frac{1}{144768}$ ne peut arriver que parce que sur trente Votans, par exemple, la pluralité étant de six voix, dix-huit au moins ont voté contre la vérité. Or, si on regarde les motifs de juger d'après lesquels les hommes se décident, comme assujettis à une loi constante, ce concert en faveur de l'erreur ne peut avoir lieu que parce que les causes qui nous font tomber dans l'erreur ont agi dans une même affaire sur un grand nombre de Votans. Il est donc vraisemblable que toutes les fois que cet événement arrive, une de ces causes a eu, par des circonstances particulières,

particulières, une influence extraordinaire. Or, cette observation peut conduire à des moyens de procurer une sûreté beaucoup plus grande. Par exemple, 1.° si l'instruction est publique, un plus grand nombre de personnes ayant connoissance de l'affaire, pourront démêler ces circonstances singulières, & il deviendra très-probable que les Juges ne pourront être induits en erreur; 2.° si avant d'exécuter la condamnation, la signature du Prince ou du premier Magistrat d'une République, est nécessaire, ils seront très-probablement avertis de ces circonstances extraordinaires: alors, en refusant leur signature, ils pourront ou arrêter les effets de la condamnation, ou donner lieu à un examen du premier jugement; examen qu'il est facile de concilier avec la nécessité de ne pas laisser le coupable impuni, la promptitude dans l'administration de la Justice, & toutes les conditions qu'on peut exiger dans une bonne législation; 3.° la suppression de la peine de mort seroit qu'aucune injustice ne seroit rigoureusement irréparable. Les observations que nous venons de faire conduisent à cette conséquence. En effet, puisqu'il est rigoureusement démontré que, quelque précaution qu'on prenne, on ne peut empêcher qu'il n'y ait, pour un très-long espace de temps, une très-grande probabilité qu'un innocent sera condamné, il paroît également démontré que la peine de mort doit être abolie, & cette seule raison suffit pour détruire tous les raisonnemens employés pour en soutenir la nécessité ou la justice.

Fin de la troisième Partie,



Hh

QUATRIÈME PARTIE.

JUSQU'ICI nous n'avons considéré notre sujet que d'une manière abstraite, & les suppositions générales que nous avons faites s'éloignent trop de la réalité. Cette Partie est destinée à développer la méthode de faire entrer dans le calcul les principales données auxquelles on doit avoir égard pour que les résultats où l'on est conduit, soient applicables à la pratique.

PREMIÈRE QUESTION.

Nous avons supposé que, la probabilité de chaque voix étoit constante & la même pour tous les Votans, ces deux suppositions n'ont pas lieu dans l'ordre naturel; & le moyen de les rectifier sera le sujet de cette question & de la suivante.

Nous supposons ici que tous les hommes qui votent dans une assemblée ont une égale sagacité, & que leurs voix sont égales, mais toutes les affaires n'ont pas une égale clarté, ne sont pas jugées avec la même maturité; & on ne peut pas attribuer à ces décisions la même probabilité dans tous les cas. Supposons, par exemple, que vingt-cinq personnes aient prononcé sur une question à la pluralité de 20 contre 5, & que 425 aient prononcé à la pluralité de 220 contre 205, il suit des principes établis ci-dessus, que ces deux décisions sont également probables si elles ont été rendues par des hommes également éclairés. Cependant la raison naturelle, le simple bon sens, contredisent cette conclusion: il faut donc admettre que dans le second cas la probabilité de chaque voix est moindre, & ce qui en est une conséquence, que dans une décision rendue à la pluralité de 15 voix par 25 personnes, la probabilité de la voix de chacune est plus grande que si ces mêmes 25 personnes avoient rendu la décision

avec une pluralité de 5, de 3, de 1 voix seulement. Examinons d'abord cette question, en suivant les hypothèses de la troisième Partie.

Supposons donc que l'on ait un Tribunal de $2q + n$ Votans, & qu'une décision soit portée à la pluralité de $2q' + 1$ voix, la probabilité que la décision est vraie, sera exprimée dans la première hypothèse de la troisième Partie, par

$$\frac{m+q-q'+1 \dots m+q+q'+1}{(m+q-q'+1 \dots m+q+q'+1) + (n+q-q'+1 \dots n+q+q'+1)}$$

voyez troisième Partie, page 196; & la probabilité que la décision est fautive, sera

$$\frac{n+q-q'+1 \dots n+q+q'+1}{(m+q-q'+1 \dots m+q+q'+1) + (n+q-q'+1 \dots n+q+q'+1)}$$

Or, m , n & q' restant les mêmes, plus q sera grand, plus la probabilité de la décision diminuera, m étant plus grand que n , ce qui est d'accord avec le principe que nous avons établi.

Si on adopte la seconde hypothèse, on aura la probabilité de la décision exprimée dans le même cas par

$$\frac{\int \frac{x^{m+q+q'+1} \cdot (1-x)^{n+q-q'} dx}{\dots} + \int \frac{x^{n+q+q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'} dx}{\dots}}{\int \frac{x^{m+q+q'+1} \cdot (1-x)^{n+q-q'} dx}{\dots} + \int \frac{x^{n+q+q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'} dx}{\dots}}$$

& la probabilité qu'elle est fautive, par

$$\frac{\int \frac{x^{m+q-q'} \cdot (1-x)^{n+q+q'+1} dx}{\dots} + \int \frac{x^{n+q-q'} \cdot (1-x)^{m+q+q'+1} dx}{\dots}}{\int \frac{x^{m+q+q'+1} \cdot (1-x)^{n+q-q'} dx}{\dots} + \int \frac{x^{n+q+q'+1} \cdot (1-x)^{m+q-q'} dx}{\dots}}$$

Or, on trouvera de même ici que plus, m , n & q' restant les mêmes, q augmentera, plus au contraire le rapport de la probabilité que la décision est vraie, à la probabilité qu'elle est fautive, diminuera; en sorte qu'elle sera la plus petite possible, en supposant $q = \frac{1}{2}$.

Considérons maintenant dans les deux mêmes hypothèses, q comme constant, & q' comme variable, & supposons q' augmenté d'une unité.

H h ij

Dans la première hypothèse, le rapport des probabilités de la vérité ou de la fausseté de l'opinion, au lieu d'être

$$\frac{m+q-q'+1 \dots \dots \dots m+q+q'+1}{n+q-q'+1 \dots \dots \dots n+q+q'+1},$$

$$\frac{m+q-q' \dots \dots \dots m+q+q'+2}{n+q-q' \dots \dots \dots n+q+q'+2};$$

il augmente donc, m étant plus grand que n , dans le rapport $\frac{(m+q+q'+2) \cdot (m+q-q')}{(n+q+q'+2) \cdot (n+q-q')}$
 $= \frac{m^2 + (2q+2) \cdot m + (q+2) \cdot q - 2q' - q'^2}{n^2 + (2q+2) \cdot n + (q+2) \cdot q - 2q' - q'^2}$, quantité qui augmente toujours à mesure que q' augmente; au lieu que dans les hypothèses de la première Partie, cette quantité, toujours la même, quel que fût q' , étoit exprimée par $\frac{v^2}{c^2}$.

Dans la seconde hypothèse, on trouvera également la même conclusion : ainsi on aura toujours dans ces hypothèses, comme par le simple raisonnement, la probabilité de la décision rendue à une pluralité égale, d'autant plus petite que le nombre des Votans sera plus grand; & la probabilité moyenne des Votans d'autant plus grande, que la pluralité sera plus grande sur un nombre égal.

Mais cette observation ne suffit pas. En effet, il est aisé de voir, 1.° que, si l'on suppose q augmenté d'une quantité q_1 , par exemple, on aura le même résultat que si, q restant le même, les m & n avoient augmenté chacun d'une quantité q_1 ; 2.° que lorsque q' varie, les probabilités varient très-peu, lorsque m & n sont de très-grands nombres. Aussi est-ce en considérant la somme totale des décisions, que dans cette méthode nous trouvons un changement dans la probabilité, qui, au lieu d'être constante comme dans l'hypothèse de la première Partie, diminue lorsque q ou q' augmente dans celles de la troisième, au lieu que la diminution qu'indiquent la raison commune & l'expérience tombe principalement sur la dernière décision.

Maintenant, supposons que nous ayons, par la première des deux hypothèses de la troisième Partie, non la valeur

moyenne de la probabilité de la décision d'un Votant en faveur de la vérité, mais une probabilité M qu'elle ne tombera pas au-dessous d'une certaine limite. Soit ensuite $2q + 1$ le nombre des Votans qui composent un Tribunal, M^{2q+1} sera la probabilité que celle de la voix d'aucun d'eux ne sera au-dessous de ce terme. Si donc, *Partie III, page 228*, on fait $M^{2q+1} = \frac{144767}{144768}$, on aura une probabilité suffisante,

que la voix de chaque Votant est contenue entre ces limites, & l'on pourra, sans avoir égard aux décisions d'après lesquelles on a établi ces limites, regarder simplement la probabilité de chaque Votant comme contenue entre ces mêmes limites.

A la vérité, par ce moyen, l'on fait abstraction de la probabilité différente que peuvent avoir les différentes valeurs de la probabilité de la voix de chaque Votant; mais comme cette différence de probabilité est établie sur la distribution moyenne des voix qui décident pour ou contre la vérité dans la suite des décisions soumises à l'examen, on voit qu'on se rapprochera plutôt de la vérité qu'on ne s'en écartera, en n'employant l'observation que pour former les limites des probabilités, & en regardant comme également possibles toutes celles qui sont contenues entre ces limites.

La probabilité en faveur de la vérité, si le nombre des Votans est $2q + 1$, & la pluralité $2q' + 1$, sera donc

$$\frac{\int [x^{2q+1} \cdot (1-x)^{2q'} dx]}{\int [x^{2q+1} \cdot (1-x)^{2q'} dx] + \int [x^{2q'} \cdot (1-x)^{2q+1} dx]}$$

ces intégrales étant prises entre les limites des probabilités, que nous appellerons v & v' .

Les deux termes du rapport des probabilités de la vérité & de la fausseté de la décision, seront donc exprimés par

$$\frac{1}{q+q'+2} [v^{q+q'+2} \cdot (1-v)^{q-q'} - v'^{q+q'+2} \cdot (1-v')^{q-q'}]$$

$$+ \frac{q-q'}{q+q'+2 \cdot q+q'+3} [v^{q+q'+3} \cdot (1-v)^{q-q'-1} - v'^{q+q'+3} \cdot (1-v')^{q-q'-1}]$$

$$+ \frac{q-q'.q-q'-1}{q+q'+2.q+q'+3.q+q'+4} [v^{q+q'+2} \cdot (1-v)^{q-q'-2} - v'^{q+q'+2} \cdot (1-v')^{q-q'-2}]$$

$$\dots + \frac{q-q' \dots \dots \dots 1}{q+q'+2 \dots \dots \dots 2q+2} (v^{2q+2} - v'^{2q+2}),$$

& par

$$\frac{1}{q-q'+1} [v^{q-q'+1} \cdot (1-v)^{q+q'+1} - v'^{q-q'+1} \cdot (1-v')^{q+q'+1}]$$

$$+ \frac{q+q'+1}{q-q'+1.q-q'+2} [v^{q-q'+2} \cdot (1-v)^{q+q'} - v'^{q-q'+2} \cdot (1-v')^{q+q'}]$$

$$+ \frac{q+q'+1.q+q'}{q-q'+1.q-q'+2.q-q'+3} [v^{q-q'+3} \cdot (1-v)^{q+q'-1} - v'^{q-q'+3} \cdot (1-v')^{q+q'-1}]$$

$$\dots + \frac{q+q'+1 \dots \dots \dots 1}{q-q'+1 \dots \dots \dots 2q+2} (v^{2q+2} - v'^{2q+2}).$$

Multipliant l'un & l'autre de ces termes par $\frac{q+q'+2 \dots 2q+2}{q-q' \dots \dots \dots 1}$,

le premier deviendra $v^{2q+2} - v'^{2q+2} + (2q+2) \cdot [v^{2q+1} \cdot (1-v) - v'^{2q+1} \cdot (1-v')]$

$$+ \frac{2q+2}{2} [v^{2q} \cdot (1-v)^2 - v'^{2q} \cdot (1-v')^2] \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{2q+2}{q-q'} [v^{q+q'+2} \cdot (1-v)^{q-q'} - v'^{q+q'+2} \cdot (1-v')^{q-q'}],$$

& le second

$$v^{2q+2} - v'^{2q+2} + (2q+2) [v^{2q+1} \cdot (1-v) - v'^{2q+1} \cdot (1-v')]$$

$$+ \frac{2q+2}{2} [v^{2q} \cdot (1-v)^2 - v'^{2q} \cdot (1-v')^2] \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{2q+2}{q+q'+1} [v^{q-q'+1} \cdot (1-v)^{q+q'+1} - v'^{q-q'+1} \cdot (1-v')^{q+q'+1}];$$

& conservant les mêmes dénominations que dans la *première Partie*, & appelant U' & U les valeurs de V' & V répon-

dantes à v' , ce rapport sera exprimé par $\frac{V'-U'}{V-U}$; & faisant

$V' - V = D$ & $U - U' = D'$, on aura ce rapport égal

à $1 + \frac{D'-D}{V-U}$: Donc, v étant plus grand que v' , & par

conséquent $V > U$, la probabilité de la vérité l'emportera tant qu'on aura $D' > D$,

$$\begin{aligned} \text{Or, } D' - D &= \frac{2q+2}{q-q'+1} [v'^{q'+q+1} \cdot (1-v')^{q'-q+1} - v^{q'+q+1} \cdot (1-v)^{q'-q+1}] \\ &+ \dots + \frac{2q+2}{q+q'+1} [v'^{q'-q+1} \cdot (1-v')^{q'+q+1} - v^{q'-q+1} \cdot (1-v)^{q'+q+1}] \\ \text{ou } &[v'^{q+1} \cdot (1-v')^{q+1} - v^{q+1} \cdot (1-v)^{q+1}] \\ &\times \left\{ \frac{2q+2}{q+1} + \frac{2q+2}{q} \left(\frac{v'}{1-v'} + \frac{1-v'}{v'} - \frac{v}{1-v} - \frac{1-v}{v} \right) \right. \\ &+ \frac{2q+2}{q-1} \left[\frac{v'^2}{(1-v')^2} + \frac{(1-v')^2}{v'^2} - \frac{v^2}{(1-v)^2} - \frac{(1-v)^2}{v^2} \right] \dots \\ &\left. + \frac{2q+2}{q-q'+1} \left[\frac{v'^{q'}}{(1-v')^{q'}} + \frac{(1-v')^{q'}}{v'^{q'}} - \frac{v^{q'}}{(1-v)^{q'}} - \frac{(1-v)^{q'}}{v^{q'}} \right] \right\}, \end{aligned}$$

quantité qui sera positive tant que $v' > 1 - v$, égale à zéro quand $v' = 1 - v$, & négative ensuite; mais on sent que dans le cas qu'on examine ici, on doit chercher à avoir toujours v' au-dessus de $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, s'assurer une très-grande probabilité que jamais la probabilité de la voix de chaque Votant ne tombera au-dessous de $\frac{1}{2}$; & par conséquent on aura $v' > 1 - v$.

Supposons maintenant que q augmente d'une unité, V' augmentera, voyez page 26, d'une quantité

$$\frac{2q+2}{q-q'} v'^{q+q'+2} e^{q-q'+1} \left(\frac{q+q'+2}{q-q'+1} v - e \right);$$

V'' , d'une quantité

$$\frac{2q+2}{q-q'} v'^{q+q'+2} e'^{q-q'+1} \left(\frac{q+q'+2}{q-q'+1} v' - e' \right);$$

V , voyez page 25, d'une quantité

$$\frac{2q+2}{q+q'} v^{q-q'+1} e^{q+q'+2} \left(\frac{q-q'+1}{q+q'+2} v - e \right),$$

& U , d'une quantité

$$\frac{2q+2}{q+q'} v'^{q-q'+1} e'^{q+q'+2} \left(\frac{q-q'+1}{q+q'+2} v' - e' \right).$$

Et le rapport $\frac{V'' - U'}{V - U}$ diminuera à mesure que q augmentera; il sera toujours supérieur à l'unité, tant que l'on aura $v' > 1 - v$, & ensuite il deviendra plus petit que l'unité.

Si au contraire, q restant le même, on augmente q' , alors

le rapport $\frac{v'-U'}{v-U}$ augmentera en même-temps que q' . Il sera toujours plus grand que l'unité si $v' > 1 - v$, plus petit que l'unité si $v' < 1 - v$, & cette augmentation ne sera point proportionnelle, mais croissante en même-temps que q' . Il est nécessaire d'observer ici que dans le cas que nous considérons, lorsque q augmente, non-seulement la probabilité diminue pour les mêmes valeurs de v & de v' , mais que pour avoir M de la même valeur, il faudra supposer v plus grand & v' plus petit, ce qui tend encore à diminuer la probabilité.

Dans la seconde hypothèse de la *troisième Partie*, la probabilité que celle de la vérité d'une voix sera entre les limites v & v' , se trouve exprimée par

$$\frac{\int \frac{v'}{x^m \cdot (1-x)^n} dx + \int \frac{v}{x^m \cdot (1-x)^n} dx - \int \frac{v'}{x^m \cdot (1-x)^n} dx - \int \frac{v}{x^m \cdot (1-x)^n} dx}{\int \frac{1}{x^m \cdot (1-x)^n} dx}$$

Par exemple, soit $m = 100$, $n = 0$, $v = 1$, $v' = \frac{9}{10}$; nous aurons cette probabilité exprimée par

$$\frac{\frac{1}{101} \left[1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{101} + \left(\frac{1}{10}\right)^{101} \right]}{\frac{1}{101}} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{101} + \left(\frac{1}{10}\right)^{101},$$

c'est-à-dire, à peu-près $\frac{41841}{41842}$.

S E C O N D E Q U E S T I O N .

Nous avons supposé jusqu'ici que dans chaque jugement, les voix de tous les Votans avoient une même valeur; mais comme cette supposition n'est pas d'accord avec la réalité, nous sommes obligés de faire entrer dans le calcul l'inégalité qu'il peut y avoir entre les voix. Pour cela, supposons qu'un Tribunal soit composé de $2q + 1$ Votans, nous prendrons, comme ci-dessus, des limites au-dessous desquelles il soit suffisamment probable que la voix d'aucun des $2q + 1$ Votans

Votans ne pourra tomber. Nous partagerons l'espace qui sépare ces limites en un certain nombre r de parties égales, dont les limites soient $v, v', v'', v''', v^{iv} \dots v^{r-1}$, r n'étant pas plus grand que $2q + 1$. Nous chercherons les probabilités $W, W', W'' \dots W^{r-1}$ que la probabilité des voix est entre ces limites. Supposons maintenant une décision rendue à la pluralité de $2q' + 1$ voix, & cherchons la probabilité que cette décision est conforme ou contraire à la vérité.

Nous avons ici r probabilités différentes, qui sont renfermées entre les limites v & $v', v' & v'', v'' & v''' \dots$ & ainsi de suite. Si nous les exprimons par $x, x', x'' \dots x^{r-1}$, puisque $W, W' \dots W^{r-1}$, en expriment les probabilités respectives, la valeur moyenne de la probabilité de la vérité de la décision, en ayant égard aux différentes distributions possibles des Votans, sera exprimée par $(Wx + W'x' \dots + W^{r-1}x^{r-1})^{q+q'-1} \times [W.(1-x) + W'.(1-x') \dots + W^{r-1}.(1-x^{r-1})]^{q-q'}$.

Mais ici les puissances des x & des $1 - x$ ne doivent pas être regardées comme des puissances ordinaires; on doit donner seulement à $x^p \cdot (1 - x)^{p'}$ la valeur moyenne de cette quantité, prise pour la valeur de x depuis v jusqu'à v' , & de même pour les puissances des autres x . Il faudra donc prendre, au lieu de $x^p \cdot (1 - x)^{p'}$, $\int x^p \cdot (1 - x)^{p'} dx$, & ainsi de suite pour toutes les autres puissances; mais il peut y avoir deux manières de prendre ces intégrales; ou l'on peut dans chacune séparément prendre pour les x la valeur de $\int x^p \cdot (1 - x)^{p'} dx$ depuis $x = v$ jusqu'à $x = v'$, celle de $\int x'^{p'} \cdot (1 - x')^{p'} dx'$ depuis $x' = v'$ jusqu'à $x' = v''$, & ainsi de suite; ou bien, après avoir pris la valeur des intégrales pour $x = v, x' = v', x'' = v'', \&c.$ & en avoir formé celle du terme total, prendre la valeur du même terme pour $x = v', x' = v'', \&c.$ ou, ce qui revient au même, faisant

$x' = x - a$, $x'' = x - 2a$, $x''' = x - 3a$, &c. intégrer la formule entière pour les valeurs de x depuis v jusqu'à v' , c'est-à-dire, prendre la valeur de

$$\int [(W+W'+W'' \dots + W^{m-1})x - (W'+2W''+3W''' \dots + rW^{m-1})a]^{r-p+1} \\ \times [(W+W' \dots + W^{m-1})(1-x) + (W'+2W'' \dots + rW^{m-1})a]^{r-p} dx$$

depuis $x = v$ jusqu'à $x = v'$.

Dans la première hypothèse, on considère les valeurs moyennes de chaque combinaison de voix comme indépendantes; dans la seconde, on suppose que lorsque x diminue de v à v' , x' diminue par des diminutions égales de v' à v'' , & ainsi de suite; supposition qui est d'accord avec celle de la première question, & qui par conséquent convient le mieux au cas où l'on suppose les voix inégales entr'elles, & qu'elles varient à la fois d'un Votant à l'autre & d'une question à l'autre.

En adoptant donc cette hypothèse, on aura la probabilité que la décision est erronée, exprimée par

$$\int [(W+W' \dots + W^{m-1})x - (W'+2W'' \dots + rW^{m-1})a]^{r-p} \\ \times [(W+W' \dots + W^{m-1})(1-x) + (W'+2W'' \dots + rW^{m-1})a]^{r-p+1} dx,$$

l'intégrale étant prise depuis $x = v$ jusqu'à $x = v'$, & le rapport de la probabilité de la vérité à celle de la fausseté de

la décision, par $\frac{\int [z^{r-p+1} \cdot (1-z)^{r-p}] dz}{\int [z^{r-p} \cdot (1-z)^{r-p+1}] dz}$, l'intégrale étant

prise depuis $z = v - \frac{(W' \dots + rW^{m-1})a}{W+W' \dots + W^{m-1}}$ jusqu'à $v' - \frac{(W' \dots + rW^{m-1})a}{W+W' \dots + W^{m-1}}$, quantité de la même forme

que celle que nous avons considérée dans la question précédente, & de laquelle on peut tirer des résultats semblables.

Si le nombre des observations, d'après lesquelles on a déterminé les W , W' , &c. est très-grand, & que ces observations donnent des résultats, à peu-près constants, & n'ayant

pas entr'eux de grandes différences, que a soit très-petit par rapport à l'unité, & que ra même ne soit qu'une fraction assez petite, on aura, par la méthode de cet article, un moyen de déterminer la probabilité d'une décision dont on suppose la pluralité donnée, qui s'éloignera très-peu de la réalité.

Nous ne croyons même pas que des hypothèses plus compliquées conduisent plus près de la vérité, à moins que l'on n'ait des observations qui donnent en particulier la probabilité de différentes classes de Votans, ou des décisions rendues à différentes pluralités.

Dans l'application de la méthode exposée ci-dessus, il ne peut rester d'autre difficulté que la longueur des calculs: on la diminuera beaucoup en cherchant une expression d'un petit nombre de termes pour la valeur de $\int x^m \cdot (1-x)^n dx$, prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=a$. Or, nous avons vu, page 246, que $\int x^m \cdot (1-x)^n dx = \frac{V^{m+1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{m+1 \cdot \dots \cdot m+n+1}$, en supposant la pluralité $m+1-n$, & faisant $v=a$, $e=1-a$.

De plus, faisant $m+n=b$, & $n=b-m$, nous aurons $\int x^m \cdot (1-x)^{b-m} dx = \frac{b-m}{m+1} \int x^{m+1} \cdot (1-x)^{b-m-1} dx + \frac{1}{m+1} x^{m+1} \cdot (1-x)^{b-m}$; d'où appelant Z la valeur cherchée, nous aurons pour $x=a$, $Z - \frac{b-m}{m+1} \cdot (Z + \Delta Z) - \frac{1}{m+1} a^{m+1} \cdot (1-a)^{b-m} = 0$, la différence étant prise par rapport à m , & faisant $\Delta m = 1$. Or, cette équation devient une différentielle exacte si on la multiplie par $\frac{b+1 \cdot \dots \cdot b-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}$, & elle aura pour intégrale

$$Z = \frac{-\sum \left[\frac{a^{m+1}}{1-a} \cdot (1-a)^{b+1} \cdot \frac{b+1 \dots b-m+1}{1 \cdot 2 \dots m+1} \right]}{b+1 \dots b-m \cdot 1 \cdot 2 \dots m+1}; \text{ d'où}$$

en employant les méthodes développées dans la *seconde Partie*, page 163, on aura Z exprimé par un petit nombre de termes, soit lorsque m & n seront très-grands, soit lorsque, m étant très-grand, les puissances de $\frac{n}{m}$ devront être négligées à un certain terme, comme celles de $\frac{1}{m}$ ou de $\frac{1}{b}$.

T R O I S I È M E Q U E S T I O N .

Nous chercherons à déterminer ici l'influence que la voix d'un ou de plusieurs Votans a sur celle des autres, & la manière de calculer la probabilité d'un jugement, en ayant égard à cette influence.

Il ne peut être question de l'influence personnelle qui peut naître, soit de la confiance, soit de l'autorité de l'âge, ou de la réputation ou du crédit d'un des Votans, mais uniquement de celle qui a pour cause la forme du jugement ou la constitution du Tribunal. Si cependant une influence personnelle peut être assujettie au calcul, elle le sera par les mêmes principes.

On peut considérer, soit l'influence d'un Rapporteur sur les jugemens, celle d'un Président sur les décisions de son Tribunal, ou en général d'un Votant sur les autres, soit l'influence des Membres perpétuels d'une assemblée sur ceux qui changent à certaines époques, ou des Chefs d'un Corps sur les Membres ordinaires.

L'expérience seule peut encore fournir des données pour résoudre chaque question, & l'on sent qu'il faut les déterminer séparément pour chaque espèce d'influence.

Supposons d'abord que l'on sache que sur $a + b$ Votans a ont été de l'avis du Rapporteur, ou plutôt de celui dont on examine l'influence, & que nous désignerons par I , nous

aurons la probabilité qu'un Votant sera de l'avis de I , exprimée par $\frac{a+1}{a+b+2}$, & la probabilité qu'il sera de l'avis contraire, par $\frac{b+1}{a+b+2}$.

Soit v' la probabilité de la vérité de la voix de chaque Votant, indépendante de l'influence de la voix de I , e' celle de l'erreur, v'' la probabilité de la vérité de la voix du Votant I , & e'' celle de l'erreur. En supposant l'influence nulle, la probabilité qu'un des Votans seroit de l'avis de I , seroit donc $v'v'' + e'e''$, & la probabilité contraire $v'e'' + e'v''$.

Ainsi $\frac{a+1}{a+b+2} - v'e'' - e'e'' = i$ exprimera la probabilité qu'un Votant sera de l'avis de i , à cause de l'influence de cette voix, ou $v'e'' + v''e' - \frac{b+1}{a+b+2} = i$ la probabilité

que cette même influence empêchera un Votant d'être de l'avis contraire. Nous aurons donc $(v' + e') \cdot (1 - i)$ pour la probabilité que chaque Votant se décidera d'après son opinion, & i pour la probabilité qu'il suivra l'influence de I . Donc faisant $v = v' \cdot (1 - i)$, $e = e' \cdot (1 - i)$, v, e, i exprimeront la probabilité que chaque Votant décidera conformément à la vérité, à l'erreur, ou à l'avis de I .

Supposons l'exemple le plus simple, celui de deux Votans, outre le Votant I , & développons la formule $v^2 + 2ve + e^2 + 2vi + 2ei + i^2$. Supposons ensuite que cette formule soit multipliée par $v'' + e''$, & cherchons d'abord les valeurs de V ou V' , la pluralité étant 1, nous aurons $V = v^2v'' + 2v''ve + 2v''vi + 2v''ei + v''i^2 + v^2e'' = v'' \cdot [(v + i)^2 + 2e \cdot (v + i)] + v^2e''$. Supposons ensuite que l'on considère les termes où l'on a la pluralité de deux voix contre une, cette pluralité étant de l'avis de I , ces termes seront $2v''ve + 2v''ie + 2vee'' + 2vie = 2v''e \cdot (v + i) + 2e''v \cdot (e + i)$. La probabilité que la décision est alors plutôt en faveur de la vérité, sera donc

$\frac{v'' e \cdot (v+i)}{v'' e \cdot (v+i) + e' v \cdot (e+i)}$; quantité plus petite que v'' , qui seroit l'expression de la même quantité, si i étoit égal à zéro. Examinons maintenant la décision rendue à la pluralité de deux voix contre celle de I ; les termes qui y répondent, seront $v'' e^2 + e'' v^2$; ainsi la probabilité qu'elle est plutôt vraie

que fausse, sera $\frac{v'' e^2}{v'' e^2 + e'' v^2}$, la même que si l'avis de I n'avoit pas d'influence. Dans le cas où il n'y a pas d'influence, la probabilité est plus grande ou plus petite, en faveur de la vérité, dans le premier cas que dans le second, suivant que $v'' > < v$, & dans le cas de l'influence suivant $\frac{v''^2}{e''} > < \frac{v^2}{e}$

$\cdot \frac{v \cdot (e+i)}{e \cdot (v+i)}$. Soit $i = \frac{1}{10}$, $v' = \frac{4}{5}$, $e' = \frac{1}{5}$, $v = \frac{76}{100}$,

$e = \frac{19}{100}$, $i = \frac{5}{100}$, nous aurons $\frac{v''}{e''} > \frac{474}{100}$, ou $v'' > \frac{94}{100}$,

v' étant $\frac{80}{100}$, condition nécessaire pour que la probabilité ne soit pas moindre lorsque la pluralité est de l'avis de I . Supposons ensuite les trois décisions conformes, nous aurons pour le cas où elles sont pour la vérité, $v'' v^2 + 2 v'' v i + v'' i^2$, ou $v'' \cdot (v+i)^2$, & pour les cas où elles sont fausses $e'' \cdot (e+i)^2$. Ainsi l'influence de la voix I diminuera la probabilité, puisque

$\frac{v'' \cdot (v+i)^2}{e'' \cdot (e+i)^2} < \frac{v'' v^2}{e'' e^2}$. On voit donc, par cet exemple,

1.^o que la probabilité est plus petite que si le Votant I n'avoit aucune influence; 2.^o qu'à égalité de pluralité, la probabilité de la décision sera plus grande lorsqu'elle est contraire à l'avis de I que lorsqu'elle y est conforme, à moins que la probabilité de la voix de I ne surpasse d'une certaine quantité celle de la voix des autres Votans.

En général, si on a un nombre $2q + 1$ de Votans, & que la pluralité exigée soit $2q' + 1$, on aura

$$V = v'' [(v+i)^{2q} + 2q \cdot (v+i)^{2q-1} e \dots + \frac{2q}{q-q'} (v+i)^{q-q'} e^{q+q'}] + e'' [v^{2q} + 2q \cdot (v+i)^{2q-1} (e+i) \dots + \frac{2q}{q-q'+1} (v+i)^{q-q'+1} (e+i)^{q+q'-1}]$$

$$V = v[(v+i)^{q'} + 2q \cdot (v+i)^{q'-1} e \dots + \frac{2q}{q-q'} (v+i)^{q'+q'} \cdot e^{-q'}] \\ + e[v^{q'} + 2q \cdot v^{q'-1} \cdot (e+i) \dots + \frac{2q}{q-q'-1} v^{q'+q'+1} \cdot (e+i)^{q'-q'-1}]$$

& la probabilité d'avoir une pluralité de $2q' + 1$ pour l'avis de I , sera

$$\frac{2q}{q-q'} v^n \cdot (v+i)^{q'+q'} e^{q'-q'} + \frac{2q}{q-q'} e^n \cdot (e+i)^{q'+q'} v^{q'-q'}$$

& celle de l'avoir contraire à cet avis, sera

$$\frac{2q}{q-q'-1} v^{q'+q'+1} (e+i)^{q'-q'-1} e^n + \frac{2q}{q-q'-1} e^{q'+q'+1} (v+i)^{q'-q'-1} v^n$$

d'où l'on tire des conclusions semblables à celles de l'exemple précédent.

Supposons qu'on sache seulement que sur $a' + b'$ fois que I a voté, il a voté a' fois pour la vérité, & b' fois contre, & que les autres Votans sur $a'' + b''$ fois ont voté a'' fois en faveur de la vérité, & b'' fois contre; la probabilité qu'un Votant quelconque sera de l'avis de I , est, comme ci-dessus, $\frac{a'+1}{a'+b'+2}$;

celle qu'il sera de l'avis d'un autre Votant quelconque, sera

$$\frac{(a''+1) \cdot (a'+2)}{a''+b''+2 \cdot a'+b'+3} + \frac{b''+1 \cdot b'+2}{a''+b''+2 \cdot a''+b''+3}$$

Nous exprimerons donc par $\frac{a'+1}{a'+b'+2} - \frac{a''+1 \cdot a'+2}{a''+b''+2 \cdot a'+b'+3}$

$-\frac{b''+1 \cdot b'+2}{a''+b''+2 \cdot a''+b''+3}$ la probabilité de l'influence de I .

Cela posé, puisqu'il y a, indépendamment de cette influence, a'' Votans pour la vérité, & b'' contre, nous chercherons un troisième nombre c'' , tel que, si on suppose a'' Votans pour un avis, b'' pour un second, & c'' pour un troisième, la probabilité qu'un Votant sera de l'avis c'' , sera égale à celle de l'influence de I . Pour cela, on prendra la valeur de

$$\int [\int x^{a''} x'^{b''} (1-x-x')^{c''} dx] dx', \text{ les intégrales étant prises depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = 1-x', \text{ \& depuis } x' = 0 \text{ jusqu'à } x' = 1. \text{ Cette formule deviendra donc}$$

$$\frac{a'' \cdot a'' - 1 \dots 1 \cdot b'' \cdot b'' - 1 \dots 1 \cdot c'' \cdot c'' - 1 \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots a'' + b'' + c'' + 2}$$

on prendra ensuite la valeur de

$$\int [\int x^{a''} x' b'' (1 - x - x')^{c'' + 1} \partial x] \partial x'$$

dans les mêmes hypothèses, & elle sera $\frac{a'' \cdot a'' - 1 \dots 1 \cdot b'' \cdot b'' - 1 \dots 1 \cdot c'' + 1 \cdot c'' - 1 \dots 1}{1 \cdot 2 \dots a'' + b'' + c'' + 3}$;

& divisant la seconde par la première, on aura $\frac{c'' + 1}{a'' + b'' + c'' + 3}$

pour la probabilité qu'un Votant fera de l'avis c'' . On aura donc la valeur de c'' en égalant ce terme à la valeur de l'influence de I . Si a'' , b'' , c'' sont supposés égaux à $\frac{1}{3}$, on aura

$$\text{pour l'influence de } I, \frac{a+1}{a+b+1} = \frac{a''+b''}{(a''+b'')^2} = \frac{c''}{a''+b''+c''}$$

Or, le premier terme est ce que nous avons appelé i ci-dessus;

$$\text{nous aurons donc } a'' i + b'' i = c'' \cdot (1 - i), \text{ ou } \frac{c''}{a'' + b''} = \frac{i}{1 - i}, \text{ ce qui donne le même résultat que ci-dessus.}$$

On aura ici les valeurs de V , V' , & des autres quantités,

$$\text{en substituant dans les formules précédentes } \frac{a'+1}{a'+b'+2} \text{ à } v''$$

$$\frac{b'+1}{a'+b'+2} \text{ à } e'' \int [\int x^{a''} x' b'' + r' (1 - x - x')^{c''} [(1 - x')^{r'}] \partial x]$$

$$\partial x' \text{ à un terme } (v + i)^r \cdot e^{r'}$$

$$\int [\int x^{a''+r} x' b'' (1 - x - x')^{c''} [(1 - x')^{r'}] \partial x] \partial x' \text{ à un terme } v^r \cdot (e + i)^{r'}$$

$$\int [\int x^{a''+r} x' b'' + r' (1 - x - x')^{c''} \partial x] \partial x' \text{ à un terme } v^r e^{r'}, \text{ \& divisant chaque terme par}$$

$$\int [\int x^{a''} x' b'' (1 - x - x')^{c''} \partial x] \partial x', \text{ ou}$$

$$\frac{a'' \cdot a'' - 1 \dots 1 \cdot b'' \cdot b'' - 1 \dots 1 \cdot c'' \cdot c'' - 1 \dots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots a'' + b'' + c'' + 2}$$

Supposons

Supposons maintenant qu'il y ait trois Votans I , & confervons les mêmes dénominations, nous aurons la probabilité qu'un Votant quelconque fera de l'avis des trois Votans, exprimée par $\frac{a+1 \cdot a+2 \cdot a+3}{a+b+2 \cdot a+b+3 \cdot a+b+4}$; la probabilité qu'il fera de l'avis de deux Votans, & contre l'avis d'un troisième, sera exprimée par $3 \cdot \frac{a+1 \cdot a+2 \cdot b+1}{a+b+2 \cdot a+b+3 \cdot a+b+4}$; la probabilité qu'il fera de l'avis d'un contre l'avis des deux autres, par $3 \cdot \frac{a+1 \cdot b+1 \cdot b+2}{a+b+2 \cdot a+b+3 \cdot a+b+4}$; enfin la probabilité qu'il ne fera de l'avis d'aucun des trois, aura pour expression,

$$\frac{b+1 \cdot b+2 \cdot b+3}{a+b+2 \cdot a+b+3 \cdot a+b+4}.$$

Nous aurons de même pour la probabilité qu'un Votant fera de l'avis de trois autres qui n'ont aucune influence sur sa voix, $v'^4 + e'^4$; pour la probabilité qu'il n'en fera pas, $v'^3 e' + v' e'^3$; pour la probabilité qu'il fera de l'avis de deux autres, $3 v'^3 e' + 3 e'^3 v'$; pour la probabilité qu'il ne fera que de l'avis d'un seul, $6 v'^2 e'^2$.

Soient i, i', i'', i''' ces quatre différences prises positivement. Si on fait $v = v' \cdot (1 - i)$, $e = e' \cdot (1 - i)$, $v_1 = v' \cdot (1 - i_1)$, $e_1 = e' \cdot (1 - i_1)$, $v'' = v' \cdot (1 - i'')$, $e'' = e' \cdot (1 - i'')$, $v''' = v' \cdot (1 - i''')$, $e''' = e' \cdot (1 - i''')$, nous aurons pour les probabilités des décisions pour les trois I , pour aucun des I , pour deux I contre un, pour un I contre deux, $v + i + e$, $v_1 + i_1 + e_1$, $v'' + i'' + e''$, $v''' + i''' + e'''$. Cela posé, supposons que le Tribunal soit composé de $2q + 1$ Votans, que les trois Votans I soient de même avis, & que cet avis soit conforme à la vérité; la probabilité que cette combinaison a lieu, sera v''^3 ; & pour avoir les combinaisons des $2q - 2$ autres voix, on prendra les différens termes de $[(v + i) + e]^{2q-2}$, divisés par leur somme totale.

Si l'on a les trois I du même avis, & que cet avis soit

faux, la probabilité de cette combinaison sera e^{n^3} , & pour les combinaisons de $2q - 2$ voix, on prendra les différens termes de $[v, + (e + i)]^{2q-2}$; divisés par leur somme totale.

Si des trois voix I , deux sont pour la vérité & une pour l'erreur, la probabilité de cette combinaison sera $3v^{n^2}e^n$; & quant à ceux qui voteront pour la pluralité de I , la probabilité pour chacun qu'il suivra ce vœu, sera $v_n + i_n$; & pour chacun de ceux qui ne le suivront pas, elle sera e_m . On aura donc les combinaisons des $2q - 2$ autres voix, exprimés par les termes de $\frac{[(v_n + i_n) + e_m]^{2q-2}}{(v_n + i_n + e_m)^{2q-2}}$.

De même, si des trois voix I , une seule est pour la vérité & deux pour l'erreur, $3e^{n^2}v^n$ exprimera la probabilité de cette combinaison, & l'on aura les combinaisons des $2q - 2$ autres voix par les termes de $\frac{[(e_n + i_n) + v_n]^{2q-2}}{(v_n + i_n + e_n)^{2q-2}}$.

Si l'on considère maintenant la seconde hypothèse, il faudra prendre $\frac{a^n + 1 \dots \dots \dots a^n + 4}{a' + b' + 2 \dots \dots \dots a' + b' + 5}$ au lieu de v'^4 ,
 $\frac{b^n + 1 \dots \dots \dots b^n + 4}{a'' + b'' + 2 \dots \dots \dots a'' + b'' + 5}$ au lieu de e'^4 ,
 $\frac{a^n + 1 \cdot a^n + 2 \cdot a^n + 3 \cdot b^n + 1}{a' + b' + 2 \dots \dots \dots a' + b' + 5}$ au lieu de $v'^3 e$,
 $\frac{a^n + 1 \cdot b^n + 1 \cdot b^n + 2 \cdot b^n + 3}{a'' + b'' + 2 \dots \dots \dots a'' + b'' + 5}$ au lieu de $e'^3 v$,
 & $\frac{a^n + 1 \cdot a^n + 2 \cdot b^n + 1 \cdot b^n + 2}{a' + b' + 2 \dots \dots \dots a' + b' + 5}$ au lieu de $v'^2 e'^2$.

Connoissant ensuite les influences des I dans ces quatre combinaisons, on prendra des nombres $c^n, c''^n, c'''^n, c''''^n$, tels que a^n étant le nombre des Votans en faveur de la vérité, & b^n le nombre des Votans en faveur de l'erreur; 1.^o c^n exprime le nombre des Votans en faveur des I , qui donnent une influence égale à celle qu'on a trouvée pour le premier cas; 2.^o que c''^n exprime un nombre qui remplisse les

mêmes conditions avec celle que $\frac{a''}{b''} = \frac{a'}{b'}$, & que $a'' + b'' + c'' = a' + b' + c'$; 3.^o que c'' exprime un nombre qui remplisse les mêmes conditions, & celles que $\frac{a'''}{b'''} = \frac{a'}{b'}$, & $a''' + b''' + c''' = a' + b' + c'$, & 4.^o enfin que c''' exprime cette même influence avec la condition que $\frac{a''''}{b''''} = \frac{a'}{b'}$, & que $a'''' + b'''' + c'''' = a' + b' + c'$, & il suffira de mettre $\frac{d+1 \cdot d+2 \cdot d+3}{d+b'+2 \cdot d+b'+3 \cdot d+b'+4}$ au lieu de v''^2 , $3 \cdot \frac{d+1 \cdot d+2 \cdot b'+1}{d+b'+2 \cdot d+b'+3 \cdot d+b'+4}$ au lieu de $3 v''^2 e''$, $3 \cdot \frac{d+1 \cdot b'+1 \cdot b'+2}{d+b'+2 \cdot d+b'+3 \cdot d+b'+4}$ au lieu de $3 e''^2 v''$, & $\frac{b'+1 \cdot b'+2 \cdot b'+4}{d+b'+2 \cdot d+b'+3 \cdot d+b'+4}$ au lieu de e''^2 . On substituera à un terme

$$(v+i)^r \cdot e_i^{r'} \frac{\int [\int x^{a''} \cdot x^{b''+r'} \cdot (1-x-x')^{a''} \cdot (1-x')^{r'} dx] dx'}{\int [\int x^{a''} \cdot x^{b''} \cdot (1-x-x')^{a''} dx] dx'}$$

au lieu de

$$v_i^r \cdot (i+e)^{r'} \frac{\int [\int x^{a''+r} \cdot x^{b''} \cdot (1-x-x')^{a''} \cdot (1-x')^{r'} dx] dx'}{\int [\int x^{a''} \cdot x^{b''} \cdot (1-x-x')^{a''} dx] dx'}$$

& semblablement pour les autres termes.

En suivant avec attention la méthode que nous venons d'exposer, il est aisé de voir qu'elle n'est pas absolument rigoureuse, & qu'elle est d'autant plus imparfaite, que les nombres a, b, a', b', a'', b'' , sont plus petits. On voit aussi qu'il faut les avoir assez grands pour que, si les valeurs des c ne sont pas des nombres entiers, on puisse prendre, sans une erreur considérable, au lieu des c , & des $a'', b'', a''', b''', a''''$, les nombres entiers qui en diffèrent le moins.

Nous allons maintenant suivre une méthode plus directe.

Soit v la probabilité de la vérité de I , e celle de l'erreur, i la probabilité qu'un Votant sera de l'avis de I lorsqu'il vote pour la vérité, n qu'il n'en sera pas, i' & n' les quantités correspondantes pour un Votant qui est de l'avis contraire à I ; soit un Tribunal composé de $2q + 1$ Votans, dont un est I , $v \cdot (i + n)^{2q} + (e \cdot i' + n')^{2q}$ exprimeront le système de toutes les combinaisons possibles.

Supposons maintenant que sur $a + b$ voix, données par I , il ait jugé a fois pour la vérité, & b fois pour l'erreur; que dans les votations, lorsque I étoit pour la vérité, il y ait eu $a' + b'$ voix données, a' pour I & pour la vérité, b' contre I & contre la vérité; que dans les votations où I s'est trompé, il y ait eu $a'' + b''$ voix données, a'' contre I & pour la vérité, b'' pour I & contre la vérité.

On aura le système de combinaisons possibles pour une décision à rendre par $2q + 1$ Votans, dont I est un,

$$\text{exprimé par } \frac{a+1}{a+b+2} \frac{\int x^{a'} \cdot (1-x)^{b'} \cdot (x+(1-x))^{2q} dx}{\int x^{a''} \cdot (1-x)^{b''} dx} \\ + \frac{b+1}{a+b+2} \frac{\int x^{a''} \cdot (1-x)^{b''} \cdot (x+(1-x))^{2q} dx}{\int x^{a''} \cdot (1-x)^{b''} dx}, \text{ ces formules}$$

étant ordonnées par rapport aux puissances de x & de $1 - x$ en q . Le nombre des termes en a, a', a'' , qui entrent dans chaque produit, désigne le nombre des voix en faveur de la vérité.

Nous aurons par ce moyen, d'une manière très-simple, les différentes fonctions qui expriment la probabilité; mais il faut observer que ce n'est pas assez pour juger de l'influence de la voix I ; puisque les données d'après lesquelles ces probabilités ont été prises, sont supposées avoir été soumises à cette influence, si elle existe. Mais nous avons ici sur $a' + a'' + b' + b''$ Votans, $a' + a''$ qui ont voté pour la vérité, & $b' + b''$ pour l'erreur, en faisant abstraction de la voix I . On prendra donc, 1.^o la probabilité que, si on a $a' + a''$ voix pour la vérité, & $b' + b''$ voix pour l'erreur,

dans une combinaison ; a' voix pour la vérité & b' pour l'erreur dans une autre ; a'' voix pour la vérité & b'' voix pour l'erreur dans une troisième : il résultera de l'une de ces combinaisons plus de probabilité en faveur de la vérité que de l'autre. Les formules de la troisième Partie nous donneront, pour le cas où la première combinaison aura l'avantage

sur la seconde,
$$\frac{\int \{ x^{a'+a''} \cdot (1-x)^{b'+b''} [\int x'^{a'} \cdot (1-x')^{b'} dx'] \} dx}{\int [x^{a'+a''} \cdot (1-x)^{b'+b''} dx] \times \int [x'^{a'} \cdot (1-x')^{b'} dx']}$$

Pour celui où la première l'aura sur la troisième, la même formule, en mettant a'' & b'' au lieu de a' & b' ; & réciproquement pour celui où la seconde l'emporte sur la troisième,

la formule
$$\frac{\int \{ x^{a'} \cdot (1-x)^{b'} [\int x^{a''} \cdot (1-x)^{b''} dx'] \} dx}{\int [x^{a'} \cdot (1-x)^{b'} dx] \cdot \int [x^{a''} \cdot (1-x)^{b''} dx]}$$
, les

intégrales sous le signe étant prises depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = x$.

2.° Soit P la première de ces probabilités, P' la seconde, P'' la troisième, $\frac{a+1}{a+b+2} P + \frac{b+1}{a+b+2} P'$ exprimera la probabilité que la combinaison de voix, où l'on a égard à l'influence, est moins favorable à la vérité que celle où l'on supposeroit ces mêmes voix prises en totalité, & sans égard à l'influence.

3.° P'' est la probabilité qu'il y a plus d'avantage en faveur de la vérité, lorsque le Votant I lui est favorable. Donc, suivant que $\frac{a+1}{a+b+2} P'' + \frac{b+1}{a+b+2} \cdot (1 - P'')$ sera $>$ ou $= \frac{1}{2}$, on aura une influence favorable pour la vérité, contre la vérité, ou une influence nulle.

On peut objecter contre cette méthode, que non-seulement la distribution des voix, mais leur nombre absolu & la supériorité de $a' + a'' + b' + b''$ sur $a' + b'$ & $a'' + b''$, influent dans les résultats; d'où il arrive que si l'on a $\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$, on pourra encore avoir une probabilité pour ou contre la

vérité, causée par l'influence, quoique dans ce cas elle ne doive pas exister. Nous observerons ici que dans une méthode rigoureuse, la grandeur absolue des nombres doit être admise; mais si l'on ne veut avoir égard qu'à leur distribution, on y parviendra, en prenant dans le système qui a le plus de voix toutes les combinaisons possibles d'un nombre de voix égal à celui du système qui en a le moins, & en formant ainsi une valeur moyenne des probabilités cherchées.

Enfin, comme nous l'avons observé, pour que la méthode fût réellement rigoureuse, il faudroit qu'on pût comparer à la décision où *I* a voté, des décisions à l'abri de toute influence.

Si l'on suppose trois Votans *I*, dont l'influence a pu agir, & qu'on ait des observations sur le cas seulement où un Votant a exercé cette influence, on pourra prendre la méthode suivante; 1.° on formera toutes les combinaisons possibles de trois Votans prononçant en faveur de la vérité; 2.° de deux Votans prononçant en faveur de la vérité, & un prononçant en faveur de l'erreur; 3.° de deux pour l'erreur & un pour la vérité; 4.° de trois pour l'erreur. Soient *a*, *a*₁, *a*₂, *a*₃ les nombres des voix vraies, & *b*, *b*₁, *b*₂, *b*₃ les nombres des voix dans ces combinaisons.

Nous aurons la probabilité pour les décisions futures, rendues par 2 *g* + 1 Votans, en développant la série

$$\begin{aligned}
 & \frac{a+1 \cdot a+2 \cdot a+3}{a+b+2 \cdot a+b+3 \cdot a+b+4} & \frac{\int [x^a \cdot (1-x)^b \cdot (x+1-x)^{2g+1} dx]}{\int [x^a \cdot (1-x)^b dx]} \\
 + 3 & \frac{a+1 \cdot a+2 \cdot b+1}{a+b+2 \cdot a+b+3 \cdot a+b+4} & \frac{\int [x^a (1-x)^b \cdot [x+(1-x)]^{2g+1} dx]}{\int [x^a \cdot (1-x)^b dx]} \\
 + 3 & \frac{a+1 \cdot b+1 \cdot b+2}{a+b+2 \cdot a+b+3 \cdot a+b+4} & \frac{\int [x^a \cdot (1-x)^b \cdot [x+(1-x)]^{2g+1} dx]}{\int [x^a \cdot (1-x)^b dx]} \\
 + & \frac{b+1 \cdot b+2 \cdot b+3}{a+b+2 \cdot a+b+3 \cdot a+b+4} & \frac{\int [x^a \cdot (1-x)^b \cdot [x+(1-x)]^{2g+1} dx]}{\int [x^a \cdot (1-x)^b dx]}
 \end{aligned}$$

Il est aisé d'appliquer ces mêmes principes à un plus grand nombre de Votans I . Si dans cette détermination on veut éviter les différences de probabilité qui naissent de la grandeur absolue des a & des b , & que les décisions soient rendues par des assemblées où le nombre de voix soit égal, on y parviendra par le moyen que nous venons d'indiquer.

Pour que cette dernière méthode fût rigoureuse, il faudroit avoir immédiatement des décisions soumises à l'influence de trois Votans I . En effet, dans celle que nous donnons ici, on ne connoît pas la manière dont l'influence des trois I agit, & on se borne à supposer que si, par exemple, I Votant pour la vérité détermine m voix sur n , & I Votant pour l'erreur détermine m' voix sur n , trois Votans I s'ils s'accordent pour la vérité, détermineront $3m$ voix sur $3n$; que si deux votent pour la vérité, & un pour l'erreur, ils détermineront $2m - m'$ voix pour la vérité, & semblablement pour les deux autres cas; supposition un peu arbitraire, mais qui paroît très-peu s'écarter de la vérité.

Nous n'avons déterminé jusqu'ici que la probabilité des décisions lorsque l'influence a lieu; & la probabilité que cette influence existe: il reste à en déterminer l'effet, mais cette détermination n'a aucune difficulté; elle consiste à prendre dans chaque hypothèse qu'on veut considérer, la probabilité de la vérité de la décision telle qu'elle seroit si elle étoit débarrassée de l'influence, & telle qu'elle est lorsque l'influence existe. Soit P la probabilité de la vérité de la décision dans le premier cas, & P' dans le second, il est clair que $P - P'$ exprimera l'effet de l'influence en faveur de la vérité. La seconde méthode de la troisième Partie s'applique également à toutes ces questions.

Si l'on connoît seulement les décisions vraies ou fausses, rendues avec la voix du Votant I dans chacune, on aura de même les résultats cherchés ci-dessus; mais alors il faut employer la première méthode de la troisième Partie. Cependant il seroit possible d'y appliquer aussi la seconde, mais cette application ne seroit pas sans difficulté.

Si on a une décision rendue conformément à l'opinion d'un Votant I , on aura, page 255, $\frac{v^n}{e^n} \cdot \frac{(v+i)^{n'}}{(e+i)^{n'}}$ le

rapport de la probabilité de la vérité à l'erreur, la pluralité étant $2q' + 1$. Si on suppose que l'influence agisse sur tous les Votans qui décident conformément à l'avis de I , cette formule exprime la vraie probabilité; mais si l'on suppose que cette influence détermine absolument quelques voix, la même formule n'est que la probabilité moyenne; & dans le cas où tous les Votans qui sont de l'avis de I se trouveroient

décidés par la seule influence, elle seroit $\frac{v^n}{e^n} \frac{i^{n'}}{i^{n'}+1} \frac{e^{n'}}{v^{n'}-1}$
 $= \frac{v^n \cdot e^{-n'}}{e^n \cdot v^{n'-1}}$. Or, pour peu que i soit grand par rapport à v ,

il est clair que la seconde hypothèse peut avoir lieu. On ne peut donc avoir de confiance en un Tribunal que lorsque i est très-petit par rapport à v . Voyez la Question suivante.

Q U A T R I È M E Q U E S T I O N .

Nous examinerons ici l'influence qui peut résulter de la passion ou de la mauvaise foi des Votans.

Comme la probabilité n'a pu être déterminée que par l'expérience, si l'on suit la première méthode de la *troisième Partie*, ou qu'en suivant la seconde, on suppose que l'influence de la corruption ou de la passion sur les jugemens ne fait pas tomber la probabilité au-dessous de $\frac{1}{2}$, alors il est évident que cet élément est entré dans le calcul, & qu'il n'y a par conséquent rien à corriger.

Or, la supposition que l'influence de la mauvaise foi ou de la passion ne fait pas tomber la probabilité au-dessous de $\frac{1}{2}$, est très-légitime. En effet, on doit non-seulement constituer un Tribunal de manière à remplir les conditions exposées dans la *troisième Partie*, page 223; mais on doit encore pourvoir, par le choix des Membres, par des exclusions,
 par

par des récusations, à ce que jamais on ne puisse craindre que les passions ou la corruption y aient une influence très-dangereuse; & dans le cas où l'on ne pourroit avoir la même certitude pour toutes les décisions d'après lesquelles on a établi la valeur de la probabilité, il est aisé de sentir que, soit par la réclamation que les décisions auroient excitées, soit par la nature de l'objet sur lequel elles auroient statué, on pourroit distinguer parmi ces décisions celles qui doivent être suspectes, & qu'alors on doit rejeter. Par exemple, s'il s'agit de la probabilité des jugemens en matière criminelle, ceux qui ont été rendus sur des crimes d'État dans un pays agité par des partis, ceux qui ont pour objet des délits locaux, c'est-à-dire, des actions à peu-près indifférentes, dont les préjugés ont fait des crimes, ceux où l'intérêt d'un Tribunal perpétuel a pu agir, &c. doivent être absolument rejetés, & ce n'est pas d'après eux que l'on doit établir la probabilité de la décision de ceux qui ont prononcé les jugemens.

Mais il reste ici une observation importante à faire. Soient v' & e' les probabilités de la vérité ou de la fausseté d'un jugement, en faisant abstraction de toute influence, & soit $2i$ la probabilité de cette influence qui peut déterminer également pour ou contre la vérité; nous aurons, en ayant égard à l'influence, $v = v'(v' + e' - 2i)$, $e = e'(v' + e' - 2i)$, pour les probabilités de la vérité ou de la fausseté de l'opinion, indépendamment de l'influence, $2i$ pour celle de l'influence, & $v + i$, $e + i$ exprimeront la probabilité totale de la vérité ou de la fausseté de la décision.

Cela posé, soit un jugement rendu à la pluralité de $2q' + 1$ voix, le nombre des Votans étant $2q' + 1$; le rapport de la probabilité de la vérité de ce jugement à celle de l'erreur,

sera ici $\frac{(v+i)^{2q'+1}}{(e+i)^{2q'+1}} < \frac{v^{2q'+1}}{e^{2q'+1}}$, qu'on auroit eu pour la valeur

du même rapport si l'influence étoit nulle. Si i est fort petit par rapport à v , il est clair que cette différence sera peu importante; mais la première expression a été produite par

LI

le rapport $\frac{(v+i)^{q+q'+1} \cdot (e+i)^{q'-q}}{(v+i)^{q'-q} \cdot (e+i)^{q+q'+1}}$, en sorte que $\frac{(v+i)^{q+q'+1}}{(e+i)^{q'+q}}$ ne représente que la valeur moyenne du rapport; & que, si on suppose, par exemple, que dans l'avis de la pluralité m aient cédé à l'influence, & que n y aient cédé dans l'avis de la minorité, $\frac{v^{q+q'+1-m} \cdot e^{q'-q-m} \cdot i^{m+n}}{e^{q+q'+1-m} \cdot v^{q'-q-m} \cdot i^{m+n}}$, ou $\frac{v^{q+q'+1-m+n}}{e^{q+q'+1-m+n}}$ exprime ce rapport dans ce cas particulier.

Or, m peut avoir toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $q + q' + 1$, & n toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à $q - q'$. Supposons donc $n = 0$, & $m = q + q' + 1$, ce qui est le cas le plus défavorable à la vérité de la décision, on aura ce rapport exprimé par $\frac{e^{q'-q}}{v^{q'-q}}$, & par conséquent plus petit que l'unité, & d'autant plus petit que q est plus grand.

Une décision étant supposée rendue, on ne peut savoir le nombre des voix que l'influence a déterminées, ni par conséquent les valeurs de m . Soit donc P la probabilité que m ne s'étendra pas au-delà d'une certaine limite, & soit toujours $n = 0$, nous aurons une probabilité P que ce rapport ne sera pas au-dessous de $\frac{v^{q+q'+1-m}}{e^{q+q'+1-m}}$, & il faudra par conséquent que $P \cdot \frac{v^{q+q'+1-m}}{v^{q+q'+1-m} + e^{q+q'+1-m}} = M$, c'est-à-dire, donne une assurance suffisante de la vérité de la décision. Or, supposons que, l'influence étant nulle, on eût $\frac{v^{q+q'+1-m}}{v^{q+q'+1-m} + e^{q+q'+1-m}} = M_2$

il faudra que $P = \frac{1 + (\frac{e}{v})^{q+q'+1-m}}{1 + (\frac{e}{v})^{q+q'+1-m}}$, ce qui oblige à faire

$m < m'$, P étant la valeur de V' , en mettant $\frac{v}{v+i}$ pour v , $\frac{i}{v+i}$ pour e , $q + q' + 1$ pour $2q + 1$ ou $2q$, &

supposant la pluralité $q + q' + 1 - 2m$. Si donc on connoît v, e , la limite au-dessous de laquelle on peut supposer i , $2q + 1$, & $2q' + 1 - m'$, on déterminera la valeur de q' , qui satisfera à cette équation, ou la plus petite valeur de q' qui rendra P plus grand que la valeur trouvée ci-dessus, & l'on aura la pluralité qu'il faut exiger pour avoir une assurance suffisante, en ayant égard à l'influence.

CINQUIÈME QUESTION.

Si l'on prend l'hypothèse huitième de la première Partie, & qu'en conséquence l'on suppose que l'on prendra les voix jusqu'à ce que l'unanimité se soit réunie pour un des deux avis, nous avons vu que le calcul donnoit la même probabilité, soit que cette unanimité ait lieu immédiatement, soit qu'elle ne se forme qu'après plusieurs changemens d'avis, soit que l'on se réunisse à la majorité, soit que l'avis de la minorité finisse, par avoir tous les suffrages.

Nous avons observé alors que cette conclusion étoit contraire à ce que la simple raison paroît dicter, & en même temps à ce qui doit avoir lieu dans la réalité. En effet, on suppose ici rigoureusement égales la probabilité de l'avis d'un Votant, qui décide d'après ses propres lumières, & celle de l'avis du même Votant, lorsqu'après des débats, il finit par se ranger à un avis contraire au premier, ce qui ne peut avoir lieu. Il s'agit donc de trouver des moyens d'évaluer les probabilités dans ce dernier cas.

Nous remarquerons d'abord que, si on emploie pour déterminer la probabilité d'une décision future la première méthode de la troisième Partie, & qu'on l'établisse d'après des décisions rendues suivant cette forme, alors on aura immédiatement la vraie probabilité, puisqu'on l'a déduite de décisions dans lesquelles les probabilités de chaque voix ont été soumises aux changemens qu'y peut produire cette forme de décisions.

Mais, 1.^o cette méthode ne peut être employée si on ne connoît la probabilité des voix que par des observations faites sur des décisions rendues sous une autre forme, ou si on ne

la connoît que par la seconde méthode; 2.^o on ne pourroit dans ce cas connoître la plus petite probabilité résultante de cette forme de décisions, ce qu'il est cependant essentiel de connoître toutes les fois que cette connoissance est possible, comme nous l'avons observé, *Partie I, p. 79*. Pour y parvenir, il faut analyser d'abord ce que c'est qu'un avis qui prononce sur la vérité d'une proposition. Si la proposition est susceptible d'une démonstration rigoureuse ou d'une probabilité très-grande & non assignable, l'avis qui l'adopte prononce seulement: *je crois cette proposition prouvée*. Si la proposition est un fait susceptible de plusieurs degrés de probabilité, l'avis qui l'adopte prononce seulement qu'elle a un tel degré de probabilité dont les limites peuvent être plus ou moins étendues, suivant les circonstances, la nature de l'objet, son importance, &c. & dans ce dernier cas, il peut arriver, ou qu'adopter la proposition soit croire qu'elle a tel degré de probabilité, & que la rejeter, ce soit prononcer qu'elle a un moindre degré de probabilité; ou bien qu'en adoptant une proposition, on prononcera seulement qu'elle est plus probable que la contradictoire. Par exemple, s'il s'agit du jugement d'un accusé, celui qui prononce, *l'accusé est coupable*, prononce seulement que la probabilité du crime de l'accusé est au-dessus d'une certaine limite; & celui qui vote pour le renvoi de l'accusé, prononce seulement au contraire que la probabilité du crime est au-dessous de cette limite. S'il s'agit de prononcer sur la propriété d'un bien disputé par deux personnes, celui qui l'adjudge à l'une d'elles, prononce seulement que le droit de cette personne sur le bien lui paroît plus probable que celui du concurrent.

Pour la première espèce de proposition, la probabilité de chaque voix doit rester la même avant & après les débats: ainsi l'on ne pourroit exiger que toutes les voix se réunissent pour l'unanimité, à moins de supposer que tous les Votans finiront par voir également la vérité, ou de consentir qu'une partie des Votans finisse par décider contre sa conscience. Or, la première supposition ne peut être admise qu'en laissant

le temps nécessaire pour dissiper les préjugés qui empêchent de saisir les preuves d'une vérité, ou pour établir ces preuves d'une manière victorieuse: aussi dans aucun pays policé n'a-t-on jamais exigé cette unanimité pour la décision des questions dont la solution dépend du raisonnement.

Dans la seconde classe de propositions, on peut admettre un avis, en lui supposant une probabilité plus ou moins grande, & alors la probabilité de la vérité de la décision, formée par cet avis, peut aussi varier, quoique la sagacité du Votant reste la même. Soit donc v la probabilité qu'un Votant ne se trompe pas en prononçant que la probabilité d'une proposition A est entre 1 & a , & e la probabilité qu'il se trompe, & soit v' la probabilité de cette proposition, nous aurons

$$v \cdot \frac{1+a}{2} + \frac{a}{2} e = v', \text{ ou } v = 2v' - a. \text{ Si la proposition } A \text{ est de la nature de celles en faveur desquelles on ne vote que parce qu'on les regarde comme prouvées,}$$

$$v \cdot \frac{1+a}{2} \text{ exprimera la probabilité de la vérité de } A, \text{ lorsque}$$

cette proposition est prouvée, & $\frac{a}{2} e$ la probabilité de la

vérité de la même proposition lorsqu'elle n'est pas prouvée.

Puisque v' est, d'après l'observation, la probabilité qui résulte du jugement d'un seul Votant dans ce cas, il est clair que

$$\frac{v'^q}{v'^q + e^q} \text{ exprime la probabilité qui résulte du jugement unanime de } q \text{ Votans, fonction à laquelle on peut substituer}$$

où la proposition A est à la fois vraie & prouvée, la probabilité sera

$$\frac{\left(\frac{v+a}{2}\right)^q}{\left(\frac{v+a}{2}\right)^q + \left(\frac{1+e-a}{2}\right)^q}; \text{ \& si l'on n'a égard qu'au cas}$$

$$\text{probabilité sera } \frac{v^q \left(\frac{1+a}{2}\right)^q}{v^q \left(\frac{1+a}{2}\right)^q + \left[\frac{1-a+e \cdot (1+a)}{2}\right]^q}.$$

Supposons maintenant qu'un Votant ait prononcé que la probabilité de A est au-dessous de a , & voté contre A en conséquence, qu'ensuite il vote pour A , cela peut venir ou de ce que de nouvelles réflexions lui ont fait juger que la probabilité de A est au-dessus de a , ou parce qu'il s'est déterminé en faveur de A , quoiqu'il en juge la probabilité au-dessous de a , par la seule raison qu'elle lui paroît au-dessus de $a' < a$, & qu'il l'a jugée suffisante pour se déterminer.

Dans ce cas, $\frac{ve}{v^2+2ve}$ exprimera la probabilité que celle de A est entre 1 & a , $\frac{v^2}{v^2+2ve}$ celle qu'elle est entre a & a' , & $\frac{a'e}{v^2+2ve}$ celle qu'elle est entre a' & 0.

La probabilité de la vérité de A , sera donc $\frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{1+a}{2} + \frac{v^2}{v^2+2ve} \cdot \frac{a+a'}{2} + \frac{a'e}{v^2+2ve} \cdot \frac{a'}{2}$ au lieu de $v \cdot \frac{1+a}{2} + e \cdot \frac{a'}{2}$ qu'elle auroit été si le Votant eût d'abord voté pour A ; & suivant la valeur de v , de a & de a' , l'une de ces quantités peut être plus grande que l'autre. Mais si l'on ne considère que la probabilité de la proposition A , regardée à la fois comme prouvée & comme vraie, on aura $\frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{1+a}{2}$ dans un cas, & $v \cdot \frac{1+a}{2}$ dans l'autre. Or, dans cette dernière hypothèse, non-seulement la probabilité qui a lieu après le changement d'avis, est plus petite que celle d'un avis donné immédiatement, mais elle est plus petite que $\frac{1}{2}$, & même plus petite que la probabilité $e \cdot \frac{1+a}{2}$, qu'on auroit eue en laissant subsister l'avis contraire à A , qui a été donné le premier.

Cette espèce de paradoxe est facile à expliquer. En effet, dans le cas où il y a du changement dans la distribution des voix, la combinaison la plus probable est celle qui suppose que la probabilité de A est entre a & a' ; or cette combinaison

donne pour la vérité de A une assez grande probabilité & elle donne en même temps une probabilité égale que A n'est pas à la fois vrai & prouvé.

Supposons maintenant que la proposition A soit celle-ci : *l'accusé est coupable*, que p Votans aient prononcé pour la proposition A , & que p' , qui avoient prononcé contre, soient ensuite revenus à l'avis des p autres, la probabilité que la proposition est vraie, sera exprimée par

$$\frac{(v \cdot \frac{1+a}{2} + c \cdot \frac{a}{2})^p \left(\frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{1+a}{2} + \frac{v^2}{v^2+2ve} \cdot \frac{a+d}{2} + \frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{d}{2} \right)^{p-p'}}{(v \cdot \frac{1+a}{2} + c \cdot \frac{a}{2})^p \left(\frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{1+a}{2} + \frac{v^2}{v^2+2ve} \cdot \frac{a+d}{2} + \frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{d}{2} \right)^p + (v \cdot \frac{1-a}{2} + c \cdot \frac{2-a}{2})^p \left(\frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{1-a}{2} + \frac{v^2}{v^2+2ve} \cdot \frac{2-a-d}{2} + \frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{2-d}{2} \right)^{p-p'}}$$

& celle qu'elle est vraie, & prouvée en même-temps, sera

$$\frac{v^p \left(\frac{ve}{v^2+2ve} \right)^{p'} \left(\frac{1+a}{2} \right)^{p-p'}}{v^p \left(\frac{ve}{v^2+2ve} \right)^p \left(\frac{1+a}{2} \right)^{p+p'} + (1-v \cdot \frac{1+a}{2})^p \left(1 - \frac{ve}{v^2+2ve} \cdot \frac{1+a}{2} \right)^{p-p'}}$$

Or, la première valeur est en général plus grande que

$$\frac{(v \cdot \frac{1+a}{2} + c \cdot \frac{a}{2})^{p-p'}}{(v \cdot \frac{1+a}{2} + c \cdot \frac{a}{2})^{p-p'} + (v \cdot \frac{1-a}{2} + c \cdot \frac{2-a}{2})^{p-p'}}$$

qu'on auroit eue en se tenant à la première décision, & la seconde est toujours plus petite que

$$\frac{(v \cdot \frac{1+a}{2})^{p-p'}}{(v \cdot \frac{1+a}{2})^{p-p'} + (v \cdot \frac{1-a}{2} + c \cdot \frac{1+a}{2})^{p-p'}}, \text{ qu'on auroit}$$

dans le même cas, pour la seconde hypothèse. On trouveroit généralement le même résultat, en mettant au lieu de $p-p'$ une pluralité quelconque $q' < p$; d'où il résulte qu'en établissant cette forme de jugement, on a rempli l'intention d'avoir une

probabilité plus grande qu'un accusé condamné n'est pas innocent, mais qu'on a diminué en même temps la probabilité que le crime dont il est accusé soit prouvé, ce qui explique comment cette forme de jugemens a pu paroître préférable à toute autre dans des siècles peu éclairés; comment elle paroît encore très-séduisante au premier coup-d'œil, & pourquoi en même temps les avantages ont toujours paru peu certains à quelques esprits accoutumés à réfléchir & à discuter.

Supposons maintenant qu'un Votant ait prononcé en faveur d'une proposition A , & que par conséquent il regarde la probabilité comme entre 1 & a , & qu'ensuite il prononce contre cette même proposition, parce qu'il regarde la probabilité seulement comme entre 1 & a' , nous aurons la probabilité v^2 que celle de A est entre 1 & a , ev qu'elle est entre a & a' , e^2 qu'elle est entre a' & 0; donc la probabilité

de la vérité de A sera $\frac{v^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{1+a}{2} + \frac{ev}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{a+a'}{2} + \frac{e^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{a'}{2}$; & la probabilité qu'elle sera

à la fois vraie & prouvée, sera $\frac{v^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{1+a}{2}$. Or, la

seconde quantité, quoique plus petite que $v \cdot \frac{1+a}{2}$, qui représente la même valeur lorsqu'on s'en tient à la première voix, est cependant encore au-dessus de $\frac{1}{2}$, en sorte que l'on peut voter ici contre A , quoiqu'il soit probable non-seulement que la proposition A est vraie, mais même qu'elle est à la fois vraie & prouvée.

Supposons toujours que A soit la proposition; l'accusé est coupable, & qu'il y ait p voix pour le renvoyer, p' pour le déclarer coupable, & qu'ensuite les p' voix reviennent à l'avis du renvoi, la probabilité qu'il est coupable sera

$$\frac{(e \cdot \frac{1+a}{2} + v \cdot \frac{a}{2})^p \left(\frac{v^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{1+a}{2} + \frac{ev}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{a+a'}{2} + \frac{e^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{a'}{2} \right)^{p'}}{(e \cdot \frac{1+a}{2} + v \cdot \frac{a}{2})^p \left(\frac{v^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{1+a}{2} + \frac{ev}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{a+a'}{2} + \frac{e^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{a'}{2} \right)^{p'} + (e \cdot \frac{1-a}{2} + v \cdot \frac{2-a}{2})^p \left(\frac{v^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{1-a}{2} + \frac{ev}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{2-a-a'}{2} + \frac{e^2}{v^2+ev+e^2} \cdot \frac{2-a'}{2} \right)^{p'}}$$

&c

& la probabilité que le crime est prouvé, par

$$\frac{c^p \left(\frac{v^2}{v^2 + cv + c^2} \right)^{p'} \cdot \left(\frac{1+a}{2} \right)^{p+p'}}{c^p \left(\frac{v^2}{v^2 + cv + c^2} \right)^{p'} \cdot \left(\frac{1+a}{2} \right)^{p+p'} + (1-c) \cdot \left(\frac{1+a}{2} \right)^p \left(1 - \frac{v^2}{v^2 + cv + c^2} \right) \cdot \left(\frac{1+a}{2} \right)^{p'}}$$

Or, comme p peut être égal à l'unité, il peut arriver que cette formule qui représente la probabilité que le crime est prouvé, comme celle qui exprime la probabilité du crime en lui-même, soit très-grande, & que cependant l'accusé soit renvoyé.

D'où il résulte que, relativement à l'intention que l'on doit se proposer de ne pas laisser échapper un coupable lorsque le crime est prouvé, cette forme de jugement ne la remplit pas plus sûrement qu'une forme plus simple, & qu'ainsi cette dernière, c'est-à-dire, celle où l'on exige pour condamner une pluralité donnée, doit être préférée, à tous égards, à celle qui exige l'unanimité.

Considérons maintenant la troisième espèce de proposition, celle où l'on se décide pour A lorsque A paroît seulement un peu plus probable que la proposition contraire. Il est aisé de voir que ce cas se réduit au premier, en faisant seulement $a = \frac{1}{2} + z$, & $a' = \frac{1}{2} - z$, ou $a' = \frac{1}{2}$, selon qu'on voudra supposer que la nécessité de revenir à l'unanimité, ou fait décider même contre ce qu'on croiroit le plus probable, mais à un très-petit degré, ou seulement dans le cas d'un doute absolu; mais comme ce doute absolu est une supposition presque absolument idéale, on peut préférer la première hypothèse.

Cela posé, la probabilité de la vérité de A pour un Votant qui a voté pour A , est $\frac{v}{2} + \frac{1}{4} + \frac{z}{2}$, & $\frac{1}{2}$ pour le Votant qui, après avoir voté contre, revient à l'avis A ; & la probabilité que la proposition A est à la fois vraie & plus probable, est, pour la première votation, $v \left(\frac{1}{4} + \frac{z}{2} \right)$, &

M m

pour la seconde, $\frac{ev}{v^2+2ve} (\frac{3}{4} + \frac{z}{2})$. On trouvera les formules correspondantes pour le cas où l'on supposeroit que ceux qui ont d'abord voté pour *A*, reviennent à l'unanimité en faveur de la proposition contraire, & on en conclura que dans ce cas, cette forme de Tribunaux n'augmente pas la probabilité de la vérité de la décision, & diminue celle que l'avis qui a l'unanimité soit en même temps vrai & le plus probable.

Nous avons supposé ici que l'on connoissoit la probabilité v' de la vérité de la décision. En effet, si on prend la première méthode de la *troisième Partie*, la probabilité de la décision du Tribunal d'examen étant très-grande, on a pour cette probabilité $v = v'$ à cause de $\frac{v+a}{2} = v'$ & de $a = v'$.

Ainsi l'on peut supposer que le jugement du Tribunal d'examen décide sur la vérité absolue des décisions. La seconde méthode donne également v' , parce qu'on peut supposer que chacun votera plutôt en faveur de la vérité que de l'erreur.

Il est nécessaire de prévenir ici une objection. Il paroîtroit résulter de ce qu'on a dit ici, que, si un Votant qui prononce qu'une proposition est vraie, parce qu'elle lui présente une certaine probabilité, produit une probabilité v' de la vérité de la proposition; lorsqu'on a l'unanimité de q voix en faveur de cette proposition, la probabilité de cette même proposition peut, q étant très-grand, approcher autant qu'on voudra de l'unité, ce qui paroît absurde en soi-même, puisque la croyance que cent mille personnes auront d'un fait, ne rend pas ce fait plus probable qu'il ne l'est en lui-même; mais il faut observer que ce que nous entendons par la vérité d'un fait, d'une proposition, n'est pas une vérité absolue, mais l'espèce de vérité dont ce fait est susceptible. S'il s'agit, par exemple, d'une vérité de démonstration, le témoignage de gens instruits dans la science à laquelle cette démonstration appartient, peut donner une probabilité qui approchera indéfiniment de la

vérité. S'il s'agit d'un fait, ce jugement ne donnera du fait qu'une probabilité approchant indéfiniment de celle que peut avoir le fait en lui-même, dans le cas où il est regardé comme le plus assuré. Aussi dans le cas où la limite a de la probabilité seroit jugée telle par une approximation exacte, ce seroit $v^q \cdot \frac{1+a}{2}$, qu'il faudroit prendre au lieu de $v^q \cdot (\frac{1+a}{2})^q$, & semblablement pour les autres expressions;

mais ici cette limite est incertaine, & nous supposons seulement que l'expérience a prouvé qu'il résulteroit du jugement une probabilité v' que la proposition étoit vraie, c'est-à-dire, avoit la probabilité que les preuves dont elle est susceptible peuvent lui donner.

Nous avons préféré la méthode précédente de résoudre la question proposée à celles qui se sont également présentées à nous, parce qu'elle nous a paru la moins hypothétique. En effet, la seule supposition qu'elle renferme est celle de l'égalité de probabilité des deux avis contradictoires, prononcés par la même personne. Or, cette supposition nous paroît légitime, 1.^o parce qu'il ne s'agit pas ici d'un simple changement d'avis, qui seroit une suite de la discussion, mais de celui qui a lieu après un premier jugement postérieur à la discussion, & rendu en connoissance de cause: aussi n'est-il pas question ici du cas où, après quelques discussions, les avis se réduisent à l'unanimité, mais de celui où après avoir embrassé & soutenu des avis différens, ils finissent par se réunir; 2.^o parce qu'il s'agit moins ici de l'influence du raisonnement & de la discussion, que de celle qui naît de la nécessité de la réunion, qui agit plus sur le caractère que sur la raison, & dont l'effet est moins de diminuer la force de la conviction que de déterminer à voter d'après une conviction moindre; 3.^o enfin parce qu'on ne peut nier que cette manière de considérer l'objet ne soit réellement possible, qu'elle n'ait lieu dans un grand nombre de décisions, & que dès-lors cette forme a l'inconvénient d'exposer sans nécessité à décider d'après un

M m ij

avis dénué de la probabilité suffisante, & même contre une très-grande probabilité. Or, comme nous l'avons vu, c'est une raison suffisante de préférer une autre forme, puisqu'il est possible d'éviter cet inconvénient. *Voyez page 79.*

SIXIÈME QUESTION.

On a établi dans quelques pays la règle générale, que si plusieurs personnes, liées entr'elles par certains degrés de parenté, votent dans un même Tribunal, l'avis de ces personnes, considérées à part, forme une seule voix conforme à l'avis qui a la pluralité entr'elles. Cette règle a été établie, parce qu'on a supposé que ces personnes avoient une influence mutuelle l'une sur l'autre. Cela posé, soit $p+1$ leur nombre, que $v, e, 2i$ expriment la probabilité pour chacune de la vérité, de la fausseté de leur avis & de l'action de l'influence: nous distinguerons deux cas, celui où il y a unanimité entr'eux & celui où ils se séparent par deux avis. Dans le premier cas, soit p' le nombre des autres Votans, nous formerons V, V' & M , d'après la formule $(v' + e')^{p'}$.

$$\left[v' \cdot \frac{(v+i)^{p'}}{(v+i)^{p'} + (e+i)^{p'}} + e' \cdot \frac{(e+i)^{p'}}{(v+i)^{p'} + (e+i)^{p'}} \right]; \text{ \& dans}$$

le second nous les formerons d'après la formule $(v' + e')^{p'}$ $[(v+i) + (e+i)]^{p'-1}$, en regardant les termes du second facteur comme ne donnant qu'une seule voix pour v & pour e . Si on examine maintenant la loi générale établie, on verra que, pour qu'elle soit vraie, dans le premier cas, il faut supposer

$$\frac{(v+i)^{p'}}{(e+i)^{p'}} = 1, \text{ ce qui ne peut avoir lieu sans que } v = e;$$

$$\text{dans le second cas on aura } \frac{(v+i)^{p'}}{(e+i)^{p'}} = \frac{v'}{e'} = \frac{v}{e}, p, \text{ étant}$$

la pluralité, ce qui donne la même solution; & de plus pour $p, = 1, i = 0$ pour $p, = 2$, la solution $i = \sqrt{ev}$; pour $p, = 3$, la solution $i = \sqrt[3]{v^2e} + \sqrt[3]{e^2v}$. Si on suppose que ceux qui votent pour la pluralité, prise parmi les $p+1$ voix,

soient seuls soumis à l'influence, alors il faudra prendre pour chaque combinaison

$$(v' + e')^{p'} \left[v' \cdot \frac{(v+i)^{p''} \cdot e'^{p''}}{(v+i)^{p''} \cdot e'^{p''} + (e+i)^{p''} \cdot v'^{p''}} + e' \cdot \frac{(e+i)^{p''} \cdot v'^{p''}}{(v+i)^{p''} \cdot e'^{p''} + (e+i)^{p''} \cdot v'^{p''}} \right],$$

$p'' + p''' = p$, $p'' + 1$ désignant le nombre qui a la pluralité.

La règle donne ici $\frac{(v+i)^{p''}}{(e+i)^{p''}} = \frac{v^{p''}}{e^{p''}}$, d'où l'on tirera $\frac{v+i}{e+i}$

$$= \left(\frac{v}{e}\right)^{\frac{p''}{p''}}, \text{ d'où } i = \frac{v e^{\frac{p''}{p''}} - e v^{\frac{p''}{p''}}}{v^{\frac{p''}{p''}} - e^{\frac{p''}{p''}}}.$$

Or, il résulte de ces formules, 1.^o que si toutes ces voix, qu'on réduit à une seule, sont unanimes, la règle n'est d'accord avec la vérité que si l'on a $v = \frac{1}{2}$; 2.^o que dans les autres cas elle ne l'est de plus que pour une certaine valeur de i , & qu'elle peut donner pour les autres une probabilité très-différente de la vraie. Cette règle n'a donc pas été établie d'après un examen approfondi de la nature de cette espèce d'influence, mais d'après l'idée qui se présentait au premier coup-d'œil, qu'elle devoit diminuer la probabilité. On voit enfin, en examinant la question en elle-même, qu'il vaut mieux prendre un moyen qui mette à l'abri de cette influence, que de s'exposer à l'incertitude que cette influence produit nécessairement dans la probabilité des décisions. Ainsi toutes les fois que la cause de l'influence peut être la parenté, ou quelque autre relation extérieure dont on puisse reconnoître l'existence, il vaut mieux statuer que le Tribunal ne pourra contenir de Votans qui aient entr'eux ces relations, que de le permettre en établissant ou cette réduction de voix que nous venons d'examiner, ou telle autre que l'on pourroit imaginer.

Les questions que nous venons de discuter ne sont pas les seules que l'on puisse se proposer, mais elles suffisent pour montrer comment on peut rapprocher des questions réelles qui peuvent se présenter dans la pratique, les principes généraux & abstraits établis dans les trois premières Parties.

Il nous reste à faire ici une dernière observation, c'est que si M exprime une assurance suffisante pour se décider, &

que l'on exige plusieurs assurances, comme celle d'avoir une certaine pluralité, de n'avoir pas à craindre une influence de quelque nature que ce soit sur plus d'un certain nombre de voix, & ensuite si on a ces premières conditions, d'avoir un jugement conforme à la vérité; & que l'on exprime ces probabilités par M' , il faudra que $M'^3 = M$, & de même pour tous les cas semblables.

Fin de la quatrième Partie.



CINQUIÈME PARTIE.

Nous donnerons ici pour exemple de l'application de la théorie précédente, 1.^o la constitution d'un Tribunal où le tort résultant de l'erreur est le même, quelle que soit celle des deux propositions contradictoires, qui, quoique fausse, a obtenu la pluralité des voix; comme, par exemple, dans le jugement d'une cause civile, où deux hommes qui se disputent une propriété, sont dans un cas également favorable; 2.^o la constitution d'un Tribunal où l'on ne doit admettre une des décisions que lorsque la vérité en est prouvée, comme, par exemple, dans un jugement criminel, où il faut une assurance suffisante qu'un accusé est coupable pour prononcer la condamnation; 3.^o une forme d'élection, où l'on ait une assurance suffisante que celui des concurrens qui sera élu sera le plus digne; 4.^o enfin la comparaison des probabilités résultantes d'assemblées où l'on suppose que le nombre des Votans devient de plus en plus grand, mais qu'en même temps la probabilité de la voix de ces nouveaux Votans devient plus petite.

PREMIER EXEMPLE.

Constitution d'un Tribunal, dans lequel le tort résultant d'une décision fausse est le même, quelle que soit cette décision, & en particulier d'un Tribunal pour les affaires civiles.

I. Dans ce cas, il suffit qu'une opinion soit plus probable que la contradictoire, pour l'adopter de préférence, & nous avons vu ci-dessus que la probabilité résultante d'une décision ne pouvoit jamais être plus grande que la probabilité réelle que peut avoir la proposition adoptée; probabilité qui est

alors, au lieu de l'unité, la limite de celle des décisions. Il résulte de cette observation une première condition, c'est d'avoir des loix assez simples & assez claires pour se procurer une assurance M , que dans une question donnée la probabilité du droit de chacun ne tombera pas au-dessous d'une certaine limite L , en sorte que $\frac{M+L}{2}$ exprimera alors la valeur moyenne de la probabilité réelle, & $M \cdot \frac{1+L}{2}$

cette même valeur, en confondant avec les probabilités contraires les probabilités favorables qui sont au-dessous de L , ou enfin M, L , en regardant cette probabilité comme le *minimum* de celles sur lesquelles on peut compter en général. Nous appellerons P cette probabilité.

II. Supposons maintenant qu'il résulte des décisions d'un Tribunal d'examen, que la probabilité de la vérité de chaque voix des Membres d'un Tribunal soit v , & e celle de l'erreur. Si q est la pluralité à laquelle cette décision est rendue, $P \cdot \frac{v^q}{v^q + e^q} + (1 - P) \cdot \frac{e^q}{v^q + e^q}$ exprimera la probabilité de cette décision; & en excluant les termes où la décision n'est vraie que parce que les Votans se sont trompés en admettant une opinion comme la plus probable, & que cette opinion, la moins probable, est cependant la vraie, la probabilité de la vérité, ainsi considérée, se réduira à $P \cdot \frac{v^q}{v^q + e^q}$ seulement, & celle qu'on a suivi l'opinion la plus probable, sera $\frac{v^q}{v^q + e^q}$.

III. Soit maintenant q le nombre des Votans, & $\frac{v^q}{v^q + e^q}$ la probabilité d'avoir la pluralité q , & que M_q exprime cette probabilité; soit ensuite M_{m} la valeur de $\frac{v^q}{v^q + e^q}$, il faudra que $M, M_q, M_{\text{m}} = M$, M étant la sûreté qu'on doit exiger, que la décision sera en faveur de l'opinion

l'opinion dont la probabilité est au-dessus de L . Cette sûreté n'est ici que pour la décision avant d'être rendue.

IV. Dans le cas de la plus petite pluralité, celle de l'unité, on a la probabilité M, L, v de la vérité de la décision, en écartant tous les cas où cette vérité n'est pas due à des erreurs qui se compensent. Si donc on suppose, comme dans la *troisième Partie*, page 232, $M = \frac{23999}{24000}$, ou $\frac{35999}{36000}$, on aura pour condition d'un Tribunal de ce genre, M, M, M, \dots $= \frac{23999}{24000}$, ou $\frac{35999}{36000}$, & $M, L, v > \frac{1}{2}$, en sorte qu'on doit regarder comme défectueux tout Tribunal qui ne remplira pas ces conditions.

V. On peut prendre ici trois partis différens, 1.° celui d'avoir un Tribunal toujours impair, où l'on suivra toujours la pluralité, ne fût-elle que d'une seule voix; 2.° celui d'exiger une pluralité plus grande; & dans le cas où elle n'a pas lieu, de prendre la décision d'un second Tribunal; 3.° enfin on pourroit, dans ce même cas, adopter la décision de la pluralité, mais demander au même Tribunal un jugement d'équité qui diminuât la rigueur du jugement prononcé.

De ces trois partis, le premier a l'inconvénient non d'être injuste, puisqu'il se borne à prendre la plus probable de deux opinions, mais de faire dépendre d'une très-petite probabilité la décision d'un objet important. Le troisième détruit en partie cet inconvénient, en permettant d'user d'une espèce de compensation que la loi pourra limiter: d'ailleurs il est aisé de voir que dans le cas de cette petite pluralité, on peut croire que la probabilité réelle des deux opinions qui forment la décision, ou celle de la voix de chaque Votant, est très-petite. On auroit même, par le Problème V, *troisième Partie*, la probabilité qu'elle est au-dessous d'une limite donnée, & même la limite au-dessus de laquelle on a une assurance ou une très-grande probabilité qu'elle ne s'élèvera pas. Ainsi on peut supposer que dans ce cas le droit de l'un

N n

des deux concurrents n'est pas beaucoup plus probable que celui de l'autre, & que par conséquent on peut, sans injustice, accorder une compensation à celui dont le droit a été jugé le moins probable. Le second parti a l'inconvénient de prolonger beaucoup les décisions; & il en a un autre, c'est que si l'on n'a pas égard aux pluralités des premières décisions, regardées comme insuffisantes, on s'expose à suivre l'avis de la minorité; voyez ci-dessus pages 80 & 81, & que si au contraire on y a égard, on se trouve forcé de choisir entre l'injustice de rejeter de nouveaux moyens d'instruction & l'incertitude que celle de l'influence qui a pu résulter de ces moyens, jette nécessairement dans les décisions; incertitude qu'on ne pourroit lever sans appeler au second jugement les Juges qui ont voté dans les premiers, & en leur laissant la liberté de changer d'avis, ce qui, comme nous l'avons vu, affoiblit encore la probabilité.

Nous proposons donc, par exemple, un Tribunal impair où l'on exigeroit trois voix. Si les loix sont claires & bien faites, on pourra, dans la plupart des questions, supposer L , ou la limite de la probabilité réelle, égale à $\frac{999}{1000}$, M , sera très-grand, de manière que, sans erreur sensible, on pourra le supposer égal à l'unité. Si donc $\frac{v}{c} = 4$, on aura la probabilité du jugement, dans le cas le plus défavorable, égale à $\frac{999}{1000} \cdot \frac{64}{65} = \frac{63936}{65000}$; & dans le cas où elle n'est que $\frac{3996}{5000}$, & même beaucoup moindre, car il est vraisemblable qu'alors L est beaucoup plus petit, le même Tribunal formant une espèce de cour d'équité, prononceroit sur une compensation, dont les limites & la nature seroient encore fixées par la loi.

Si dans la même hypothèse on fait $\frac{v}{c} = 9$, nous aurons la plus petite probabilité, où il y a décision, égale à $\frac{728271}{730000}$;

où le risque de l'erreur est moindre que $\frac{1}{365}$, & la probabilité, dans le cas de la compensation, plus petite que $\frac{8991}{10000}$, puisque c'est un des cas où L est très-probablement au-dessous de $\frac{999}{1000}$. Or, cette probabilité d'un droit paroît assez petite, pour qu'on puisse, sans injustice, exiger une compensation ou espèce de partage du droit qui en résulte.

Si on fait $q = 25$, $q' = 5$, & $\frac{v}{c} = 9$, on satisfera à la condition $M, M_2, M_{25} = M = \frac{35999}{36000}$, c'est-à-dire, qu'il suffira de former le Tribunal de 25 Votans.

La supposition de $\frac{v}{c} = 9$ paroîtra très-petite pour tout Tribunal qui jugera d'après des loix simples & très-claires; mais il est bon d'observer que pour augmenter la sûreté, il ne faut pas prendre pour v la probabilité moyenne, mais la limite de la probabilité, au-dessous de laquelle il y a une assurance $M_{v'}$ que la probabilité ne tombera pour aucun des Membres du Tribunal; en sorte que si v' est cette limite, la valeur ci-dessus de $\frac{v^2}{v'+v}$ exprime réellement $M_{v'} \cdot \frac{v'^2}{v'+v}$, & que dans M, L, v , v est pris pour $M_{v'} v'$. Or, dans cette hypothèse, la supposition de $\frac{v}{c} = 9$ n'est pas fort au-dessous de la vérité pour des Juges même très-instruits.

Si dans cette même hypothèse, le nombre des Juges excédant toujours 25, est ou pair ou impair, alors on pourra, dans le cas où le nombre des Votans est pair, admettre la compensation pour le cas du partage & pour celui où la pluralité n'est que de deux voix. Dans ce dernier cas, la probabilité, regardée comme insuffisante, est, à très-peu-près, $\frac{80719}{82000}$, & le risque à peu-près $\frac{1}{82}$, mais un peu plus grand, au lieu d'être

environ $\frac{1}{10}$, mais un peu plus petit, comme dans le cas où il n'y a que la pluralité d'une seule voix. On peut donc trouver ici à la fois le risque trop petit pour admettre une compensation, & trop grand pour le négliger, & par conséquent exiger que le nombre des Juges soit toujours impair.

S E C O N D E X E M P L E.

Constitution d'un Tribunal qui ne doit être supposé avoir décidé en faveur d'une des deux opinions, que lorsque la probabilité de la vérité de la décision est très-grande, & en particulier d'un Tribunal pour les causes criminelles.

Nous avons montré dans la quatrième Partie, page 273, que l'assurance que l'on doit avoir en ce cas, de ne pas renvoyer un coupable, & de ne pas condamner un innocent, ne peut s'obtenir par une forme de Tribunal, dans lequel on ne prononce le jugement pour ou contre l'accusé que lorsque toutes les voix sont réunies pour le même avis, & qu'il y a des cas où par cette forme on peut renvoyer un coupable, quoique la vérité de son crime soit suffisamment prouvée, & condamner un innocent avec une probabilité inférieure à celle que la Justice doit exiger.

Nous observerons ici de plus, 1.^o que l'on doit soigneusement éviter, autant qu'il est possible, toute espèce d'influence sur les voix des Votans. En effet, comme nous l'avons prouvé, page 79, toute incertitude qu'il est possible d'éviter, ne peut être introduite par la forme du jugement sans blesser la justice. Il n'est permis de condamner un homme sur une probabilité, quelque grande qu'elle soit, que par la seule raison de l'impossibilité d'avoir une certitude. Or, cette forme, où l'on exige l'unanimité, introduit cette incertitude volontaire, puisqu'il est possible que sur douze Juges, onze reviennent à l'avis du douzième, & qu'ils y reviennent par lassitude, par l'effet de la contrainte portée à l'excès, par l'action de la faim : on peut même, à ce dernier égard, faire en quelque sorte, à la loi d'Angleterre,

un reproche semblable à celui qu'on a fait avec tant de justice à la question. On peut dire qu'elle donne beaucoup d'avantage à un Juré robuste & fripon sur le Juré foible & intègre.

2.^o Si l'on considère le risque de condamner un innocent : supposons douze Jugés, & que v soit la probabilité de la voix de chacun, $\frac{v^{12}}{v^{12} + e^{12}}$ exprimera la probabilité que l'accusé

condamné est coupable, v étant ici ce que devient la probabilité de chaque voix dans cette forme de votation. Soit maintenant un autre Tribunal qui décide à la pluralité de huit voix seulement, & v' la probabilité, il faudra que

$$\frac{v'^8}{v'^8 + e'^8} = \frac{v^{12}}{v^{12} + e^{12}}, \text{ ou } \frac{v'}{e'} = \left(\frac{v}{e}\right)^{\frac{3}{2}}$$

égale assurance dans les deux cas, c'est-à-dire, que pour qu'un Tribunal de Jurisconsultes, où l'on exigeroit une pluralité de huit voix, donne une assurance égale à celle d'un Juré d'Angleterre, il suffit que l'opinion unanime de deux hommes accoutumés à discuter une matière, vaille l'opinion aussi unanime de trois hommes que le hasard appelle à la décider; égalité qu'on peut accorder sans faire une supposition trop favorable aux premiers. Cette considération nous déterminera à supposer qu'on exige une pluralité de huit voix.

Nous aurons ici pour première condition $P M_{iv} \frac{v'^8}{v'^8 + e'^8} = \frac{144767}{144768}$, P étant la probabilité réelle que peut avoir un

fait regardé comme rigoureusement prouvé, & v' étant cette limite au-dessous de laquelle on a la probabilité M_{iv} que ne tombera pas celle de la vérité de chaque voix. Or, il est aisé de voir que si l'on fait $v' = \frac{9}{10}$, si P & M_{iv} , qui sont des quantités du même genre, sont supposés de l'ordre

$\left(\frac{144767}{144768}\right)^{\frac{1}{8}}$, on satisfera à cette première condition.

Passons maintenant à la seconde condition, c'est-à-dire, à la sûreté que doit avoir un Législateur, ou celui qui dispose de la force publique, que dans tout le cours d'une génération

il n'y aura pas un innocent condamné ; cette condition pourra être exprimée (voyez page 239) par $M_{iv} \frac{V'}{V'+E'}$, ou $M_{iv} \frac{v''}{v''+e''} = \left(\frac{1899}{1900}\right)^{\frac{1}{1000}}$, ce qui nous oblige à avoir $M_{iv} \frac{V'}{V'+E'}$, ou $\frac{v''}{v''+e''}$ de l'ordre $\left(\frac{1899}{1900}\right)^{\frac{1}{1000}}$. On satisfera encore à cette condition pour ces deux dernières quantités, en faisant $q' = 8$, & $\frac{v'}{e'} = 9$. Quant à M_{iv} , il est clair que sa valeur dépendra du soin que l'on aura mis à bien connoître le degré de probabilité de la voix de chaque Votant.

Si l'on vouloit que $P M_{iv} \frac{V'}{V'+E'}$ ou $P M_{iv} \frac{v''}{v''+e''}$ fussent égaux à $\left(\frac{1899}{1900}\right)^{\frac{1}{1000}}$, il faudroit que les trois facteurs fussent de l'ordre $\left(\frac{1899}{1900}\right)^{\frac{1}{1000}}$; condition que l'hypothèse de $q' = 8$ & $\frac{v'}{e'} = 9$ remplit également : il faudroit seulement que M_{iv} augmentât de valeur, & que P fût de cet ordre $\left(\frac{1899}{1900}\right)^{\frac{1}{1000}}$, mais P est ici l'expression de la probabilité réelle que peut avoir un évènement de l'espèce de ceux qui sont la matière de la décision; ainsi il paroît inutile de le faire entrer dans cette seconde condition, & il semble suffisant que le Législateur n'ait pas une crainte au-dessus de celle à laquelle un homme ne fait pas attention pour sa propre vie, que durant une génération un innocent soit condamné faute des précautions nécessaires pour donner à un jugement toute la certitude que la sagacité des hommes & la nature des questions proposées peut lui donner.

La troisième condition, qui a pour objet la nécessité de ne pas laisser de coupables impunis, doit être exprimée ici par $V' = \frac{99.999}{100.000}$ & $1 - V' - E' = \frac{1}{144.768}$. La

considération de la quantité P ne doit point entrer dans ces évaluations. En effet, la quantité $1 - P$ exprime ici la probabilité de mal juger, en prononçant qu'un homme est ou n'est pas coupable, quoique toute la probabilité dont le fait sur lequel on prononce est susceptible, soit acquise en faveur de l'opinion contraire; & par conséquent l'exemple d'un coupable qui échapperoit dans ce cas, c'est-à-dire, parce qu'il seroit aussi probable qu'il peut l'être que le crime n'est pas prouvé, ne doit pas être regardé comme pouvant encourager le crime par l'exemple de l'impunité. Or, on satisfera à cette dernière condition, en supposant que $q' = 8$, $\frac{v}{r} = 9$, & que q nombre des Juges soit égal à 30; ce qui, vu la nécessité d'avoir toujours la possibilité de compléter ce nombre, obligeroit à former un Tribunal assez nombreux, surtout si l'on y admettoit un certain nombre de récusations non motivées, comme la justice paroît l'exiger, & si l'on vouloit éviter d'être obligé, excepté dans des cas très-rares, de compléter le Tribunal par des Membres étrangers.

T R O I S I È M E E X E M P L E.

Forme d'Élection.

Nous examinerons d'abord s'il est à propos que les électeurs aient décidé à la pluralité des voix de l'éligibilité ou la non éligibilité de tous ceux des Candidats qui se présentent ou qui sont présentés par un Corps qui en seroit chargé.

Cette première précaution rend plus simple l'élection qui doit suivre, & elle ne présente au premier coup-d'œil aucun inconvénient; car si plus de la moitié se réunissent pour faire admettre un Candidat indigne de la place, il est évident qu'ils auroient, dans toute forme d'élection, la facilité de l'élire. Si au contraire plus de la moitié se réunit pour exclure un homme de mérite, & que leur intention soit de faciliter le succès d'un Candidat inférieur, il ne résulte encore aucun changement de cette première délibération. Si dans ce même

cas c'est par aversion pour le premier qu'ils veulent l'exclure ; cette forme vaut mieux, parce qu'elle laisse ensuite la liberté de choisir entre ceux qui restent ; au lieu que sans cela, l'idée d'exclure le premier pourroit occasionner des brigues & conduire à faire un plus mauvais choix. Il n'y a qu'un seul cas où cette première délibération puisse avoir des inconvénients, c'est celui où deux partis, partagés entre deux sujets, se réuniroient pour en exclure un troisième ; mais dans ce cas il est aisé de voir qu'en dispersant leurs voix de manière à placer ce troisième Candidat aux derniers rangs de mérite, ils y réussiroient également. Ainsi dans la forme d'élections, que nous avons prouvé, *première Partie*, qu'il falloit préférer, il sera utile de fixer, par une première délibération, le nombre des Candidats.

Chaque électeur donnant ensuite la liste de ces Candidats, suivant l'ordre de mérite qu'il leur attribue, on pourra en déduire pour un nombre n de Candidats les $\frac{n \cdot n - 1}{2}$ propositions qui forment l'avis de la pluralité ; & prenant toujours pour V & E les mêmes quantités, la probabilité que l'avis de la pluralité ne sera pas au nombre de ceux qui sont formés de propositions qui ne peuvent subsister entr'elles, sera exprimée en général par

$$(V + E)(V^2 + VE + E^2)(V^3 + V^2E + VE^2 + E^3) \dots \\ (V^{n-1} + V^{n-2}E + V^{n-3}E^2 \dots \dots \dots + E^{n-1}).$$

Cette formule exprime, comme on voit, que l'avis de la pluralité sera en faveur d'une des $n \cdot n - 1 \dots \dots \dots 2 \cdot 1$ combinaisons possibles. Si $V = 1$, elle devient 1, comme cela doit être. Si $V = E$, elle devient $\frac{1 \cdot 2 \dots \dots \dots n}{\frac{n \cdot n - 1}{2}}$,

comme cela doit être aussi, parce qu'alors toutes les combinaisons devenant également possibles, les probabilités doivent être comme le nombre des combinaisons.

Pourvu que pour un Candidat A , on ait une suite de $n - 1$ propositions $A > B$, $A > C$, $A > D$, &c, il est absolument

absolument indifférent que les autres propositions, qui ne règlent les rangs qu'entre les $n - 1$ autres Candidats, forment un système vrai ou faux. Ainsi au lieu de $n \cdot n - 1 \dots 2 \cdot 1$

combinaisons possibles, on peut en compter $n \cdot 2^{\frac{n-1 \cdot n-2}{2}}$, qui donnent un vrai résultat. La probabilité d'en avoir une devient ici $V^{n-1} + V^{n-2}E \dots \dots \dots + E^{n-1}$, c'est-à-dire, toujours 1 dans le cas de $V = 1$ & $\frac{2^n}{2^{n-1}}$, ou comme le nombre des combinaisons lorsque $V = E$. La probabilité de la vérité du jugement entier, est dans le premier cas, $V^{\frac{n-1}{2}}$, & dans le second V^{n-1} .

Il est bon de remarquer ici que dans cette évaluation de probabilité, on suppose que les combinaisons qui donnent un résultat, ou n'en donnent pas, les systèmes qui sont possibles & ceux qui sont absurdes, peuvent avoir également toutes les pluralités possibles. Or, cela n'est vrai que des systèmes possibles; ainsi les probabilités assignées ci-dessus sont telles qu'on les auroit pour le cas où l'on prendroit successivement les voix sur les $\frac{n \cdot n - 1}{2}$ propositions qui répondent à n Candidats, en laissant à chaque Votant par conséquent la liberté de choisir un système contradictoire. Ainsi ces valeurs de la probabilité sont trop petites; mais comme les valeurs plus exactes seroient très-difficiles à assigner, & que celles-ci sont défavorables à la méthode que nous proposons de suivre, nous nous en servons ici.

Si au lieu d'une pluralité simple, on vouloit exiger une pluralité d'un certain nombre de voix, si V & E expriment la probabilité d'avoir dans une décision cette pluralité, soit en faveur de la vérité, soit en faveur de l'erreur, les mêmes formules exprimeront encore la probabilité.

Il résulte de ce qu'on vient de dire, 1.^o que V & E restant les mêmes, plus le nombre des Candidats augmente,

O o

plus la probabilité d'avoir une décision, & celle d'avoir une décision vraie, diminuent; 2.^o que pour avoir une sûreté suffisante, il faut que V^{n-1} soit encore un très-grand nombre, par exemple, si l'on veut que la probabilité d'avoir une décision vraie soit $\frac{1899}{1900}$, voyez page 239, il faudra, si l'on

choisit entre dix Candidats, avoir $V = \left(\frac{1899}{1900}\right)^{\frac{1}{9}} = \frac{99995}{100000}$, c'est-à-dire, que le risque d'avoir la pluralité en faveur d'une proposition fautive, ne soit que $\frac{1}{200000}$; 3.^o comme V^{n-1}

$$+ V^{n-2}E \dots E^{n-1} = V^{n-1} \left(1 + \frac{E}{V} \dots + \frac{E^{n-1}}{V^{n-1}}\right),$$

$$= V^{n-1} \cdot \frac{1 - \frac{E^n}{V^n}}{1 - \frac{E}{V}}, \text{ \& qu'on doit éviter sur-tout d'avoir}$$

une décision fautive, il faudra, à cause de $\frac{E^n}{V^n}$ qu'on peut en général négliger, faire en sorte que $\frac{1}{1 - \frac{E}{V}} = \frac{V}{2V-1}$

approche beaucoup de l'unité; par exemple, si on veut qu'ayant une décision, la probabilité que toutes les propositions qui la forment sont vraies, soit $\frac{1899}{1900}$, il faudra que

$$\frac{V}{2V-1} - 1 = \frac{1}{1900}, \text{ ou } V = \frac{1901}{1902}, \text{ ce qui n'exige}$$

pas que la probabilité de la voix de chaque Votant soit très-forte; 4.^o que plus V est grand, plus n restant le même,

$$V^{n-1} \cdot \frac{1 - \frac{E^n}{V^n}}{1 - \frac{E}{V}} \text{ approche de l'unité, plus aussi } V^{n-1}$$

est grand par rapport au reste du terme; d'où il résulte que si l'on a un résultat de votation dont il ne soit pas possible

de tirer une vraie décision, & qu'il y ait d'autres Votans qui soient désignés dans ce cas pour suppléer aux premiers, plus on appellera de ces Votans, plus la probabilité d'avoir une décision, & celle que la décision rendue est vraie, deviendront grandes.

Si l'on vouloit qu'une seule élection donnât l'ordre entre tous les Candidats, il faudroit alors prendre les premières formules ci-dessus; la probabilité d'avoir une décision vraie

$$\text{sera } V^{\frac{n-1}{2}}, \text{ celle d'avoir une décision sera } V^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\frac{(1 - \frac{E^2}{V^2}) (1 - \frac{E^3}{V^3}) \cdot (1 - \frac{E^4}{V^4}) \dots (1 - \frac{E^n}{V^n})}{(1 - \frac{E}{V})^{n-1}}$$

& la probabilité que la décision une fois rendue sera vraie, aura pour expression

$$\frac{(1 - \frac{E}{V})^{n-1}}{(1 - \frac{E^2}{V^2}) \cdot (1 - \frac{E^3}{V^3}) \cdot (1 - \frac{E^4}{V^4}) \dots (1 - \frac{E^n}{V^n})}$$

Nous en concluons, 1.^o que, pour peu que n soit grand, on aura difficilement une assez grande valeur de V . En effet, en prenant toujours pour exemple le nombre $\frac{1899}{1900}$, nous trouverons que pour $n = 5$ seulement, V sera $\frac{99,997}{100,000}$, & le risque de n'avoir pas une décision vraie sur un seul point, devra être moindre de $\frac{3}{100,000}$, & pour dix Votans, V devra être

$\frac{999,991}{1,000,000}$, & le risque moindre qu'un cent millième; 2.^o que l'on peut représenter, sans une erreur sensible, la formule

$$\frac{(1 - \frac{E}{V})^{n-1}}{(1 - \frac{E^2}{V^2}) \cdot (1 - \frac{E^3}{V^3}) \cdot (1 - \frac{E^4}{V^4}) \dots (1 - \frac{E^n}{V^n})}$$

O o ij

par $\frac{(1 - \frac{E}{V})^{n-1}}{1 - \frac{E}{V}}$, ou $\frac{(1 - \frac{E}{V})^n}{1 - \frac{2E}{V}}$; d'où nous tirerons,

en appelant a la valeur qu'on convient de donner à cette formule $1 - \frac{E}{V} = a^{\frac{1}{n}} [1 - \frac{2}{n-2} (1 - a^n)]$. Si on veut que

$a = \frac{1899}{1900}$, comme ci-dessus, on aura pour $n = 10$,

$1 - \frac{E}{V} = \frac{999,973}{100,000} \times \frac{999,993}{1,000,000} = \frac{999,966}{1,000,000}$; d'où

$\frac{E}{V} = \frac{34}{1,000,000}$, c'est-à-dire, $V = \frac{1,000,000}{1,000,034}$, &

$E = \frac{34}{1,000,034}$, valeur qu'il n'est pas très-difficile d'obtenir,

puisque nous avons vu ci-dessus des hypothèses assez naturelles, donner E au-dessous d'un deux millionième pour un nombre de Votans assez petit; d'où l'on voit que dans ce cas, comme dans le précédent, c'est moins la crainte d'une décision fautive que celle de ne pas avoir de décision qu'on doit avoir en vue; 3.^o que, n restant le même, plus le nombre des Votans croît, plus aussi la probabilité d'avoir une décision, celle d'avoir une décision vraie, & celle que la décision obtenue sera vraie, augmentent aussi; d'où il résulte que si l'on a des Votans de même degré de probabilité que les premiers, dont on puisse recueillir les suffrages, lorsque le vœu des premiers ne forme pas d'élection, on aura une probabilité toujours croissante de parvenir à une décision, & que la décision rendue sera vraie.

Si l'on se contente de la pluralité d'une seule voix, le cas le moins favorable est celui où les $n - 1$, ou les $\frac{n \cdot n - 1}{2}$, n'auront que cette probabilité, & alors celle d'une décision vraie sera v^{n-1} ou $v^{\frac{n \cdot n - 1}{2}}$. Si q' est la pluralité exigée dans la décision, elle sera $(\frac{v^{q'}}{v^{q'} + v^{n-q'}})^{n-1}$ ou $(\frac{v^{q'}}{v^{q'} + v^{n-q'}})^{\frac{n \cdot n - 1}{2}}$, ce qui,

pour avoir dans le cas le plus défavorable une probabilité a , regardée comme suffisante, exige que v , ou $\frac{v''}{v''+e''}$,

égalent $a^{\frac{1}{n-1}}$ ou $a^{\frac{2}{n \cdot n-1}}$. Supposant, par exemple, $a = \frac{99}{100}$, ce qui paroît suffisant; si $n = 10$ & que $v = \frac{9}{10}$, il faudra

$$\text{que } q' = \frac{\frac{1}{9} \left(\frac{99}{100} - \left(1 - \frac{99^{\frac{1}{9}}}{100}\right) \right)}{19} \text{ ou } \frac{\frac{1}{45} \left(\frac{99}{100} - \left(1 - \frac{99^{\frac{1}{45}}}{100}\right) \right)}{9},$$

c'est-à-dire, dans les deux cas $q' = 4$; & il suffira de prendre un nombre de Votans, tel que $\frac{V''}{V''+E''} = \frac{99 \cdot 99^9}{1,000,000}$ dans

le second cas, & $\frac{V''}{V''+E''} = \frac{1901}{1902}$ dans le premier, la

pluralité étant 4, ce qu'on peut obtenir sans que le nombre des Votans soit très-grand.

Nous pouvons donc nous procurer une forme d'élection avantageuse, avec la seule condition que, s'il est absolument nécessaire d'élire, on pourra, dans le cas où l'élection ne sera pas formée, appeler d'autres Votans jusqu'à ce qu'il résulte de leur vœu une véritable élection.

Si on est obligé d'élire, & qu'après avoir épuisé toutes les voix qu'on peut appeler, on a un résultat tel que l'élection n'est pas formée, on pourra suivre le moyen proposé, *première Partie, pages 124 & 125.*

Mais il faut observer ici, 1.^o que l'on ne peut avoir dans ce cas une probabilité au-dessus de $\frac{1}{2}$, d'avoir préféré le meilleur des Candidats, quoiqu'il soit plus probable que le Candidat élu soit le meilleur; 2.^o que le résultat de la votation, n étant le nombre des Votans, peut n'être équivoque que pour 3, 4, &c. Candidats, en sorte que l'on peut encore avoir dans ce cas une très-grande probabilité d'avoir choisi un des trois, un des quatre meilleurs, &c. de manière qu'en supposant les électeurs de bonne foi, & la probabilité de leur suffrage au-dessus de $\frac{1}{2}$, il est très-probable qu'ils feront, sinon le

meilleur choix, du moins un bon choix, à moins que les Candidats, hors un, ne soient tous mauvais.

Chaque Votant ayant donné l'ordre dans lequel il place les trois Candidats A , B & C , par exemple, & cet ordre étant $A > B > C$, les trois propositions $A > B$, $A > C$, $B > C$, ont été supposées jusqu'ici avoir une égale probabilité; cependant il paroîtroit que la proposition $A > C$ doit être ici plus probable; elle peut en effet être considérée comme prouvée, & par la comparaison immédiate de A avec C , & par le résultat de la comparaison entre A & B , & ensuite entre B & C . On peut dire encore que, la différence prononcée entre A & C étant plus grande que celle qui est prononcée entre A & B , on doit moins se tromper sur cette différence.

Mais on peut répondre, 1.^o que l'on peut, dans un très-grand nombre de cas, regarder comme également probables deux propositions qui prononcent sur la différence entre deux objets, quoique cette différence ne soit pas la même; 2.^o si la comparaison n'a lieu que relativement à une même qualité, la première raison alléguée rentre dans la seconde, & la probabilité ne paroît pas devoir augmenter, parce que la comparaison de A avec B & de B avec C ne fournit pas de preuves de la supériorité de A sur C , que la comparaison immédiate de A avec C ne puisse fournir; 3.^o si la comparaison a lieu relativement à deux ou plusieurs qualités, la même observation a lieu encore. Par exemple, si A l'emporte sur B pour une de ces qualités, & sur C pour l'autre, & qu'ensuite comparant B & C , je trouve à l'un de l'avantage pour la première de ces qualités; & à l'autre, pour la seconde, mon jugement en faveur de B ne sera que la préférence accordée par moi à la première de ces qualités; & la probabilité que cette préférence est juste, rend probable la valeur plus grande de la différence de A & de C , mais non l'existence de cette différence en faveur de A ; 4.^o enfin les deux propositions $A > B$ & $A > C$, si on les a faites séparément sans comparer B à C , n'en deviennent pas nécessairement plus probables, quel que soit le résultat de la comparaison de B avec C .

Nous croyons donc qu'il vaut mieux regarder toutes ces propositions en général comme également probables, à pluralité égale, parce que la différence de leur probabilité, souvent nulle, ou très-petite, ne peut être évaluée que d'une manière très-arbitraire.

On pourroit proposer de prendre la décision de chaque Votant, précisément de la même manière que ci-dessus, c'est-à-dire l'ordre dans lequel ils rangent les Candidats, & de supposer ensuite que la valeur de leur voix en faveur du premier étant exprimée par 1 , la valeur de la même voix soit exprimée par $b < 1$, en faveur du second, & en faveur du troisième par $c < b$. Cette idée, très-ingénieuse en elle-même, s'est présentée à un Géomètre célèbre. Nous allons exposer ici le motif qui nous a empêché de l'adopter. Supposons qu'il y ait trois concurrents A, B, C , & que des six votations, $A > B > C$, $A > C > B$, $C > A > B$, $B > A > C$, $B > C > A$, $C > B > A$, qui répondent aux combinaisons 1, 2, 4, 5, 7, 8, de la page 120, trente voix adoptent la première, répondant à la combinaison 1; une voix la seconde, répondant à la combinaison 2; dix voix la troisième, répondant à la combinaison 4; vingt-neuf la quatrième, répondant à la combinaison 5; dix la cinquième, répondant à la combinaison 7; & une voix la sixième, répondant à la combinaison 8; nous aurons,

pour la proposition $A > B$ 41 voix contre 40,
pour la proposition $A > C$ 60 voix contre 21,
pour la proposition $B > C$ 69 voix contre 12,

c'est-à-dire, une décision en faveur de A . Or, par l'autre méthode, pour qu'elle fût en faveur de A , il faudroit que $31 + 39b + 11c > 39 + 31b + 11c$, ce qui donne $b > 1$; résultat contraire à l'hypothèse.

Si l'on prenoit la méthode discutée, page 122, on auroit alors,

pour $A > B$ 41 voix contre 40,
pour $A > C$ 60 voix contre 21,
pour $B > A$ 40 voix contre 41,
pour $B > C$ 69 voix contre 12;

mais pourvu que la probabilité de chaque voix soit au-dessus de $\frac{1}{2}$, il est encore évident que la décision sera en faveur de A , puisque la probabilité que les deux propositions qui forment cette décision sont vraies à la fois, est au-dessus de $\frac{1}{2}$. Ainsi pour que dans cet exemple la méthode que nous considérons ici donne le même résultat, il faut encore que $b > 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Q U A T R I È M E E X E M P L E .

Examen de la probabilité des décisions d'assemblées de plus en plus nombreuses, mais où la probabilité diminue à mesure que le nombre augmente, & de la forme la plus sûre qu'il convient en général de donner aux décisions qui doivent dépendre de ces assemblées.

Nous supposons d'abord que la probabilité de la voix de tous les Votans est depuis 1 jusqu'à $\frac{1}{2}$, & ensuite que leur nombre est en raison inverse des probabilités, nous aurons

donc $\int \frac{\frac{1}{x}}{x} = l 2$, & la probabilité moyenne sera

$$\frac{\int \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}{\int \frac{\frac{1}{x}}{x}} = \frac{1}{2 l 2} \text{ (les logarithmes sont ici hyperboliques).}$$

Le nombre de voix, dont la probabilité est entre 1 & $a > \frac{1}{2}$, sera donc $\frac{-l a}{l 2}$, & leur probabilité moyenne $\frac{1-a}{-l a}$. Par

exemple, soit $a = \frac{9}{10}$, le nombre de voix sera $\frac{l 10 - l 9}{l 2}$, & la probabilité moyenne $\frac{1}{10 (l 10 - l 9)}$. Ainsi la probabilité

moyenne pour tous les Votans, sera à peu-près $\frac{1000}{1386}$; le rapport du nombre des voix, dont la probabilité excède $\frac{8}{10}$ au

au nombre total, sera $\frac{105}{697}$, & leur probabilité moyenne

$\frac{1000}{1005}$; mais comme dans cette hypothèse le nombre des voix, dont la probabilité est 1 étant 1, 2 fera celui des voix dont la probabilité est $\frac{1}{2}$, cette hypothèse est trop favorable à la probabilité des voix, & nous croyons devoir la rejeter.

Nous supposons plutôt le nombre des voix proportionnel à $1 - x$; alors celui des hommes qui ne se trompent jamais étant zéro, & celui de ceux qui se trompent une fois sur deux étant $\frac{1}{2}$, il paroît qu'elle est plus conforme à la Nature.

Le nombre des voix sera donc ici $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x) \cdot dx}$, & la probabilité moyenne $\frac{\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x) \cdot dx}}{\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(1-x) \cdot dx}}$, c'est-à-dire, que le

nombre des Votans sera exprimé par $\frac{1}{8}$, & la probabilité moyenne par $\frac{2}{3}$. Pour une probabilité $a > \frac{1}{2}$, le rapport du nombre des Votans sera $8 \left(\frac{1}{2} - a + \frac{a^2}{2} \right)$, & la probabilité

moyenne sera $\frac{\frac{1}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}}{\frac{1}{2} - a + \frac{a^2}{2}}$. Soit $a = \frac{9}{10}$, le premier

nombre devient $\frac{1}{25}$, & la probabilité moyenne $\frac{14}{15}$. Nous nous arrêterons à cette hypothèse; donc si 2500 est le nombre des Votans, il y en aura 100 dont la voix aura une probabilité au-dessus de $\frac{9}{10}$. Supposons que la pluralité de cinq voix suffise, la probabilité moyenne étant $\frac{14}{15}$, si on cherche le nombre de voix qu'il faut exiger, pour avoir la même sûreté avec la probabilité moyenne $\frac{2}{3}$; il faut faire l'équation

$2^q = 14^5$, ou $q = \frac{5 \cdot 14}{12}$, c'est-à-dire qu'il faudra prendre

$q > 19$, ou $q = 20$, à moins que l'on ne se contentât de $q = 19$, qui approche très-près de la vraie valeur; d'où il

P p

est aisé de voir que si l'on exige seulement une pluralité de 20 voix sur 2500, on aura, 1.^o la même assurance dans le cas de la moindre pluralité; 2.^o une probabilité très-suffisante d'avoir une décision, & de l'avoir vraie en n'ayant égard qu'à la probabilité moyenne,

Ces formules suffisent pour montrer comment en augmentant le nombre des Votans, de manière qu'ils deviennent de moins en moins éclairés, on voit décroître la probabilité moyenne avec une assez grande rapidité; mais cette manière d'évaluer la probabilité n'est exacte qu'en supposant infini le nombre des Votans, d'après lequel on a déterminé la loi, c'est-à-dire, en supposant, par exemple, que sur les 2500 Votans, dont 100 ont la probabilité moyenne $\frac{14}{25}$, & les 2400 autres la probabilité moyenne $\frac{236}{300}$, lorsque l'un des Votans est pris du nombre des 100 premiers, il y a toujours la probabilité $\frac{1}{25}$, & non pas $\frac{99}{2500}$ que le second en sera aussi, ce qui n'a lieu que si on suppose la loi établie en général pour la masse des hommes dans un très-long temps.

Si on n'a pas admis cette hypothèse, & qu'on cherche la probabilité dans le cas où un nombre S , par exemple, de Votans est assujéti à cette loi, mais de manière que si n est le nombre de ceux qui ont une certaine probabilité moyenne,

$\frac{n}{S}$ est la probabilité qu'un Votant sera pris dans ce nombre,

& $\frac{n \cdot (n-1)}{S \cdot (S-1)}$ que deux Votans en seront tirés, au lieu de

$\frac{n^2}{S^2}$ que donne la première hypothèse; alors la recherche

de la probabilité devient plus difficile. Nous allons donner ici les moyens de la déterminer.

Pour cela, nous supposons les probabilités divisées en un nombre n de classes, pour chacune desquelles la probabilité moyenne soit N , de manière que la première classe ait 1 Votant, la seconde 2 la n^{e} n , ce qui donne

$S = \frac{n' \cdot n' + 1}{2}$, n' étant la dernière valeur de n . Il est clair,

1.° que la probabilité moyenne d'une seule voix sera $\Sigma \frac{n^N}{S}$, la différence finie constante étant 1, & l'intégrale prise depuis 1 jusqu'à n' , la probabilité de l'erreur sera dans le même cas $\frac{\Sigma n \cdot (1-N)}{S}$, & leur somme $\frac{\Sigma n}{S} = 1$, comme cela doit être ; 2.° pour avoir la probabilité de la seconde voix, on trouve que si la première appartient à la classe n , la probabilité de la seconde sera exprimée par $\frac{\Sigma(nN) - N}{S-1}$; donc la probabilité totale sera $\frac{\Sigma[nN \cdot (\Sigma nN - N)]}{S \cdot (S-1)}$. La probabilité pour une décision vraie & une fautive sera

$$\frac{\Sigma \{nN [\Sigma [n \cdot (1-N)] - (1-N)]\} + \Sigma [n \cdot (1-N) (\Sigma nN - N)]}{S \cdot (S-1)},$$

& pour deux décisions fautes $\frac{\Sigma \{n \cdot (1-N) [\Sigma (n \cdot 1-n) - (1-N)]\}}{S \cdot (S-1)}$, dont la somme est égale à l'unité, comme cela doit être ;

3.° pour une troisième voix, la probabilité que toutes trois seront vraies, sera exprimée par $\frac{\Sigma [nN \cdot (\Sigma nN - N) (\Sigma nN - 2N)]}{S \cdot (S-1) \cdot (S-2)}$,

& dans le même cas, pour quatre voix,

$$\frac{\Sigma [nN (\Sigma nN - N) (\Sigma nN - 2N) (\Sigma nN - 3N)]}{S \cdot (S-1) \cdot (S-2) \cdot (S-3)},$$

& pour un nombre q quelconque,

$$\frac{\Sigma \{nN \cdot (\Sigma nN - N) (\Sigma nN - 2N) \dots \dots \dots [\Sigma nN - (q-1) \cdot N]\}}{S \cdot (S-1) \cdot (S-2) \cdot (S-3) \dots \dots \dots (S-q+1)},$$

où il faut observer que chaque signe d'intégrale Σ s'étend sur tous les termes qui multiplient la quantité nN placée sous ce signe. Si $N = 1$, cette quantité devient 1, comme cela doit être ; si $N = v$, v étant constant, elle devient v^q , comme elle doit être aussi dans ce cas. 4.° Si l'on veut avoir, d'après cette formule, la valeur de la probabilité pour un nombre q , on verra que l'on pourra former l'équation $P^q = A P^{q-1} + B P^{q-2} + C P^{q-3} + D P^{q-4} \dots \dots \dots + \&c.$

les $P^q, P^{q-1}, \&c.$ désignant les valeurs de cette probabilité, répondantes aux nombres $q, q-1, \&c.$ & A étant

$$= \frac{\Sigma_n N}{S-q+1}, B = \frac{-(q-1)\Sigma_n N^2}{(S-q+2)\cdot(S-q+1)},$$

$$C = \frac{(q-1)\cdot(q-2)\cdot\Sigma_n N^3}{(S-q+3)\cdot(S-q+2)\cdot(S-q+1)},$$

$$D = \frac{-(q-1)\cdot(q-2)\cdot(q-3)\cdot\Sigma_n N^4}{(S-q+4)\cdot(S-q+3)\cdot(S-q+2)\cdot(S-q+1)}, \&c.$$

5.° Si on cherche la valeur de la probabilité dans le cas où il y a une voix fausse, on en aura l'expression, soit en mettant dans la première formule de l'article précédent $1-N$ au lieu de N dans chacun des termes qui la composent; soit, P' désignant cette probabilité, par l'équation

$$P^q = A' P'^{q-1} + 2 B' P'^{q-2} + 3 C' P'^{q-3} \dots \dots \dots$$

$$+ A P'^{q-1} + B P'^{q-2} + C P'^{q-3} \dots \dots \dots A', B', \&c.$$

étant ce que deviennent $A, B, \&c.$ en mettant $1-N$ pour un des N . Pour le cas de deux voix fausses, on aura la valeur de la probabilité, en prenant toutes les valeurs de la première formule, n.° 3, qu'on obtient en mettant dans chaque combinaison deux à deux des termes qui la composent, $1-N$ au lieu de N ; ou en appelant ce terme P'' , on aura

$$P''^q = B'' P''^{q-2} + 3 C'' P''^{q-3} + 6 D'' P''^{q-4} \dots \dots \dots$$

$$+ A' P'^{q-1} + 2 B' P'^{q-2} + 3 C' P'^{q-3} \dots \dots \dots$$

$$+ A P''^{q-1} + B P''^{q-2} + C P''^{q-3} \dots \dots \dots$$

d'où il est aisé de suivre la loi de ces formules. 6.° On pourra aussi représenter P^q sous la forme

$$\frac{\Sigma_n N^q - Q' \Sigma_n N^{q-2} \cdot \Sigma_n N^2 + Q'' \Sigma_n N^{q-3} \cdot \Sigma_n N^3 + Q''' \Sigma_n N^{q-4} \cdot \Sigma_n N^4 \dots}{S \cdot (S-1) \cdot (S-2) \dots \dots \dots (S-q+1)},$$

Q' étant la somme des nombres $1, 2, 3 \dots \dots \dots q,$
 Q'' la somme du produit de ces nombres pris deux à deux,
 Q''' la somme des produits de ces nombres pris trois à trois.
 De même on aura

$$P^{q'} = q \sum n N^{q-1} \cdot \sum n \cdot (1-N) - Q' \left\{ \begin{array}{l} (q-2) \cdot \sum n N^{q-3} \cdot \sum n \cdot (1-N) \cdot \sum n N^2 \\ + 2 \sum n N^{q-2} \cdot \sum n N \cdot (1-N) \end{array} \right\} \\ + Q'' \left\{ \begin{array}{l} (q-3) \sum n N^{q-4} \sum n \cdot (1+N) \sum n N^3 \\ + 3 \sum n N^{q-3} \cdot \sum n N^2 (1-N) \end{array} \right\} \dots \dots$$

& ainsi de suite.

$$P^{q'} = \frac{q \cdot (q-1)}{2} \sum n N^{q-2} \cdot \sum n \cdot (1-N)^2 - Q' \left\{ \begin{array}{l} \frac{(q-2) \cdot (q-3)}{2} \cdot \sum n N^{q-4} \cdot \sum n \cdot (1-N)^2 \sum n N^2 \\ + 2 \cdot (q-2) \cdot \sum n N^{q-3} \sum n \cdot (1-N) \sum n \cdot N \cdot (1-N) \\ + \sum n N^{q-2} \sum n^2 \cdot (1-N)^2 \end{array} \right\} \\ + Q'' \left\{ \begin{array}{l} \frac{(q-3) \cdot (q-4)}{2} \sum n N^{q-5} \sum n \cdot (1-N)^2 \cdot \sum n N^3 \\ + 3 \cdot (q-3) \cdot \sum n N^{q-4} \sum n \cdot (1-N) \cdot \sum n N^2 \cdot (1-N) \\ + 3 \sum n N^{q-3} \sum n N \cdot (1-N)^2 \end{array} \right\} \dots$$

formule dont la loi est facile à saisir.

Nous ne pousserons pas plus loin ces formules, qui ne nous seroient ici que de peu d'utilité. En effet, nous avons déjà observé plus d'une fois que l'on ne doit pas se contenter d'avoir égard à la probabilité moyenne, mais que l'on doit chercher à se procurer la sûreté nécessaire, même dans le cas de la plus petite probabilité. Ainsi dans ce cas, où la probabilité peut descendre jusqu'à $\frac{1}{2}$, il faut du moins s'assurer une très-grande probabilité que celle d'une décision d'une pluralité donnée ne tombera pas au-dessous d'une certaine limite. Pour cela, soit q' la pluralité qui a lieu, m la limite au-dessous de laquelle on ne veut pas que tombe $v^{q'}$; on aura,

1.° $\frac{1}{6} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ valeur de la probabilité dans cette

hypothèse, & on prendra $\int [(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) \frac{m^2 dx}{x^3} - \frac{m^2 dx}{x^4}]$

depuis $x = 1$ jusqu'à $x = m$ si $m > \frac{1}{2}$, & depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \frac{1}{2}$ si $m < \frac{1}{2}$. Soit ensuite A cette formule prise depuis 1

jusqu'à x , on prendra $\int [A(\frac{m^2 dx}{x^3} - \frac{m^2 dx}{x^4})]$ avec les mêmes conditions, & ainsi de suite, en répétant

$q' - 1$ fois ces intégrations. On prendra, 2.^o la formule

$$\int \left[\left(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right) \frac{m^2 dx}{x^2} - \frac{m^2 dx}{x^2} \right]$$

avec les mêmes conditions que ci-dessus, & on répétera aussi $q' - 1$ fois la même intégration. Cela posé, soit P la première formule,

& P' la seconde, nous aurons la probabilité que $v^{q'}$ sera au-dessus de m , exprimée par $\frac{P}{P'} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{q'}$; mais sans entrer

dans le détail de ce calcul, il est facile de voir que, pour que cette valeur soit très-grande & égale à $\frac{144767}{144768}$, par

exemple, il faudra supposer m trop petit pour que la valeur de $\frac{v^{q'}}{v^{q'} + a^{q'}}$ puisse donner une assurance suffisante, à moins

de faire q' très-grand. Il en résulte donc que dans l'hypothèse présente on ne peut parvenir immédiatement à la sûreté qu'il est nécessaire de se procurer dans les décisions sur des objets importans; mais il n'est pas impossible de suppléer à ce défaut. En effet, quoique, par exemple, un grand nombre d'hommes aient des voix d'une très-petite probabilité lorsqu'ils donnent immédiatement une décision sur une affaire qui exige de l'instruction & du raisonnement, il est très-possible que ces mêmes hommes jugent avec beaucoup plus de probabilité, en choisissant pour décider ces mêmes affaires ceux d'entr'eux qu'ils jugent avoir le plus de lumières. Ainsi en les chargeant seulement de cette élection, on peut avoir

une probabilité $M' > \frac{144767}{144768}$, ou telle autre limite qu'on

jugera devoir assigner, que celle de la voix de chacun de ceux qu'ils ont choisi n'est pas au-dessous de m' , de manière que $M' m'$ soit $\frac{2}{10}$. Dès-lors il suffira d'exiger de cette nouvelle assemblée les conditions suffisantes pour la sûreté, ce qui est très-facile, comme nous l'avons exposé ci-dessus; & puisque, page 297, sur 2500 Votans, pris dans cette hypothèse, il y en a 100 dont la probabilité est au-dessus

de $\frac{2}{10}$; il est facile de voir que l'on pourra espérer d'avoir le nombre nécessaire de Votans ayant cette probabilité.

Si au lieu de cette hypothèse on en choisit une où l'on suppose qu'une partie des Votans a une probabilité au-dessous de $\frac{1}{2}$, on en tirera absolument les mêmes conséquences, si ce n'est que l'on verra diminuer plus rapidement la probabilité à mesure que le nombre des Votans augmentera. Mais il faut observer dans ce dernier cas qu'il peut être plus difficile d'avoir une probabilité suffisante que ceux qui seroient choisis à la pluralité des voix pour être chargés de la décision, auroient chacun une probabilité $M' m'$ ou $\frac{2}{10}$, parce que comme en général ce sont des préjugés qui font tomber la probabilité au-dessous de $\frac{1}{2}$, il paroît naturel que ceux qui votent pour le choix, donnent leur confiance à ceux qui partagent leurs préjugés. Il ne peut donc y avoir aucune ressource tant que ceux qui passent dans un pays pour instruits, d'après l'opinion commune, ne sont pas au-dessus des préjugés.

D'où il résulte qu'il y a bien des moyens de former une assemblée dont les décisions ont l'assurance nécessaire, même avec un grand nombre de Votans peu éclairés, en bornant le droit de ceux-ci à choisir ceux au jugement desquels ils remettent ensuite la décision des affaires, mais qu'il n'y en a aucun, même par cette voie, lorsque les préjugés se joignent au défaut de lumières.

Il faut même observer que dans ce cas, les précautions que l'on prendroit ne serviroient qu'à procurer plus sûrement une décision fautive sur tous les objets auxquels ces préjugés s'étendent; en sorte qu'il y auroit une plus grande espérance d'éviter l'erreur si la décision se trouvoit confiée, par le hasard, à un ou à un très-petit nombre d'hommes de la classe de ceux chez qui l'on peut s'attendre à trouver quelque instruction.

On voit donc combien il est important, non-seulement que les hommes soient éclairés, mais qu'en même temps tous ceux qui, dans l'opinion publique, passent pour instruits ou habiles, soient exempts de préjugés. Cette dernière

condition est même la plus essentielle, puisqu'il paroît que rien ne peut remédier aux inconvéniens qu'elle entraîne.

Nous terminerons ici cet Essai. La difficulté d'avoir des données assez sûres pour y appliquer le calcul, nous a forcés de nous borner à des aperçus généraux & à des résultats hypothétiques : mais il nous suffit d'avoir pu, en établissant quelques principes, & en montrant la manière de les appliquer, indiquer la route qu'il faut suivre, soit pour traiter ces questions, soit pour faire un usage utile de la théorie.



1190





